Comparação entre alguns modelos discretos de Dinâmica Populacional

Aluno-autor: Álvaro Leitão Pellegrino, al.pellegrino@unesp.br, bolsista PICME - CNPq; Orientadora: Profª. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira, Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Curso de Matemática.

Palavras Chave: *Ponto de equilíbrio, Estabilidade, Modelos discretos.*

Introdução

Modelos de dinâmica populacional e a interação entre espécies é um tema profuso na literatura matemática e fundamental nos planejamentos de desenvolvimento sustentável.

O estudo do comportamento de modelos para uma única população é baseado essencialmente no fato que a taxa de crescimento da população em estudo depende, de alguma forma, da própria população, nos levando, assim, a equações não lineares, para as quais dificilmente teremos solução analítica. Assim, técnicas matemáticas de análise de estabilidade são necessárias para o estudo do comportamento desses modelos.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é realizar a análise e comparação entre alguns modelos discretos de dinâmica populacional (Verhulst, May 1975 e Hassel 1975), que possuem hipóteses de taxa de crescimento similares mas diferem nas funções que representam estas taxas.

Material e Métodos

Este trabalho foi desenvolvido através de estudos individuais, discussões e seminários realizados pelo aluno autor e supervisionados pela orientadora, utilizando como referências [1], [2] e [3]. Tais referências foram utilizadas para o estudo de equações de diferenças e os critérios de estabilidade assim como os modelos apresentados.

Resultados e Discussão

Os modelos discretos de dinâmicas populacionais geralmente são formulados por equações de diferenças na forma $P_{n+1} = f(P_n) = P_n F(P_n)$, onde a função $f(P_n)$ é quase sempre não linear e $F(P_n)$ representa a taxa de crescimento dependente da própria população.

Dessa forma, alguns modelos clássicos foram analisados quanto à estrutura da taxa de crescimento populacional e a respeito da estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Nos três modelos apresentados, à medida que a população aumenta, a taxa de crescimento diminui.

1. Modelo de Verhulst: é descrito pela equação $P_{n+1} = P_n r(1 - P_n/K)$, onde $r > 0$ e $K > 0$, sendo K chamado de capacidade suporte do meio. O ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é sempre instável e $P^* = K(r-1)/r$ existe e é assintoticamente estável para $1 < r \leq 3$ e instável se $r > 3$.

2. Modelo de May (1975): considera que se a população for muito grande a taxa de crescimento também sofre redução, mas P_{n+1} permanece sempre positiva. Assim, temos $P_{n+1} = P_n e^{r(1-P_n/K)}$, onde r e K são constantes positivas, sendo K a capacidade suporte do meio.

O ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é sempre instável e $P^* = K$ é assintoticamente estável se $0 < r \leq 2$ e instável se $r > 2$.

3. Modelo de Hassel (1975): é dado pela equação $P_{n+1} = P_n \lambda (1 + aP_n)^{-b}$, onde λ, a e b são constantes positivas.

O ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é instável se $\lambda > 1$ e assintoticamente estável se $0 < \lambda < 1$. E, $P^* = \left(\lambda^{1/b} - 1\right)/a$ só existe se $\lambda > 1$ e será assintoticamente estável se a relação $0 < b(1 - \lambda^{-1/b}) < 2$ for satisfeita.

Conclusão

De um modo geral, os modelos são parecidos em termos de número de pontos de equilíbrio e estabilidade dependente dos parâmetros, mas cada um considera os fatores inibidores no crescimento populacional de uma forma característica. Sendo assim, cada modelo é único e modela o crescimento da população de uma forma distinta e, portanto, o mais apropriado para se utilizar em um estudo será aquele que reflete a dinâmica da população em foco de forma mais aproximada.

Agradecimentos

O aluno agradece ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado – PICME pelo apoio financeiro e à Profª. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira pela sabedoria e paciência.

[1] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical Models in Biology.* New York: Random House, **1988**.
[2] El.aydi, ELAYDI, S. An introduction to difference equations. 3. edição, Springer, Inc, 2005
[3] Murray, J. D. *Mathematical Biology. Springer-Verlag,* **1993**.