AS LEIS DE KEPLER: UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO DEDUÇÕES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES NO GEOGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

Josué Coelho de Freitas[1]

[1]*Universidade Federal do Amapá, Macapá, Brasil (josue.coelho.freitas@hotmail.com)*

Resumo: O presente trabalho aborda o conhecimento da Matemática utilizado pelo alemão astrônomo e matemático Johannes Kepler, que serviram de base para o seu estudo astronômico, ao fundamentar suas leis universais no século XVII, e tendo esse trabalho o objetivo de oferecer ao aluno do ensino médio uma proposta inovadora que contempla o estudo algébrico e geométrico dessas leis, através de suas deduções matemáticas, com o auxílio do conhecimento da Física, bem como a utilização do software matemático gratuito GeoGebra, servindo como ferramenta facilitadora da aprendizagem desse conteúdo na Física. São simulações ilustrativas que o GeoGebra nos auxilia para desenvolver tanto a álgebra quanto a geometria nas três leis de Kepler. E para garantir o sucesso dessa atividade é necessário que a escola disponha de um laboratório de informática educativa (LIED) para que o professor venha desenvolver com os alunos, tanto a manipulação do software matemático quanto o desenvolvimento do lúdico no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Leis de Kepler, GeoGebra, Física, Matemática, aluno.

INTRODUÇÃO

A necessidade dessa proposta metodológica parte da dificuldade encontrada pelos alunos do ensino médio, ao assimilar o estudo das cônicas em Geometria Analítica, e consequentemente, na Física, quando eles se deparam com as leis da mecânica celeste imposta por Johannes Kepler, onde as cônicas servem de base para a análise dedutiva dessas leis.

Dessa forma, apresentamos como iniciativa didática, nas aulas de Matemática e Física, uma ferramenta que possa auxiliar na compreensão e entendimento desse tópico matemático – o GeoGebra.

O Geogebra é um software matemático gratuito que nos possibilita de realizar uma infinidade de construções geométricas com auxílios de pontos, retas, polígonos, dentre outros, além de expor em uma mesma interface o dinamismo da figura geométrica em 2D ou 3D, bem como a leitura algébrica de um mesmo problema matemático.

Ao darmos destaque ao estudo Kepler no século XVII, levamos o aluno a compreender que, através de suas bases matemáticas e astronômicas, Kepler provocou uma revolução científica na história da Astronomia, devido ao rompimento com o sistema geocêntrico de Cláudio Ptolomeu, que antes era defendido pela sociedade cientifica e pela Igreja. Suas leis são aceitas até hoje na Astronomia e servem de suporte para calcular o período e o raio da órbita de um corpo celeste, mesmo que ele nao faça parte do nosso Sistema Solar.

MATERIAL E MÉTODOS

No estudo das leis astronômicas verifica-se a importância de utilizar uma dedução clara e compreensível, que alcance o entendimento do aluno do ensino médio.

O método dedutivo está pautado nos conhecimentos da geometria e da álgebra, possibilitando ao aluno de comprovar os cálculos e ao mesmo tempo simular situações-problema, através do software de matemática dinâmica, GeoGebra.

A metodologia que o professor pode disponibilizar para os alunos, deve partir de um laboratório de informática educativa (LIED), afim de que os alunos participem de minicursos para poder se familiarizar com o software matemático que, além de sua instalação ser de fácil acesso, é gratuito.

Mas para que os resultados sejam satisfatórios, é necessário que o conheça os conceitos e fórmulas que regem o assunto abordado para posteriormente testá-los nos simuladores criados no GeoGebra.

1. AS LEIS DE KEPLER

O astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630) tornou-se discípulo do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe para corroborar às suas teorias científicas, no que diz respeito ao sistema heliocêntrico defendido pelo astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico no século

XVI. E ao estudar a órbita de Marte por cerca de trinta anos, pôde elaborar as três leis da mecânica celeste. São elas: Primeira Lei (Lei das Órbitas), Segunda Lei (Lei das Áreas) e Terceira Lei (Lei dos Períodos).

1.1. Primeira Lei de Kepler

Os anos de 1608 e 1609 foram importantes para Kepler estudar a distância entre o Sol e Marte e passar chegar a concluir que órbita de Marte deveria ser uma elipse. Então ele se baseia nas cônicas do matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga do século II a.C, servindo de alicerce para Kepler explicar as órbitas dos corpos celestes. E depois de várias tentativas errôneas, ele parte de um estudo trigonométrico, conforme a figura a seguir, para desenvolver a 1ª lei, conhecida por Lei das Órbitas.

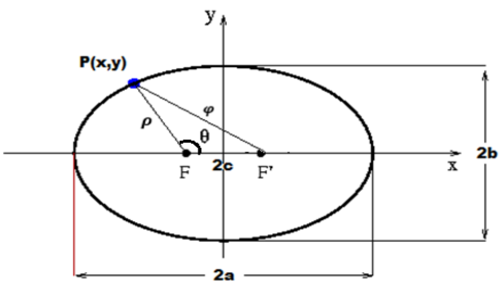

Figura 1. Distância entre P e F' na elipse.

Kepler, então, deduz a equação polar das cônicas, através do estudo de uma elipse, para a determinação do raio vetor (ρ). Sabendo-se que a elipse é um conjunto de pontos equidistantes de dois focos F (lugar geométrico do Sol) e F' separados pela distância focal $2.c$, onde a é o semieixo maior e e é a excentricidade $\left(e = \frac{c}{a}\right)$. Ele adota um ponto qualquer P(x,y) na elipse, onde se encontra neste instante um corpo celeste que pode ser dado por P(ρ, θ) e θ é conhecido por anomalia verdadeira. Bem como φ é a distância entre P e F', e b é o semieixo menor.

Pela lei cossenos no triângulo ΔPF'F, tem-se que:

$$\varphi^2 = \rho^2 + (2.c)^2 - 2.\rho.(2.c).cos\theta \qquad (1)$$

Então, tem-se que:

$$\varphi^2 = \rho^2 + 4.c^2 - 4.\rho.c.cos\theta. \qquad (2)$$

Pela definição da elipse tem-se que:

$$\varphi + \rho \equiv 2a. \qquad (3)$$

Ficando então

$$\varphi = 2a - \rho. \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (2), vem:

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4.a^2.c^2 - 4.\rho.c.cos\theta \qquad (5)$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença, fica:

$$4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4.c^2 - 4.\rho.c.cos\theta. \qquad (6)$$

Se

$$4a^2 - 4.c^2 = 4a\rho - 4.\rho.c.cos\theta \qquad (7)$$

Então dividimos a expressão (7) por 4, ficando:

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c.cos\theta). \qquad (8)$$

Se $a^2 - c^2 = b^2$, então:

$$\rho = \frac{b^2}{a - c.cos\theta}. \qquad (9)$$

Ao dividir a expressão (9) por a, fica:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e.cos\theta}. \qquad (10)$$

Considerando que $\frac{b^2}{a}$ = k (parâmetro de Kepler), então temos que a equação geral das cônicas é definida por:

$$\rho = \frac{k}{1 - e.cos\theta} \qquad (11)$$

Generalizando, as seções cônicas podem ser descritas pela equação acima, que para surpresa de Kepler, essa primeira lei satisfaz não só elipses, como também circunferências, hipérboles e parábolas, de acordo com os valores que e irá assumir.

- No caso da elipse $e < 1$. São as órbitas da Lua e dos planetas;
- No caso da circunferência: $e = 0$. São as órbitas dos satélites artificiais;
- No caso da parábola: $e = 1$. São as órbitas dos cometas e asteroides;
- No caso da hipérbole: $e > 1$. São os voos planetários que utilizam a gravidade assistida.

A partir do longo estudo pela órbita de Marte, Kepler então generaliza e descreve sua primeira lei astronômica através de uma carta a um amigo teólogo e astrônomo alemão, conhecido por David Fabricius, afirmando: **"Todos os planetas do Sistema Solar descrevem uma órbita elíptica em torno do Sol, e este ocupa um dos focos dessa elipse".**

1.2. Segunda Lei de Kepler

Kepler já estava conformado que só a Matemática não era suficiente para explicar a órbita oval dos planetas, e que haveria uma explicação de cunho eminentemente físico para os resultados obtidos. Foi daí que ele utilizou a grandeza física momento angular para desenvolver a 2ª lei denominada Lei das Áreas.

O momento angular ($\vec{L}$) é uma constante dada pelo produto vetorial entre o raio vetor ($\vec{r}$) e o momento linear ($\vec{p}$). Algebricamente, tem-se que:

$$\vec{L} = \vec{r}\ x\ \vec{p}. \qquad (1)$$

Mas $\vec{p}$ é dado pelo entre a massa do corpo mais leve (m) e sua velocidade ($\vec{v}$). Ou seja,

$$\vec{p} = m\ x\ \vec{v}. \qquad (2)$$

Logo:

$$\vec{L} = m\ x\ \vec{r}\ x\ \vec{v} \qquad (3)$$

De acordo com a figura a seguir, iremos deduzir tal Lei.

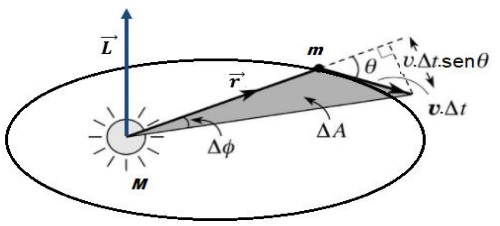

Figura 2. Raio vetor varrendo uma área na elipse.

Considera-se dr o deslocamento linear dado por:

$$dr = v.\Delta t.sen\theta \quad (4)$$

Se θ tende a $\frac{\pi}{2}$, então: $sen\theta = sen\frac{\pi}{2} = 1$.

Como a área delimitada (ΔA) na figura 2 é um triângulo, então:

$$\Delta A = \frac{1}{2}.|\vec{r}\,x\;dr| \quad (5)$$

Substituindo (4) em (5), fica:

$$\Delta A = \frac{1}{2}.|\vec{r}\;x\;\vec{v}.\Delta t.\,sen\theta| \quad (6)$$

Assim, tem-se que

$$\vec{r}\;x\;\vec{v} = \frac{\vec{L}}{m}. \quad (7)$$

Daí vem:

$$\Delta A = \frac{1}{2}.\left|\frac{\vec{L}}{m}.\Delta t\right|. \quad (8)$$

Logo:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\vec{L}}{2m} \quad (9)$$

Kepler mostra que $\vec{L}$ e m são constantes do movimento. E a razão $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ é denominada de velocidade areal (ou areolar) do planeta, que corresponde à área varrida pelo raio vetor que une o planeta ao Sol por intervalo de tempo.

Dessa forma, Kepler denomina sua segunda lei como Lei das Áreas e a publica em 1609, afirmando que: **"O raio vetor (segmento de reta que liga um planeta ao Sol) "varre" áreas iguais em intervalos de tempos iguais".**

1.3. Terceira Lei de Kepler

Depois de 10 anos da elaboração das duas primeiras leis, ou seja, em 1619, Kepler busca uma harmonia em seus estudos e publica a sua terceira lei astronômica. Essa lei é conhecida por Lei dos Períodos. Seu estudo se dá pela avalição das coordenadas cartesianas da elipse formada por um planeta que situa no ponto *P (x, y)* e o Sol se encontra no foco *F₂*, conforme a figura 3.

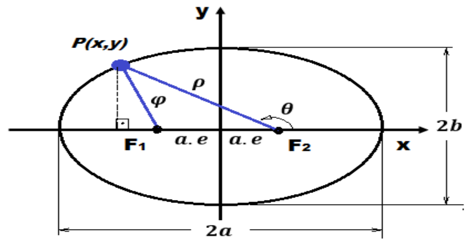

Figura 3. Elipse em coordenadas cartesianas.

Kepler utiliza, então, o teorema de Pitágoras e dispõe de duas equações:

$$\rho^2 = (x + a.e)^2 + y^2 \quad (1)$$

$$\varphi^2 = (x - a.e)^2 + y^2 \quad (2)$$

Ao subtrair as duas equações tem-se que

$$\rho^2 - \varphi^2 = (x + a.e)^2 + y^2 - ((x - a.e)^2 + y^2) \quad (3)$$

No desenvolvimento dessa equação chega-se em:

$\rho^2 - \varphi^2 = 4.a.e.x$. Mas $\rho = 2a - \varphi$. (4)

Então, desenvolvendo essa equação, obtén-se:

$$y^2 + x^2.(1 - e^2) = a^2.(1 - e^2). \quad (5)$$

Em uma elipse temos a seguinte relação pitagórica:

$$b^2 = a^2.(1 - e^2). \quad (6)$$

Ao substituir (6) em (5) fica:

$$y = \frac{b}{a}.\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (7)$$

A área de uma elipse é dada por:

$$A = \pi.a.b. \quad (8)$$

Se considerarmos que a resultante centrípeta $(\vec{R}_{CTP})$ do planeta é a força gravitacional $(\vec{F}_{GVT})$, onde:

$$\vec{R}_{CTP} = \frac{m.\vec{v}^2}{\rho} \quad (9)$$

$$\vec{F}_{GVT} = \frac{G.M.m}{\rho^2} \quad (10)$$

, então:

$$\frac{m.\vec{v}^2}{\rho} = \frac{G.M.m}{\rho^2} \quad (11)$$

Assim tem-se que:

$$\vec{v}^2 = \frac{G.M}{\rho} \quad (12)$$

Pela definição de momento angular, tem-se que:

$$\vec{L} = m\;x\;\vec{r}\;x\;\vec{v} \quad (13)$$

Para: $\vec{r} = \rho$, então:

$$\frac{\vec{L}^2}{m^2} = G.M.\rho. \quad (14)$$

Na primeira lei de Kepler, obteve-se que:

$$\rho = \frac{k}{1 - e.cos\theta} \quad (15)$$

ou

$$\rho = \frac{a.(1 - e^2)}{1 - e.cos\theta}. \quad (16)$$

Sabe-se que ρ está em função de θ. Ao considerar que $\theta = 90°$, tem-se que $cos90° = 0$. Então:

$$\rho = a.(1 - e^2). \quad (17)$$

Agora fazemos:

$$\frac{\vec{L}^2}{m^2} = G.M.a.(1-e^2). \quad (18)$$

Na segunda lei de kepler, obteve-se que:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\vec{L}}{2m}. \quad (19)$$

Desenvolvendo a equação anterior chegamos em:

$$G.M.a.(1-e^2) = \frac{4.\Delta A^2}{\Delta t^2}. \quad (20)$$

Sabendo-se que $\Delta A = A$ (área da elipse), então:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M} \quad (21)$$

Essa relação harmónica diz respeito à tabela 1, que denota a constante mostrada na equação (21), tratando apenas dos planetas do Sistema Solar que eram conhecidos até o tempo de Johannes Kepler.

Planeta	Período de revolução T (anos)	Semieixo maior da órbita a (*U.A*)	T^2	a^3	$\frac{T^2}{a^3}$
Mercúrio	0,241	0,387	0,058	0,058	1,000
Vênus	0,615	0,723	0,378	0,378	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Marte	1,881	1,524	3,537	3,537	1,000
Júpiter	11,862	5,203	140,7	140,8	0,999
Saturno	29,456	9,534	867,7	867,9	0,999

Tabela 1. Dados de período e raio médio para os 6 planetas

A terceira lei estabelece o seguinte: **O quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse que representa a órbita do planeta.**

2. APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

O GeoGebra é um software que foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter embaseado em 2001 na linguagem Java. Com ele, o aluno terá a possibilidade de desenvolver o lúdico, através da criação de simuladores.

O GeoGebra nos possibilita de executarmos uma situação-problema em Matemática, onde as janelas de visualização podem nos mostrar simultaneamente o tripé matemático: álgebra, geometria e aritmética.

É a intradisciplinaridade, que pode facilitar a percepção dos significados dos conceitos, valorizar as semelhanças de cada ramificação da Matemática e agrupar ideias que contribuem para a compreensão de temas matemáticos (LORENZATO, 2006). A figura 4 faz referência ao exposto.

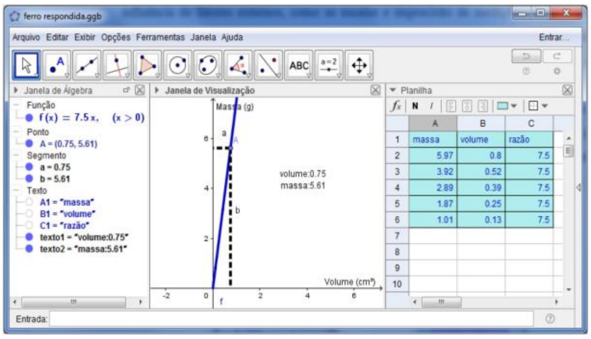

Figura 4. Interface do GeoGebra atendendo o tripé da Matemática

2.1. Simulação da equação geral das cônicas no geoGebra

O simulador permite com que o aluno altere o semieixo maior (**a**), a excentricidade (**e**) e o ângulo **θ**, para determinar o raio-vetor (**ρ**), que é a distância entre o Sol e o corpo celeste, e visualize as cônicas seguintes: circunferência, elipse, hipérbole e parábola.

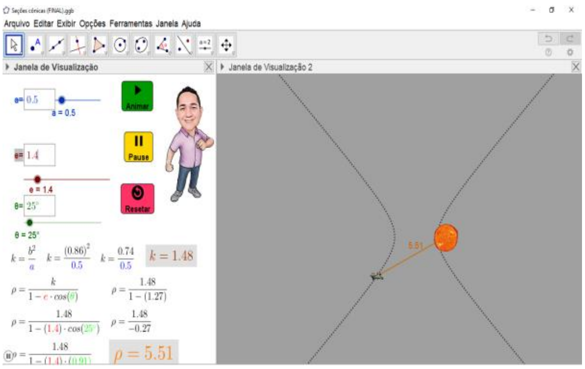

Figura 5. Simulador da equação geral das cônicas.

2.2. Simulação das três leis de Kepler no GeoGebra

Esse simulador faz com que o aluno desenvolva as três leis, através dos botões expostos na janela de visualização 1, possibilitando o aluno de buscar um estudo detalhado das diversas situações que Kepler buscou mostrar à sociedade científica, de forma geométrica, enfatizando, através da janela de visualização 2 o lúdico da exposição das três leis astronômicas.

2.2.1. Primeira lei de Kepler (lei das órbitas)

A figura 5 mostra a primeira lei de Kepler (lei das órbitas), enfatizando a propriedade elíptica que afirma que um ponto qualquer na elipse, ligado aos seus focos, gera duas distâncias cuja soma é constante, bem como a velocidade vetorial variando conforme o afélio e o periélio.

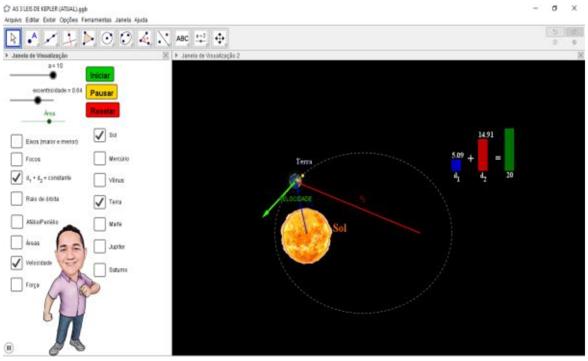

Figura 6. Simulador da 1ª lei de Kepler.

2.2.2. Segunda lei de Kepler (lei das áreas)

O simulador expõe a representação do raio-vetor "varrendo" áreas iguais em intervalos de tempos iguais, com os botões do raio da órbita e de área, conforme a figura 7.

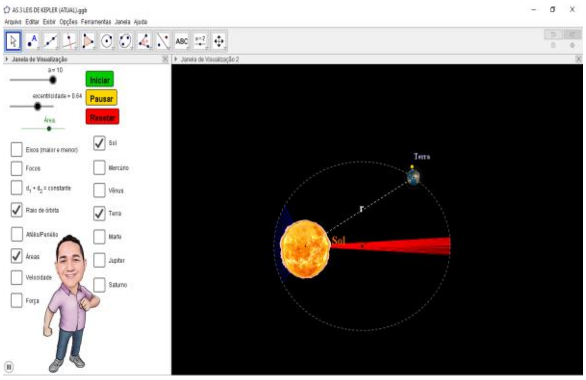

Figura 7. Simulador da 2ª lei de Kepler.

2.2.3. Terceira lei de Kepler (lei dos períodos)

O simulador representa a relação de proporcionalidade entre o quadrado do período e o cubo do raio médio da órbita dos seis primeiros planetas do Sistema Solar, conforme a figura 8.

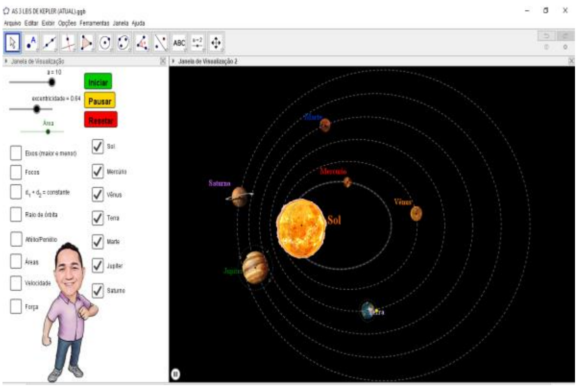

Figura 8. Simulador da 3ª lei de Kepler.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A atividade proposta no LIED, com o intuito de demonstrar de forma lúdica e dinâmica para os alunos traz resultados positivos no processo de ensino-aprendizagem, à medida que eles conseguem relacionar a teoria com a prática.

O que antes ficava restrito em apenas uma exposição de conteúdos em sala de aula, agora o aluno tem a possibilidade de manipular os simuladores do GeoGebra, assumindo valores diferentes na excentricidade da equação, conhecendo as cônicas formadas, bem como os comandos para designar as três leis de Kepler.

É notório que a aprendizagem se torna mais divertida e prazerosa para os alunos, à medida que eles assimilam os comandos do software e conseguem relacionar a álgebra, através das funções, com os gráficos que dão formas bidimensionais ou tridimensionais de uma situação - problema.

CONCLUSÃO

De acordo com as nossas vivências e experiências em sala de aula, na condição de professor de matemática, sabemos quanto é desafiador o papel do professor em ensinar Matemática e Física, à medida que tentamos sair do mundo da abstração para a praticidade dos conteúdos matemáticos abrangentes na educação básica do ensino público. Por conta dessa situação é que pensamos na utilização do GeoGebra nas aulas. E issofaz com que os alunos adquiram mais estímulos em aprender a Geometria e as leis universais, bem como conseguir interligar a teoria à prática dos conteúdos abordados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Deus supremo que sabe de todas as coisas. Aos meus queridos pais Freitas e Dulce. À minha linda e amável esposa Talita e minhas adoráveis filhas Isabella e Isadora que eu tanto amo.

REFERÊNCIAS

COSTA, Ivana Paula Lira da. A utilização do software GEOGEBRA como ferramenta didática no processo de ensino e aprendizagem: uma aplicação para alunos e professores da rede pública de ensino. / Ivana Paula Lira da Costa. – Santarém - PA, 2017.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte - MG, 1996.

KEPLER, J. Astronomia nova. In CASPAR, M. & von DYCK, W. (Eds.) Gesammelte Werke, Munich, 1937, v. 3, p. 5-424.