



## ESTIMATIVA DO FLUXO DE CALOR EM PLACAS PARALELAS COM ESCOAMENTO LAMINAR VIA INFERÊNCIA BAYESIANA

Marcos Gabriel Quenup Carvalho<sup>1</sup> - mgqc.carvalho@gmail.com

Luiz Alberto da Silva Abreu<sup>1</sup> - luiz.abreu@iprj.uerj.br

Diego Campus Knupp<sup>1</sup> - diegoknupp@iprj.uerj.br

Caroline Ribeiro Pereira<sup>1</sup> - rpereiracaroline@iprj.uerj.br

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brasil

**Resumo.** O presente trabalho tem como objetivo a estimativa do fluxo de calor de contorno com variação espacial em um problema de escoamento laminar em placas paralelas. O problema direto, resolvido através de uma rotina implementada no Wolfram Mathematica e do método de diferenças finitas, envolve o aquecimento de uma das placas através de um fluxo de calor, tendo como interesse o comportamento da temperatura através do escoamento. O problema inverso foi resolvido com o Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov dentro de uma abordagem Bayesiana, implementado através do algoritmo de Metropolis-Hastings. A solução inversa consistiu na estimativa do fluxo de calor com variação espacial, sendo conhecidas as medidas de temperatura. A técnica foi capaz de estimar as funções do fluxo de calor, em dois exemplos, a partir de medições simuladas de temperatura.

**Palavras-chave:** Problema Inverso, Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), Convecção, Fluxo de calor de Contorno

### 1. INTRODUÇÃO

A análise dos problemas inversos em transferência de calor dá-se geralmente através da determinação de propriedades ou funções por meio de medições de temperatura ou fluxo de calor. Tipicamente trata-se da estimativa de propriedades físicas, geométricas ou de contorno que aparecem nas equações de advecção-difusão de calor. Esse tipo de abordagem é amplamente utilizado para a solução de problemas em diversas áreas, desde problemas de condução, convecção e radiação (Orlande et al., 2011; Orlande, 2012; Özisik & Orlande, 2021).

Diversos artigos envolvendo a solução desse tipo de problema apareceram na literatura, sendo que a maioria envolve a convecção forçada dentro de tubos ou canais com calor de parede desconhecido (Huang & Özisik, 1992; Colaço & Orlande, 2001), ou condições de entrada desconhecidas (Liu & Özisik, 1996). Grande parte desses artigos estuda casos de convecção forçada, porém, existem também trabalhos onde se considera convecção natural, como é o

caso do trabalho de Colaço & Orlande (2004), onde os autores estimaram o fluxo de calor em cavidades de formato irregular.

Recentemente, muitos trabalhos tem utilizado abordagem Bayesiana na solução de problemas inversos, especialmente em problemas de condução de calor ou biotransferência de calor. Majoritariamente nos problemas envolvendo convecção, a inferência Bayesiana tem sido aplicada apenas na estimativa de parâmetros. Neste trabalho, entretanto, será usado o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov para solucionar o problema inverso de convecção forçada e, com isso, determinar o fluxo de calor de parede com variação espacial para um escoamento laminar dentro de um duto de placas paralelas. Desta forma, propõe-se neste trabalho, aplicar o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) na estimativa de uma função espacial do fluxo de calor de contorno, em um problema de escoamento.

## 2. PROBLEMA DIRETO

Neste trabalho será considerado um problema de convecção forçada em um escoamento laminar entre placas paralelas hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento. Considera-se ainda que o fluxo de calor seja conhecido e igual a  $q(x)$  em  $y = L$  e zero (0) em  $y = 0$  e que o perfil de temperatura de entrada do fluido no tubo seja  $T_0$  (Incropera et al., 2014; Huang & Özisik, 1992). A Fig. 1 representa esquematicamente o problema em questão.

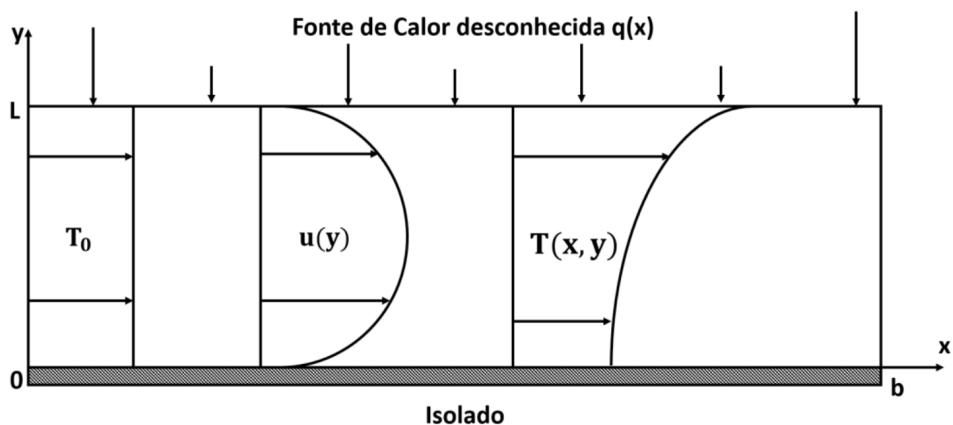


Figura 1- Figura esquematizada do problema físico.

Assumindo ainda que as propriedades físicas são constantes, a dissipação viscosa, convecção livre e efeitos de condução axial desprezíveis, a formulação matemática para este problema de convecção forçada em estado estacionário é dada por (Huang & Özisik, 1992):

$$k \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = u(y) \rho C_p \frac{\partial T(x, y)}{\partial x}, \quad \text{para } 0 < y < L \text{ e } 0 < x < b \quad (1)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \text{para } y = 0 \quad (2)$$

$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = q(x), \quad \text{para } y = L \quad (3)$$

$$T(x, y) = T_0, \quad \text{para } x = 0 \quad (4)$$

onde  $q(x)$  é o fluxo de calor,  $k$  a condutividade térmica,  $C_p$  o calor específico,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $T_0$  é a temperatura de entrada do fluido. O perfil de velocidades  $u(y)$  é dado por (Huang & Özisik, 1992):

$$u(y) = 6u_m \frac{y}{L} \left(1 - \frac{y}{L}\right), \quad (5)$$

onde  $u_m$  é a velocidade média.

Neste caso, o problema representado pelas equações acima, será obtido com o Método de Diferenças Finitas explícito. Cada termo diferencial da Eq. (1) será aproximado por expansões em séries de Taylor, convertendo-a, assim, em um sistema de equações algébricas. Utilizando aproximações de segunda ordem para  $y$  e de primeira ordem para  $x$ , são realizadas as discretizações indicadas pelas Eqs. (6) e (7) (Pletcher, Tannehill & Anderson; Chapra & Canale, 2016).

$$\left. \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right|_j^i \approx \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2}, \quad (6)$$

e

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_j^i \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}, \quad (7)$$

onde  $i$  é referente a um ponto discreto de  $x$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, N_x$ , e  $j$  é um ponto discreto de  $y$ , com  $j = 1, 2, 3, \dots, N_y$ , sendo  $N_x$  e  $N_y$  o número de divisões em  $x$  e  $y$ , respectivamente. Substituindo as Eqs. (6) e (7) na Eq. (1), obtém-se a equação discretizada explicitamente, que, isolando os termos com  $i + 1$  é dada por:

$$T_{i+1,j} = \frac{k\Delta x}{U_{1,j}\rho C_p \Delta y^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}), \quad (8)$$

com as condições de contorno

$$T_{i,1} = T_{i,2}, \quad \text{para } i > 1 \quad (9)$$

$$T_{i,N_y} = T_{i,j} + q_{d_{i+1,N_y}} \frac{2\Delta y}{k}, \quad \text{para } i > 1 \quad (10)$$

e

$$T_{1,j} = T_0. \quad \text{para todo } j \text{ e } i = 1 \quad (11)$$

Nas Eqs. 8 a 11,  $q_d$  é o fluxo de calor discreto e  $U$  é a velocidade discreta. Como se trata de uma aproximação explícita, a condição de estabilidade é dada por (Pletcher, Tannehill & Anderson; Chapra & Canale, 2016):

$$\Delta x \leq \frac{U_{1,j}\rho C_p}{2k} \Delta y^2. \quad (12)$$

A partir das Eqs. (8) a (11), obtém-se os valores de temperatura em cada ponto. Em seguida, são acrescentados ruídos aleatórios a esses valores de forma a simular as medidas experimentais de temperatura que serão empregadas na estimativa do fluxo de calor. Para evitar o crime inverso, na solução do problema inverso, a solução das equações diferenciais parciais dadas pelas Eqs. (1) a (4) foram obtidas utilizando a rotina `NDSolve`, escolhendo como método de solução o método dos elementos finitos.

### 3. PROBLEMA INVERSO

Para a solução do problema inverso proposto foi considerado a utilização do método de Inferência Bayesiana de Monte Carlo via Cadeia de Markov. A Inferência Bayesiana é um método de inferência estatística que consiste na utilização de toda a informação disponível a priori no intuito de reduzir a incerteza em problemas de tomada de decisão. O Teorema de Bayes pode ser descrito como (Orlande et al., 2011; Orlande, 2012; Castello & Ritto, 2016; Özisik & Orlande, 2021):

$$\pi_{posterior}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{prior}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})}, \quad (13)$$

onde  $\mathbf{P}$  representa os parâmetros do problema,  $\mathbf{Y}$  contém as temperaturas medidas experimentalmente,  $\pi_{posterior}(\mathbf{P})$  é densidade posterior de probabilidade,  $\pi_{prior}(\mathbf{P})$  é a densidade de probabilidade a priori dos parâmetros e  $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$  é a função de verossimilhança. O denominador  $\pi(\mathbf{Y})$  é a densidade de probabilidade marginal das medições que desempenha o papel de uma constante de normalização (Orlande et al., 2011; Orlande, 2012; Castello & Ritto, 2016; Özisik & Orlande, 2021).

Considerando os erros de medição como sendo variáveis aleatórias gaussianas, com média zero e matriz de covariância, aditivas e independentes dos parâmetros  $\mathbf{P}$ , a função de verossimilhança pode ser representada por (Orlande et al., 2011; Orlande, 2012; Özisik & Orlande, 2021):

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-(I/2)} \mathbf{W}^{-(1/2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] \right\}. \quad (14)$$

A informação a priori utilizada foi a Gaussiana, cujo modelo é dado por:

$$\pi_{prior}(\mathbf{P}) = (2\pi)^{-(N/2)} \mathbf{V}^{-(1/2)} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{prior})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{prior}) \right]. \quad (15)$$

O algoritmo MCMC utilizado foi o Metropolis-Hastings cuja implementação se inicia com a seleção de uma distribuição  $q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$  que é usada para gerar um novo candidato  $\mathbf{P}^*$  dado o estado atual  $\mathbf{P}^{(t-1)}$  da cadeia de Markov. O algoritmo de Metropolis-Hastings é implementado a partir da repetição dos seguintes passos (Orlande et al., 2011):

1. Selecione um candidato  $\mathbf{P}^*$  da distribuição de movimentação  $q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$ ;
2. Calcule:

$$\beta = \min \left[ 1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y})q(\mathbf{P}^{(t-1)}, \mathbf{P}^*)}{\pi(\mathbf{P}^{(t-1)}|\mathbf{Y})q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})} \right]; \quad (16)$$

3. Gere um número aleatório  $U$  com distribuição uniforme em  $(0, 1)$ ;
4. Se  $U \leq \beta$ , definir  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^*$ ; Caso contrário, definir  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{(t-1)}$ ;
5. Retorne ao passo 1 para gerar a sequência  $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots, \mathbf{P}^n]$ .

Métodos de solução como o MCMC tem como principal vantagem a possibilidade de utilizar informações a priori sobre os parâmetros e funções a serem estimados e principalmente levam em conta, de forma natural, a análise de incertezas inerentes às soluções obtidas. Assim, no método MCMC, obtém-se amostras da distribuição a posteriori de tal forma que a análise sob incerteza pode ser realizada naturalmente (Orlande et al., 2011; Özisik & Orlande, 2021). Além do MCMC, informações a priori podem ser utilizadas em outras metodologias, como no método MAP (*maximum a posteriori probability*), mas que apenas geram soluções pontuais da posteriori e não amostrar estatísticas da mesma (Özisik & Orlande, 2021).

## 4. RESULTADOS

Considera-se que o fluido entra no duto em  $x = 0$  com uma temperatura uniforme  $T_0$ . Em  $x > 0$ , a parede superior do duto é sujeita a um fluxo de calor  $q(x)$  desconhecido enquanto a parede inferior está isolada, como está ilustrado na Fig. 1. Foram considerados dois exemplos: no primeiro uma variação espacial senoidal do fluxo de calor e no segundo uma variação espacial triangular do fluxo de calor. Para todos os casos foi considerado a simulação de medições de temperatura por meio da adição de ruídos, supostamente gaussianos com média zero e desvio padrão conhecidos na solução obtida dos problemas diretos. Esta abordagem tipicamente é utilizada para verificação do problema inverso, uma vez que os ruídos experimentais supostos são controlados e o perfil exato é conhecido e, portanto, os resultados no problema inverso podem ser avaliados em relação a estes perfis.

### 4.1 Exemplo 1

O fluido com temperatura  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  escoa entre duas placas paralelas com comprimento  $b = 1,6\text{ m}$  e as paredes separadas por uma distância  $L = 0,01\text{ m}$ . Os sensores estão localizados na posição  $y_1 = 0,009\text{ m}$ . A variação espacial do fluxo de calor em  $\text{W/m}^2$  é dada pela Eq. (17), representando uma variação senoidal.

$$q(x) = 7000 + 3000 \sin\left(\frac{2,5x}{1,6}\pi\right). \quad (17)$$

Para solucionar o problema direto com diferenças finitas explícito, foi considerado um incremento espacial  $\Delta x = 2,0 \times 10^{-4}\text{ m}$  e  $\Delta y = 1,2 \times 10^{-4}\text{ m}$ , atendendo a condição de estabilidade do método selecionado. As propriedades do fluido são dadas com  $\rho = 840\text{ kg/m}^3$ ,  $k = 0,137\text{ W/(mK)}$  e  $C_p = 2200\text{ J/(kgK)}$ . Um nível de ruído aleatório com desvio padrão  $\sigma = 0,5$  foi adicionado a temperatura exata obtida na solução do problema inverso para simular a temperatura medidas, através de uma Distribuição Normal, com média zero e desvio padrão  $\sigma$ .

Já para a solução do problema inverso foram utilizados dois casos, variando o número de sensores entre eles, sendo o primeiro caso com o distanciamento entre os sensores de 10 cm ( $\Delta x_s = 0,1$ ), enquanto no outro foi considerado o distanciamento de 1 cm ( $\Delta x_s = 0,01$ ). Em ambos os casos foi considerado uma estimativa inicial de  $1000\text{ W/m}^2$  e uma distribuição

uniforme para a geração de candidatos com média zero e desvio padrão  $\sigma_c = 50 \text{ W/m}^2$ . A priori gaussiana, para o Exemplo 1, foi considerada com média  $7000 \text{ W/m}^2$  e desvio padrão  $\sigma_p = 500 \text{ W/m}^2$  para ambas quantidades de sensores.

Assim, sendo solucionado o problema, foi comparado o desenvolvimento e convergência das cadeias de Markov geradas em  $x = 0,5 \text{ m}$ , conforme a Fig. 2, considerando os seguintes estados para a convergência da cadeia de Markov: 8000 estados para  $\Delta x_s = 0,1$ , e 10000 estados para  $\Delta x_s = 0,01$ . É possível observar que no maior número de sensores ocorre oscilações maiores, com médias de  $8715,78 \text{ W/m}^2$  e desvio padrão  $483,11 \text{ W/m}^2$ , do que o caso com o número menor de sensores, apresentando média de  $9034,71 \text{ W/m}^2$  com desvio padrão  $341,00 \text{ W/m}^2$ . A Fig. 3 mostra o comportamento do fluxo de calor estimado, fluxo de calor exato e da média da priori gaussiana ao longo do eixo  $x$ , considerando os estados de aquecimento citados acima. Importante notar, que a distribuição a priori, embora seja gaussiana, é considerada uma priori vaga, já que o valor do desvio padrão considerado é muito alto. Além disso, a média desta priori está fixada em um valor constante, e desta forma permite que o perfil a ser estimado possa ser recuperado. Outras priores podem ainda ser testadas futuramente.

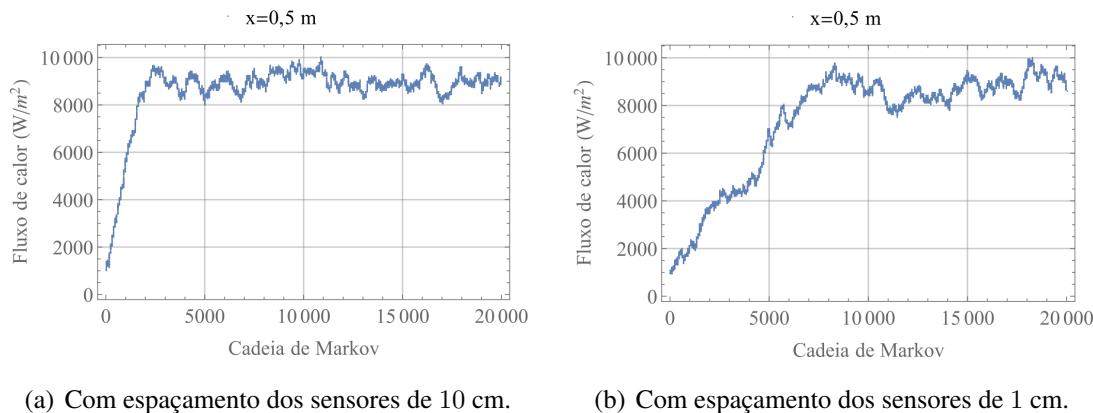


Figura 2- Desenvolvimento da Cadeia de Markov em  $x = 0,5 \text{ m}$  no Exemplo 1.

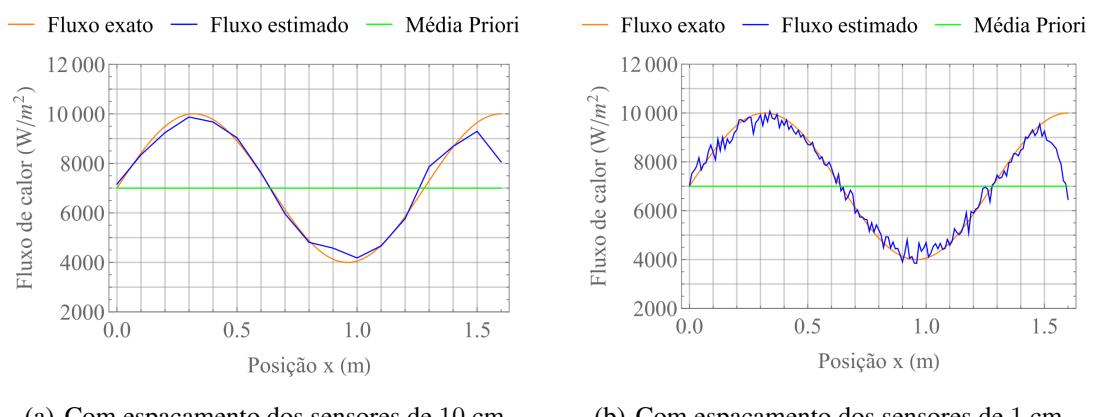


Figura 3- Fluxo de Calor estimado do Exemplo 1.

## 4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo, utiliza uma variação triangular do fluxo de calor com variação espacial, dada pela Eq. (18). Este exemplo, do ponto de vista do problema inverso é considerado mais

desafiador por não ser uma função suavizada.

$$q(x) = \begin{cases} 3000 + 8750x & \text{se } 0 \leq x \leq b/2 \\ 10000 - 8750(x - 0,8) & \text{se } b/2 \leq x \leq b \end{cases} \quad (18)$$

O problema direto foi solucionado de acordo com as especificações mencionadas no Exemplo 1. O problema inverso foi solucionado utilizando os mesmos casos propostos no primeiro exemplo, utilizando a mesma estimativa inicial e distribuição para geração de candidatos. Foi utilizada uma distribuição a priori pouco informativa, gaussiana, com a média de  $6500 \text{ W/m}^2$  e com desvio padrão de  $500 \text{ W/m}^2$ . É importante notar que a mesma condição inicial e a mesma densidade de probabilidade a priori permitiram a estimativa dos dois perfis de fluxo de calor, mesmo sendo informações a priori vagas cujo e que não impõem portanto a forma funcional do fluxo de calor, mas apenas consideram a ordem de grandeza aproximada do mesmo, o que mostra que o método aplicado é robusto na estimativa de diferentes perfis e o uso desta priori permite regularização suficientemente para obtenção dos diferentes perfis de fluxo de calor estudados.

A Fig. 4 mostra o desenvolvimento da cadeia de Markov em  $x = 0,3 \text{ m}$ , onde é possível observar que no caso contendo maior número de sensores ( $\Delta x_s = 0,01$ ) a cadeia de Markov converge mais tarde e possui maiores oscilações quando comparadas ao caso de menor número de sensores ( $\Delta x_s = 0,1$ ). A Fig. 5 mostra uma comparação entre os fluxos estimados, fluxo exato e a média da priori gaussiana para os casos de menor e maior número de sensores, respectivamente.

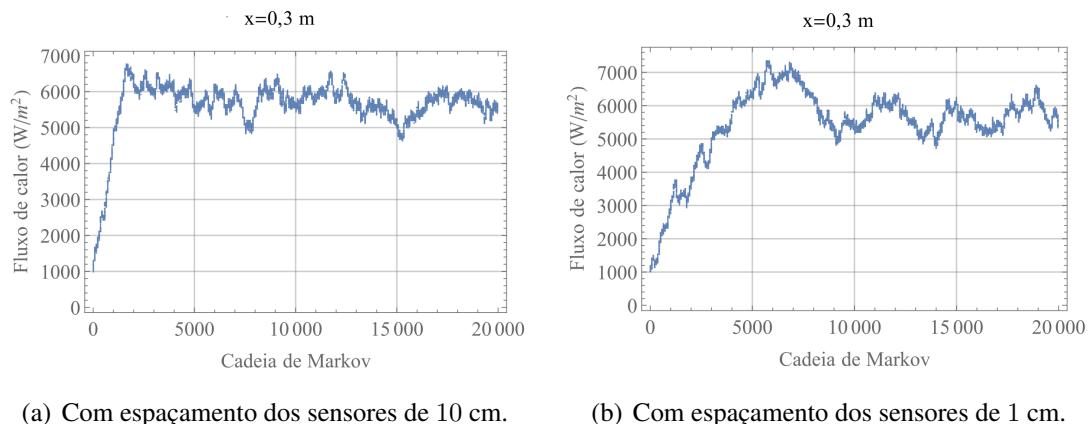


Figura 4- Desenvolvimento da Cadeia de Markov em  $x = 0,3 \text{ m}$  no Exemplo 2.

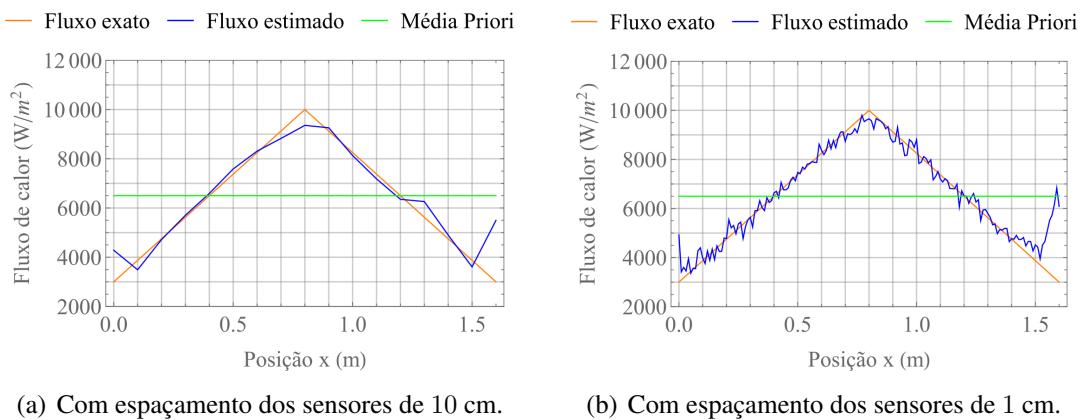


Figura 5- Fluxo de Calor estimado do Exemplo 2.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi aplicado do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov utilizando o algoritmo de Metropolis-Hasting para a solução a estimativa do fluxo de calor em um problema de escoamento em placas paralelas. Dois diferentes perfis para o fluxo de calor com variação foram examinados, um senoidal e o outro triangular, bem como dois diferentes números de sensores. Os resultados obtidos através da simulação da temperatura, permitiram a estimativa de funções que representam bem os respectivos fluxos de calor. Foi possível observar ainda que para maiores números de parâmetros a serem estimados, na decomposição da função a ser estimada, haverá maiores oscilações nas cadeias de Markov.

### Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

O presente trabalho também foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

## REFERÊNCIAS

- Castello, D.A. e Ritto, T.G. (2016), “*Quantificação de incertezas e estimação de parâmetros em dinâmica estrutural: uma introdução a partir de exemplos computacionais*”, vol. 81, Notas em Matemática Aplicada SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos (SP).
- Chapra, S.C. e Canale, R.P. (2016), “*Métodos Numéricos para Engenharia.*”, 7º ed., McGraw Hill Brasil.
- Colaço, M.J. e Orlande, H.R.B. (2001), Inverse forced convection problem of simultaneous estimation of two boundary heat fluxes in irregularly shaped channels, *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, 39, n.7, 737-760.
- Colaço, M.J. e Orlande, H.R.B. (2004), Inverse natural convection problem of simultaneous estimation of two boundary heat fluxes in irregular cavities, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 1201-1215.
- Huang, C.H. e Ozisik, M.N. (1992), Inverse problem of determining the unknown strength of an internal plane heat source, *Journal of the Franklin Institute*, 329, n.4, 751–764.
- Incropera, F.P. et al. (2014), “*Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.*”, 7º ed., LTC Editora.

- Liu, F.B. e Özisik, M.N. (1996), Estimation of inlet temperature profile in laminar duct flow, *Inverse Problems in Engineering*, 3, n.1-3, 131-143.
- Orlande H.R.B. et al. (2011), “*Problemas inversos em transferência de calor*”, vol. 51, Notas em Matemática Aplicada SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos (SP).
- Orlande, H.R.B. (2012), Inverse problems in heat transfer: New trends on solution methodologies and applications, *Journal of Heat Transfer*, 134, n.3.
- Özisik, M.N. e Orlande, H.R.B. (2021), “*Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*”, 2º ed., CRC Press, Boca Raton.
- Pletcher, R.H., Tannehill, J.C. e Anderson, D. (2013). “*Computational fluid mechanics and heat transfer*”, 3º ed., CRC press.

## HEAT FLOW ESTIMATION IN PARALLEL PLATES WITH LAMINAR FLOW VIA BAYESIAN INFERENCE

**Abstract.** The present work aims to estimate the boundary heat flux with spatial variation in a laminar flow problem in parallel plates. The direct problem, solved through a routine implemented in Wolfram Mathematica and the finite difference method, involves heating one of the plates through a heat flux, having as interest the temperature behavior through the flow. The inverse problem was solved with the Monte Carlo Method via Markov Chain within a Bayesian approach, implemented through the Metropolis-Hastings algorithm. The inverse solution estimated the heat flux with spatial variation, with the temperature measurements being known. In two examples, the technique could estimate the heat flux functions from simulated temperature measurements.

**Keywords:** Inverse Problem, Markov chain Monte Carlo (MCMC), Convection, Contour Heat Flow