

ANÁLISE COMPUTACIONAL DA PRODUÇÃO DE PRÓTESES VIA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Cassiano da Silva Tavares (UFSCar) cassiano.tavares@estudante.ufscar.br
Jose Benaque Rubert (UFSCar) benaquer@ufscar.br

Resumo

Um dos grandes desafios enfrentados pela medicina ortopédica regenerativa é a produção de próteses e implantes capazes de substituir de modo eficiente ossos danificados ou perdidos. A complexidade da tarefa se deve à composição orgânica dos ossos devido a sua alta resistência mecânica e porosidade, respectivamente. Esta última característica que constrói para baixa densidade dos ossos. Neste contexto em que se desenvolve este trabalho. Considera-se a utilização da Otimização Topológica no projeto de próteses a fim de obter soluções mais eficientes do ponto de vista da distribuição de material e esforços internos. Testes computacionais foram realizados avaliando o método de solução Minimização Alternada buscando explorar as características mecânicas elásticas de quatro fases de vida dos ossos. Uma formulação do problema Homogeneizado de Mínima Flexibilidade Estrutural foi investigada utilizando o filtro de *Helmholtz* para tratar pseudo-densidades e dependência de malha na distribuição de material. Os resultados indicaram que o emprego somente da heurística Minimização Alternada não ofereceu resultados satisfatórios do ponto de vista de viabilidade de manufatura, porém quando o filtro de *Helmholtz* foi empregado, no cenário geral, o valor da função objetivo foi reduzido em 240,26% e a viabilidade de manufatura foi alcançada.

Palavras-Chaves: Próteses Humanas. Bio-fabricação. Otimização Topológica. Programação Matemática. Método dos Elementos Finitos.

1. Introdução

A demanda por próteses customizadas impulsionou diversos esforços para o desenvolvimento de uma nova área de pesquisa conhecida como biofabricação. A biofabricação é composta por

duas grandes classes: a produção de dispositivos - que ocorre principalmente pelo processo de Manufatura Aditiva (do inglês, *Additive Manufacturing* (AM)) e a produção de biomateriais (BARTOLO et al., 2012).

Para que uma prótese atenda todas as necessidades do osso danificado, algumas características fundamentais são necessárias: 1) biocompatibilidade. 2) uma interface de tamanho ideal para que as células realizem processos de fixação, proliferação e diferenciação. 3) superfície altamente porosa para se ligar através dos poros: crescimento intracelular, transporte de nutrientes, perda metabólica. 4) propriedades mecânicas: para suprir toda a demanda da região danificada, para eliminar ou reduzir a proteção contra o estresse adjacente, para suportar todas as necessidades anatômicas da região e para evitar falhas mecânicas (BARTOLO et al., 2012).

Uma das alternativas para o atendimento de todos estes requisitos no projeto da prótese se dá pela Otimização Topológica (TO), que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) em seu método de solução, que motiva o presente trabalho no desenvolvimento desta solução no contexto de próteses humanas customizadas.

1.1. Descrição do problema

Os materiais mais utilizados na fabricação de próteses são em sua maioria ligas metálicas com densidades superiores às dos ossos humanos. Essa diferença de densidades altera a distribuição de tensões na região do implante porque o organismo identifica a prótese como um “corpo estranho” e promove uma remodelação óssea proximal adaptativa conhecida como *stress-shielding*. (NOYAMA et al., 2012). Para contornar esta situação, a modelagem matemática que descreve a topologia da prótese, precisa atender todas as condicionantes mecânicas e biológicas. Isso implica que além da resistência mecânica, a topologia também deve considerar a porosidade dos ossos favorecendo o fluxo de crescimento intracelular, transporte de nutrientes e perda metabólica.

Neste trabalho o estudo se limita às restrições mecânicas do problema, visando a redução de volume em domínios bidimensionais de geometria simples capazes de mostrar a adequação das soluções propostas para projeto de próteses.

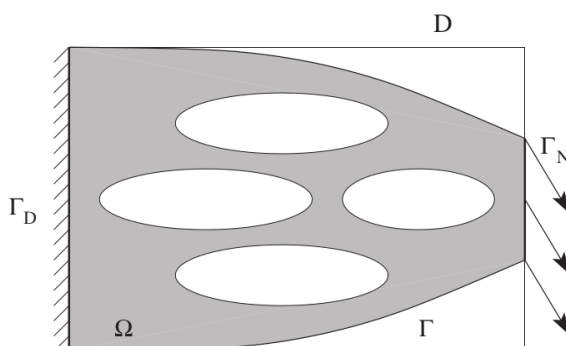
2. Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade da Estrutural

O modelo Homogeneizado de Minimização da Flexibilidade Estrutural (HMFE) minimiza a energia de deformação através de um processo de homogeneização de duas fases do material,

onde uma fase é considerada a existência de material e a outra fase é considerada a ausência de material (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O domínio de trabalho limitado $D \in R^n$ ($n = 1,2,3$ é a dimensão espaço), na qual se busca uma topologia ótima $\Omega \subseteq D$. Onde $\Gamma_D \neq \emptyset$ e $\Gamma_N \neq \emptyset$ são duas partes da fronteira de D às quais se aplica uma condição de contorno de restrição de movimento (Γ_D) e de tensões (Γ_N) e Γ é uma fronteira livre de esforço conforme apresentado Figura 1.

Figura 1 – Topologia admissível Ω no domínio D



Fonte: Allaire e Schoenaue (2007)

A Figura 1 apresenta o desafio da TO em definir em quais regiões do domínio D haverá a presença de material (fase sólida) indicada por Ω e quais regiões do domínio corresponderão a vazios atendendo todos os pré-requisitos do projeto (condições de contorno). O limite de contorno de Ω é composto de três componentes (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007):

$$\Gamma_\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D \text{ com } \Gamma_N \cup \Gamma_D \subset \partial D. \quad (2.1)$$

Por hipótese Ω é formada por um material em regime elástico, linear e isotrópico, que segue a lei de Hooke. Com estas definições é possível definir um conjunto de topologias admissíveis (U_{ad}) (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007):

$$U_{ad} = \{\Omega \subset D, \Gamma_N \cup \Gamma_D \subset \Gamma_\Omega\}. \quad (2.2)$$

Nestas condições o problema de minimização será dado por:

$$\min c(\bar{x}, E^*) = \min_{\bar{x}, E^*} \int_D^D \sigma(u(\bar{x})) : (\bar{x}E^*)^{-1} : \sigma(u(\bar{x})) + \lambda \left(\frac{V(\bar{x})}{V(\Omega)} - f \right) d\bar{x}. \quad (2.3)$$

Sujeito a:

$$V(\bar{x}) = \int_{\Omega}^{\Omega} \bar{x} d\Omega, \quad (2.4)$$

$$\sigma(u) = J(E(\bar{x})) : \varepsilon(u), \quad \in D, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla + (\nabla)^T), \quad \in D, \quad (2.6)$$

$$F = K(\bar{x})U(\bar{x}), \quad \in D, \quad (2.7)$$

$$\sigma \vec{n} = g, \quad \in \Gamma_N, \quad (2.8)$$

$$\sigma \vec{n} = 0, \quad \in \partial D \text{ com } (\Gamma_N \cup \Gamma_D), \quad (2.9)$$

$$E^* = (\bar{x})^p E, \quad (2.10)$$

$$0 \leq \bar{x} \leq 1. \quad (2.11)$$

Onde F é o vetor de forças nodais equivalentes no sistema global, $u(\bar{x})$ é o vetor de deslocamentos nodais dos elementos, $V(\bar{x})$ é o volume total da estrutura em função das densidades elementares, $V(\Omega)$ representa o domínio de projeto na fase sólida, g representa o vetor de tensões superficiais, f representa o parâmetro que impõe a redução de volume da estrutura, $U(\bar{x})$ é o vetor de deslocamentos globais, $K(\bar{x})$ é a matriz de rigidez global do

sistema, $\bar{x}$ é a densidade do elemento e , σ e ε são os tensores de tensões e de deformações infinitesimais, T indica operador matricial transposto, ∇ representa o operador de derivadas parciais, $\vec{n}$ é um versor normal ao contorno do domínio Ω orientado para fora, E^* é o módulo de Young do material alterado após a aplicação do *Simple Isotropic Material with Penalization* (SIMP), p é o penalizador SIMP, E é o módulo de Young do material, $J(E(\bar{x}))$ é um tensor de quarta ordem, função do módulo de Young que varia com a densidade do material, e $(:)$ é o produto duplamente contraído entre os tensores.

Na função objetivo (2.3) a primeira parcela minimiza a energia de deformação da estrutura e a segunda parcela minimiza o volume da estrutura, através da relaxação Lagrangiana de uma restrição que anteriormente determinava a redução de volume na estrutura. A restrição (2.4) apresenta como o cálculo do volume da estrutura é obtido em função das variáveis de projeto. A restrição (2.5) é a equação constitutiva para materiais isotrópicos, a restrição (2.6) apresenta o cálculo do tensor de deformações infinitesimais, a restrição (2.7) é a equação de equilíbrio local, o conjunto de restrições (2.8) - (2.9) indicam as condições de contorno no domínio de projeto. A restrição (2.10) apresenta como é interpolado o módulo de Young alterado via SIMP, sendo E^* uma variável de decisão do modelo, e, por fim, a restrição (2.11) apresenta o domínio contínuo da variável de decisão $\bar{x}_e$ que determina se a densidade de material do elemento e vai ser incluída na topologia do projeto.

O método SIMP apresentado na restrição (2.10) consiste em uma estratégia de homogeneização do material para que ele seja considerado isotrópico. O domínio da variável $\bar{x}_e$ gera soluções intermediárias no intervalo contínuo $\{0,1\}$ que são consideradas ineficazes do ponto de vista da manufatura, conhecidas por pseudo-densidades. O SIMP possui a estratégia de penalizar estas densidades intermediárias para que as realizações da variável $\bar{x}_e$ permaneçam somente nos extremos de seu domínio. Estas penalizações são realizadas pelo parâmetro p conhecido como penalizador SIMP, tendo o seu valor adotado variando entre 3 ou 4 (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Por sua vez os deslocamentos $u(\bar{x})$ calculados através do MEF dependem das densidades e por isso ela é uma variável a ser considerada no processo de minimização.

3. Método de solução

3.1 Minimização Alternada

Para a solução do modelo HMFE neste trabalho será empregado a heurística de Minimização Alternada que consiste em encontrar topologias quase ótimas para o HMFE através da busca de mínimos globais no domínio D , para isso, primeiro se obtém a topologia quase ótima da estrutura com o SIMP inativo, em seguida o SIMP é ativado por mais algumas iterações para penalizar as pseudo-densidades (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007).

Devido o modelo HMFE é constituído por uma dupla minimização em sua função objetivo de $(\bar{x}, E^*)$ e pelos tensores de tensão estaticamente admissíveis σ , a heurística foi batizada de Minimização Alternada, pois propõe uma estratégia de minimização alternada e iterativa sobre o par $(\bar{x}, E^*)$. A solução colocada na forma iterativa se expressa da seguinte forma:

$$\sigma_{n+1} = J \left(E(\bar{x}_n^{p_n}) \right) : \nabla^s u_{n+1}. \quad (3.1)$$

Onde σ_{n+1} representa o tensor de tensões da próxima iteração, $\bar{x}_n$ representa a densidade da interação atual, $\nabla^s u_{n+1}$ gradiente simétrico do campo de deslocamentos na iteração $n + 1$.

O penalizador SIMP p_n na iteração atual n , é definido a seguir (BLEYER, 2018):

$$-p_n \bar{x}_{n+1}^{-p_n-1} \sigma_{n+1} + \lambda = 0. \quad (3.2)$$

Nas restrições (3.2) o penalizador de Lagrange (λ) é obtido pelo método da Bissecção e deve satisfazer a igualdade. O critério de otimalidade adotado para atualizar a variável de projeto é apresentado pelas restrições (3.3) onde é necessário criar um parâmetro de densidade mínima $x_{min} = 10^{-3}$ para evitar degeneração numérica do método. Novamente, o penalizador de Lagrange (λ) deve ser selecionado adequadamente pelo método da Bissecção (BLEYER, 2018):

$$\bar{x}_{n+1} = \min\{1, \max\left\{ \frac{x_{min}}{\left(\frac{p_n \sigma_{n+1}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p_{n+1}}}} \right\} \}. \quad (3.3)$$

No Algoritmo 1 abaixo se resume o processo iterativo de solução, a convergência ocorre quando a sequência de soluções dos parâmetros de forma $c(\bar{x}, E^*)$ se torna estacionária, geralmente algumas dezenas de passos são suficientes para obter uma topologia ótima. O esforço computacional consiste em resolver uma sucessão de problemas de elasticidade linear (conj. restrições (2.5) a (2.9)). Um ponto que deve ser destacado é que as simplificações da

heurística podem gerar resultados não satisfatórios, com diversas regiões possuindo grandes áreas com pseudo-densidades (BENDSφE; SIGMUND, 2003).

Algoritmo 1 – Minimização Alternada

Algoritmo 1: Minimização Alternada.

Entrada: O algoritmo deve ser iniciado com o domínio D completo, ou seja $\bar{x}_e = 1, \forall e \in N_e$. Também são necessários: um par anterior de soluções $(\bar{x}_n, \sigma_n)$ de $c(\bar{x}, E^*)$ e um determinado valor do penalizador SIMP (p_n).

- 1 Fixar o valor de $\bar{x}_n$, minimizar σ_n em $c(\bar{x}, E^*)$ através da Eq. (3.1) utilizando o algoritmo da Bissecção;
- 2 Fixar o valor de σ_n obtido no passo anterior, minimizar $\bar{x}_n$ em $c(\bar{x}_{n+1}, E^*_{n+1})$ através da Eq. (3.3) utilizando o algoritmo da Bissecção;
- 3 Atualizar o valor do penalizador SIMP (p_n) através da Eq. (3.2);
- 4 Repetir os passos de 1 a 3 até a convergência do método para uma solução ótima.

Fonte: Adaptado de Allaire (2015)

3.2 Filtros de densidade

A aplicação direta da heurística Minimização Alternada não foi satisfatória do ponto de vista de viabilidade de manufatura, devido a elevadas regiões com pseudo-densidades, neste trabalho se utiliza o filtro de densidades apresentado em Lazavor e Sigmund (2010), baseado nas equações diferenciais de *Helmholtz*, e, por isso, denominado filtro de *Helmholtz*. Este filtro utiliza técnicas de processamento de imagens, conhecidas como *blurring*, onde a modificação da densidade de uma célula equivale a alteração da rigidez de um dado elemento da malha, a fim de tornar este elemento dependente do campo de densidades de sua vizinhança. Em linhas gerais a aplicação deste filtro consiste na utilização de um produto de convolução entre uma função de filtragem e a pseudo-densidade do elemento apresentadas pelas Eqs. (3.4) – (3.5):

$$\tilde{x} = (h \cdot \tilde{x})(\dot{x}) = \int_{\mathbb{B}_{\mathbb{R}}} h(x - y) \tilde{y} dy, \quad (3.4)$$

$$\int_{B_R} h(x) dx = 1. \quad (3.5)$$

Onde h é a função de filtragem, $\tilde{x}$ é a variável de projeto filtrada, $\dot{x}$ é o vetor de coordenadas da posição do elemento, x, y são as coordenadas cartesianas do elemento e $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ é um círculo

em um domínio plano e uma esfera em um caso de três dimensões com raio R na posição $\hat{x}$ (SILVA, 2020).

Neste trabalho, em lugar da integral de convolução na forma explícita mostrada acima, se implementou no software FEniCS uma solução para a equação modificada de *Helmholtz* com condições de contorno naturais homogêneas (Eqs. (3.6) - (3.7)) (SILVA, 2020).

$$-r^2 \nabla^2 \tilde{a} + \tilde{a} = a, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (3.7)$$

Nas Eqs. (3.6) - (3.7) a representa uma variável de projeto e $\tilde{a}$ representa a variável de projeto filtrada, r é o parâmetro de alcance do raio de filtragem. Avaliando a Eq. (3.6) se observa que (i) se $r = 0$, a variável filtrada $\tilde{a}$ é equivalente a variável de projeto a e (ii) quanto maior o valor do parâmetro r , maior é a influência do gradiente da variável filtrada na solução da Eq. (3.6). A solução do conjunto de Eqs. (3.6) – (3.7) é obtida através do MEF (SILVA, 2020).

4. Resultados

4.1 Experimentos computacionais

Os processamentos foram realizados com o software de ambiente OpenSource FEniCS combinado com a biblioteca Dolfin-Adjoint (FARREELL et al. 2013). Os exemplos de aplicação foram escritos em Python versão 3.10 e executados em um ambiente Jupyter Notebook. Os experimentos computacionais foram realizados em uma máquina com 15,9 Gb RAM, Intel Core i7-3537U 2,0 GHz, rodando o sistema operacional Ubuntu 20.04.3 LTS.

4.2 Descrição dos dados

A composição mista de partes orgânica e inorgânica dos ossos é levada em conta na formação das propriedades mecânicas a considerar nas simulações numéricas, de modo a que estas reflitam com boa precisão o comportamento real. A regeneração do tecido ósseo em caso de fraturas ocorre de forma sequencial passando pelas seguintes fases: tecido fibroso, cartilagem, cartilagem calcificada e tecido ósseo (GORRIZ, 2014). A Tabela 1 apresenta os respectivos módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* das fases de formação do tecido ósseo. proporção

de cada substância na composição nas fases de formação do tecido ósseo. Os dados da Tabela 1 foram utilizados como dados de entrada no método de solução utilizado.

Tabela 1 - Módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* das fases de formação do tecido ósseo

	Tecido Fibroso	Cartilagem	Cartilagem Calcificada	Tecido Ósseo
E(MPa)	80,078	27,055	57,055	982,489
ν	0,128	0,104	0,108	0,296

Fonte: Gorriz (2014)

Foram consideradas três malhas de elementos triangulares diferentes: 60 x 20 elementos, 150 x 50 elementos e 300 x 100 elementos conforme proposto em Andreassen et al. (2011).

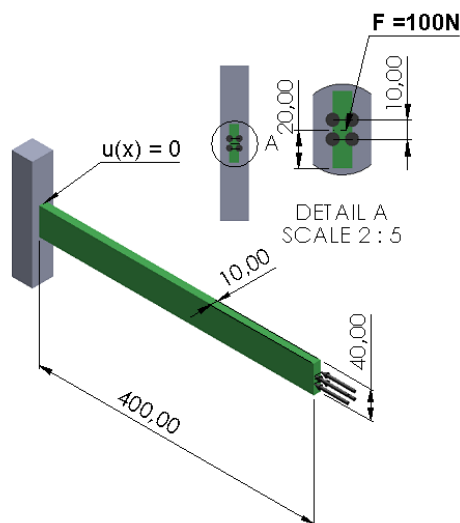
4.3 Resultados computacionais para viga engastada

A viga engasta apresentada pela Figura 2 tem as seguintes dimensões: comprimento = 400mm, largura = 40mm e espessura = 10mm, respectivamente. O carregamento de 100 N distribuído em um comprimento de 10mm é aplicado às três malhas para as quatro fases de formação do tecido ósseo.

Nos primeiros testes foi avaliado o impacto no valor de convergência do modelo quando o penalizador SIMP é ativado. Como parâmetros foram considerados: número total de iterações = 80, número de iterações não penalizadas (SIMP não-ativo) = 20, o coeficiente penalizador SIMP p_n foi considerado como uma variável contínua no domínio $\{0,4\}$, o valor da densidade mínima para evitar degeneração numérica do método foi de $x_{min} = 10^{-3}$, o valor do parâmetro que impõe a redução de material foi fixado em $f = 50\%$.

Os resultados obtidos para cada fase da vida óssea estão na Figura 3, cada linha corresponde as malhas avaliadas. Em cada célula são apresentados: a geometria final obtida, o valor da função objetivo c (flexibilidade da estrutura) e o tempo total para o processamento do exemplar Δt expresso em segundos.

Figura 2 - Viga engastada com carregamento frontal



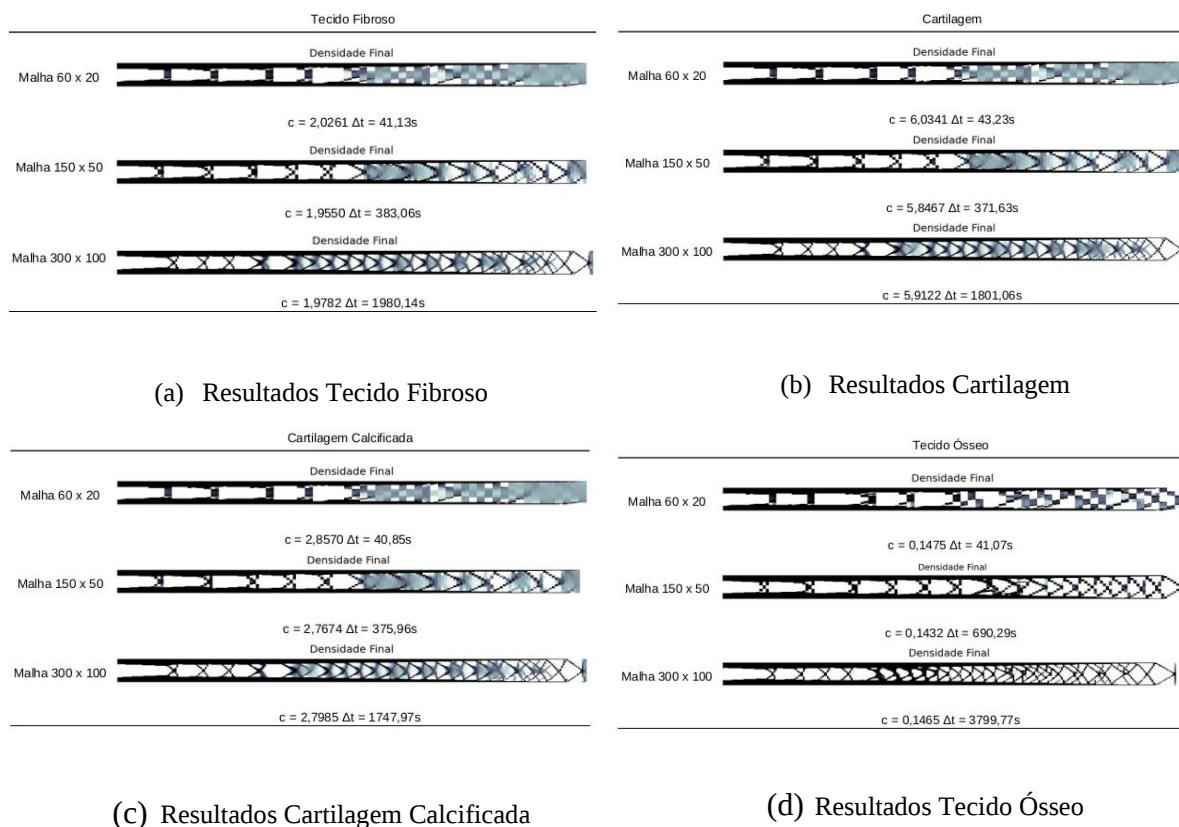
Fonte: Autores (2023)

A Figura 3 mostra que as densidades intermediárias prejudicam o desempenho do método quando não é usado o filtro de densidades. Como o modelo possui duas parcelas na sua função objetivo (2.14), é possível visualizar em uma mesma imagem a redução de volume e os deslocamentos sofridos pela estrutura. Do ponto de vista da fabricação via AM estes resultados são inadequados, logo, outros processamentos foram realizados aplicando o filtro de *Helmholz* alterando o critério de parada para 2000 iterações. Os parâmetros adicionais necessários são o valor do raio do filtro igual a $r = 1,5$, selecionado como *benchmark* do trabalho de Andreassen et al. (2011), e a restrição de volume fixada em 50%.

A Figura 5 mostra os resultados com a aplicação do filtro de *Helmholz*, com a exceção das malhas de 60 x 20 elementos, onde as densidades intermediárias ainda possuem grande abrangência, a viabilidade de fabricação via AM se torna viável embora em todos os exemplares a extremidade direita precisaria ser rebarbada caso o exemplar fosse impresso via AM, apontando alguma ineficiência do método. Em todos os casos mais material se concentrou na metade esquerda junto a extremidade engastada.

Os valores das funções objetivo são função das propriedades mecânicas e assim, novamente a fase de vida tecido ósseo obteve os melhores resultados, atingindo os valores de {0,0787; 0,0772; 0,0075}, e os piores para a fase de vida óssea cartilagem com os valores de {3,1853; 3,1172; 3,1615}.

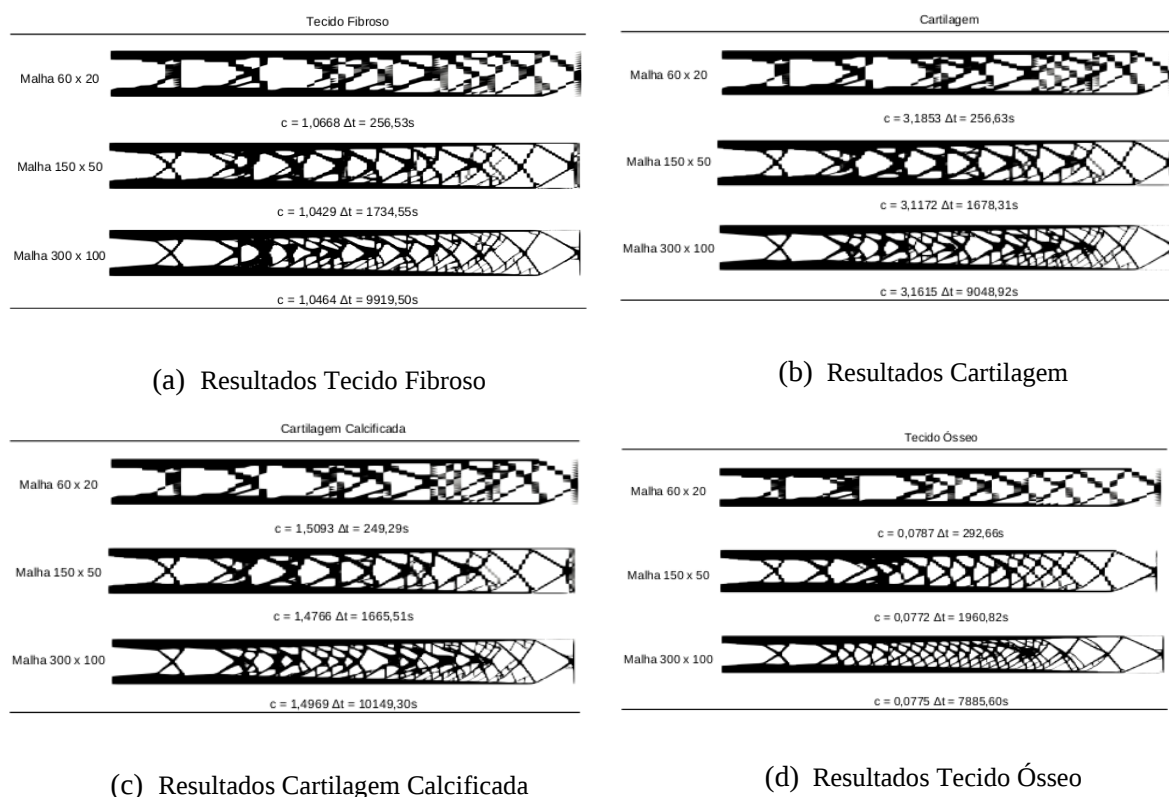
Figura 3 – Resultados computacionais da heurística Minimização Alternada



Fonte: Autores (2023)

O custo computacional mostra um esperado aumento uma vez que mais iterações serão necessárias até determinar a solução, porém há ganho na obtenção da geometria e redução do valor da flexibilidade. O menor tempo foi alcançado no processamento do exemplar da fase de vida Cartilagem Calcificada com a malha 60 x 20 elementos, obtendo o valor de 249,29 segundos. Já o maior tempo computacional também foi obtido pela mesma fase de vida óssea, no processamento da malha de 300 x 100 elementos, obtendo o valor de 10149,3 segundos.

Figura 5 – Resultados computacionais da heurística Minimização Alternada com filtro de Helmholtz



Fonte: Autores (2023)

Na Tabela 2 são mostradas a evolução dos resultados antes (coluna 2 da tabela) e depois (coluna 3 da tabela) da aplicação do filtro, as porcentagens de redução do valor da função objetivo e a porcentagem de piora no tempo computacional, que pode ser entendido como o custo computacional pago para aquele nível de solução para cada malha indicada na primeira coluna da tabela. Na quarta coluna da tabela é apresentado o percentual de redução no valor da função objetivo, que foi calculado da seguinte forma: $\frac{c_{semfiltro}}{c_{comfiltro}}$ onde c representa os valores das funções objetivo, com e sem o filtro de *Helmholtz*, respectivamente. Na quinta e sexta coluna, respectivamente, são apresentados os tempos computacionais gastos nos processamentos dos exemplares, sem e com o filtro. Na sétima coluna é apresentada a porcentagem de piora no tempo computacional dedicado para a resolução do exemplar, que foi calculado da seguinte forma: $\frac{\Delta t_{semfiltro}}{\Delta t_{comfiltro}}$.

A média simples de todos os valores da coluna % redução da Tabela 2 mostra que o valor da função objetivo foi reduzido em 240,26%. Os valores das fases Tecido Ósseo, Cartilagem e Tecido Fibroso, ficaram na média de 188,04% de redução. Como a fase de vida Cartilagem

Calcificada obteve valores muito discrepantes, a sua análise foi tratada de maneira separada. Com isso, a média do valor de redução no valor da função objetivo nesta fase foi de 396,90%.

O esforço computacional mostra para a Malha 60 x 20 elementos uma piora de 626,65%, destacando a fase Tecido Ósseo com o maior percentual 712,59% e a fase Cartilagem Calcificada com o menor percentual 576,66%. Analisando a Malha 150 x 50 elementos o custo computacional registrou aumento de em média 409,16%, destacando a fase Tecido Fibroso com 452,81% (maior valor) e a fase Tecido Ósseo (menor valor). Por fim, analisando os valores da Malha de 300 x 100 elementos se observam uma piora média de 443,60%, com destaque para a fase de vida Cartilagem Calcificada com 563,52% (maior valor) e a fase de vida Tecido Ósseo com 207,53% (menor valor).

Tabela 2 – Análise dos resultados do filtro de *Helmholtz*

Análise dos impactos da utilização do filtro de <i>Helmholtz</i>						
Tecido Ósseo						
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	0,1475	0,0787	187,42%	41,07	292,66	712,59%
Malha 150 x 50	0,1432	0,0772	185,49%	690,29	1960,82	284,06%
Malha 300 x 100	0,1465	0,0775	189,03%	3799,77	7885,6	207,53%
Cartilagem						
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	6,0341	3,1853	189,44%	43,23	256,63	593,64%
Malha 150 x 50	5,8467	3,1172	187,56%	371,63	1678,31	451,61%
Malha 300 x 100	5,9122	3,1615	187,01%	1801,06	9048,92	502,42%
Cartilagem Calcificada						
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	6,0341	1,5093	399,79%	43,23	249,29	576,66%
Malha 150 x 50	5,8467	1,4766	395,96%	371,63	1665,51	448,16%
Malha 300 x 100	5,9122	1,4969	394,96%	1801,06	10149,3	563,52%
Tecido Fibroso						
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	2,0261	1,0668	189,92%	41,13	256,53	623,71%
Malha 150 x 50	1,955	1,0429	187,46%	383,06	1734,55	452,81%
Malha 300 x 100	1,9782	1,0464	189,05%	1980,14	9919,5	500,95%

Fonte: Autores (2023)

5. Conclusões

Nos testes computacionais, quando somente a heurística Minimização Alternada foi avaliada, os resultados obtidos não foram satisfatórios devido: (i) a relaxação da restrição de volume e (ii) todas as simplificações necessárias para implementação do método em relação ao método da Homogeneização, conforme sugerido em Allaire e Schoenaue (2007). Um ponto que merece destaque é a formulação da função objetivo avaliada nestes testes computacionais. Como ela possui duas parcelas, minimizando a flexibilidade e o volume, respectivamente, foi possível observar em uma só topologia os deslocamentos sofridos pela estrutura e redirecionamento do material para áreas mais solicitadas pelo carregamento imposto. Um ponto negativo que deve ser evidenciado são as pseudo-densidades geradas pelo relaxamento da variável de decisão ($\bar{x}_e$) que afetaram a maioria dos exemplares avaliados, com exceção da fase de vida Tecido Ósseo com malha de 300 x 100 elementos. Devido a proporção elevada de regiões das topologias possuindo pseudo-densidades, inviabilizando o processo de manufatura, o filtro de *Helmholtz* foi empregado, gerando resultados satisfatórios do ponto de vista de viabilidade de manufatura. Em um contexto real ainda deveríamos considerar (i) aplicação da Homogeneização em Meios Porosos e (ii) inserção na modelagem das equações *Navier-Stokes* para contemplar a maximização da permeabilidade dos modelos.

REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G.; SCHOENAUE, M. **Conception optimale de structures**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg New York, 2007. ISBN ISBN-13: 978-3-540-36710-9.
- ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. **Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code**. Struct Multidisc Optim, v. 1, n. 43, p. 1--16, 2011.
- BARTOLO, P.; KRUTH, J.; SILVA, J.; LEVY, G.; MALSHE, A.; RAJURKAR, K.; MITSUISHI, M.; CIURANA, J.; LEU, M. **Biomedical production of implants by additive electro-chemical and physical processes**. CIRP Annals, v. 61, n. 2, p. 635 - 655, 2012. ISSN 0007-8506. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850612002041>><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850612002041>.
- BENDSØE, B. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. 2ªed.. ed. [S.l.]: Springer, 2003. ISBN 978-3-642-07698-5.



BLEYER, J. **Numerical Tours of Computational Mechanics with FEniCS**. [S.l.], 2018.

GORRIZ, C. I. A. V. **Computational Modeling of the Biodegradation Process in a Scaffold for Tissue Engineering**. Universidade Técnica de Lisboa, Dissertation, 2014.

LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. **Filters in topology optimization based on Helmholtz type differential equations**. Numerical Methods in Engineering, v. 86, p. 765–781, 2010.

MONTAZERIAN, H.; DAVOODI, E.; ASADI-EYDIVAND, M.; KADKHODAPOUR, J.; SOLATI-HASHJIN, M. **Porous scaffold internal architecture design based on minimal surfaces: A compromise between permeability and elastic properties**. Materials Design, v. 126, p. 98 -- 114, 2017. ISSN 0264-1275. Disponível em:
<[http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-S0264127517303593](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264127517303593)>

NOYAMA, Y.; MIURA, T.; ISHIMOTO, T.; ITAYA, T.; NIINOMI, M.; NAKANO, T. **Bone loss and reduced bone quality of the human femur after total hip arthroplasty under stress-shielding effects by titanium-based implant**. MATERIALS TRANSACTIONS, v. 53, n. 3, p. 565--570, 2012.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K. **Fundamentals of Signal for Sound and Vibration Engineers**. 1ªed. ed. [S.l.]: John Wiley Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0470-51188-6.

SILVA, A. L. F. **Otimização Topológica de Estruturas de Pórtico Laminado Considerando Orientação de Fibra e Regime Linear**. Universidade de São Paulo, Dissertation, 2020.

SILVA, G. A. **Otimização topológica considerando incertezas com critério de falha em tensão**. Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo, Thesys, 2019.

WANG, X.; XU, S.; ZHOU, S.; XU, W.; LEARY, M.; CHOONG, P.; QIAN, M.; BRANDT, M.; XIE, Y. M. **Topological design and additive manufacturing of porous metals for bone scaffolds and orthopedic implants: A review**. Biomaterials, v. 83, p. 127 -- 141, 2016. ISSN 0142-9612. Disponível em:
<[http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-S0142961216000144](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142961216000144)>