

Modelo de Minisuperspaço Einstein-Aether com Fluido de Radiação

*DINIZ, L.A. M.^{1,a} , ALVARENGA, F. G.^{1,b} , MONERAT, G.A.^{2,c} , GOLDONI, O.^{3,d} , OLIVEIRA-
NETO, G.^{4,e} , SILVA, E. V. C.^{5,f},*

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil

²Departamento de Modelagem Computacional, Instituto politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil.

³Departamento de Engenharia Mecânica e Energia, Instituto politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil.

⁴Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil.

⁵Departamento de Matemática, Física e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil.

^alorran.diniz@edu.ufes.br

^bflavio.alvarenga@ufes.br

^cgermano.monerat@pq.cnpq.br

^dotavio@iprj.uerj.br

^egilneto@fisica.ufjf.br

^feduardo.vasquez@pq.cnpq.br

Resumo

Neste trabalho propõe-se a construção de um modelo cosmológico quântico da teoria de Einstein-Aether. Esse modelo foi construído empregando o formalismo variacional de Schutz para um universo espacialmente plano, preenchido por um fluido de radiação. O comportamento do fator de escala é estudado a partir da Interpretação de Muitos Mundos da mecânica quântica.

Palavras Chaves: Einstein-Aether, Cosmologia Quântica, Gravitação e Interpretação de muitos mundos.

Abstract

This work proposes the construction of a quantum cosmological model of the Einstein-Aether theory. This model was built employing Schutz variational formalism for a spatially flat universe filled with a radiative fluid. The behavior of the scale factor is studied from the Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics.

Keywords: Einstein-Aether, Quantum Cosmology, Gravitation and Many Worlds Interpretation.

1. O Modelo

A chamada função de onda do universo que satisfaz a equação de Wheeler-DeWitt da cosmologia quântica [1,2,3] depende em geral de toda a 3-geometria (a qual é caracterizada por um conjunto de funções da métrica). A função de onda é na verdade um funcional sobre um espaço de dimensão infinita de todas as possíveis 3-

geometrias, uma variedade conhecida como superespaço. Se as 3-geometrias são restrinidas por vínculos de simetria, a função de onda torna-se um funcional sob um subespaço do superespaço – o chamado minisuperspaço. É nesse cenário de minisuperspaço que propõe-se a quantização de um modelo cosmológico com campo de éter de modo a analisar a possibilidade de surgimento do Universo sem a existência da singularidade inicial.

A teoria de Einstein-Aether consiste em uma modificação da relatividade geral, introduzindo um campo vetorial unitário do tipo tempo u^μ , que seleciona um referencial preferencial local em cada ponto do espaço-tempo assim quebrando a simetria de Lorentz [4, 5]. Nessa teoria podemos escrever a ação da seguinte forma

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R \\ & + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} dx^3 \sqrt{h} h_{ab} B^{ab} \\ & + \int_M \sqrt{-g} p \\ & + \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} [-M_{\epsilon\kappa}^{\mu\nu} \Delta_\mu u^\epsilon \Delta_\nu u^\kappa \\ & + \lambda (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + 1)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Nesta equação R é o escalar de curvatura, B^{ab} é a curvatura extrínseca, h_{ab} é a métrica tridimensional, $p = \alpha\rho$ representa a pressão interna de um fluido perfeito com densidade de energia ρ , onde o parâmetro α determina o tipo de fluido que preenche o universo. Neste trabalho escolhemos $\alpha = 1/3$ para um universo preenchido por fluido de radiação. Na contribuição do campo de éter, λ é um multiplicador de Lagrange que garante a unidade do campo de éter u^μ e $M_{\epsilon\kappa}^{\mu\nu}$ é o tensor

$$\begin{aligned} M_{\epsilon\kappa}^{\mu\nu} = & c_1 g^{\mu\nu} g_{\epsilon\kappa} + c_2 \delta_\epsilon^\mu \delta_\kappa^\nu \\ & + c_3 \delta_\kappa^\mu \delta_\epsilon^\nu - c_4 u^\mu u^\nu g_{\epsilon\kappa}, \end{aligned} \quad (2)$$

sendo c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes adimensionais de acoplamento do campo de éter no campo gravitacional.

A constante G em (1) é definida em termos da constante gravitacional Newtoniana G_N e das constantes de acoplamento

$$G = G_N \sigma, \quad (3)$$

onde

$$\sigma = 1 - \frac{c_1 + c_4}{2}. \quad (4)$$

Considerando um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega), \quad (5)$$

e considerando o formalismo de Schultz [6,7,8], onde a quardivelocidade de um fluido é descrita em termos dos potenciais μ, S, ϵ e θ :

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (6)$$

onde μ é a entalpia específica, S é a entropia específica, enquanto ϵ e θ não possuem um significado físico claro.

A ação (1) pode ser reduzida [9,10,11] para a forma

$$S = \int dt \left[-\frac{6a\dot{a}^2}{\sigma} - \frac{3\beta a\dot{a}^2}{\sigma} + \frac{a^3}{\sigma} \frac{1}{3} \left(\frac{3(\dot{\epsilon} + \theta\dot{S})}{4} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-3S} \right], \quad (7)$$

onde β é dado por

$$\beta = c_1 + 3c_2 + c_3, \quad (8)$$

Os parâmetros σ e β carregam a influência do campo de éter.

Mediante as transformações canônicas

$$\begin{aligned} T &= p_s e^{-S} p_\epsilon^{-\frac{4}{3}}, & p_T &= p_\epsilon^{\frac{4}{3}}, \\ \bar{\epsilon} &= \epsilon - \frac{4}{3} \frac{p_S}{p_\epsilon}, & \bar{\epsilon} &= p_\epsilon, \end{aligned} \quad (9)$$

podemos obter a super-Hamiltoniana

$$H_s = -\frac{\sigma p_a^2}{12a(\beta + 2)} + \frac{p_T}{a}. \quad (10)$$

2. Quantização

A quantização é feita transformando os momentos canônicos em operadores

$$p_a \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad p_T \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (11)$$

Substituindo esses operadores na super-Hamiltoniana (10) obtemos um operador \hat{H}_s de onde podemos escrever a equação de Wheeler-DeWitt ao aplicar esse operador na equação de onda do universo $\Psi(a, T)$,

$$\hat{H}_s \Psi(a, T) = 0. \quad (12)$$

Reparametrizando o tempo $\tau = -T$ temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 24 \frac{(1 + \frac{\beta}{2})}{\sigma} i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau) = 0. \quad (13)$$

A equação pode ser reescrita como

$$\hat{H} \Psi(a, \tau) = i \frac{\partial \Psi(a, \tau)}{\partial \tau}, \quad (14)$$

onde o operador hamiltoniano \hat{H} é definido como

$$\hat{H} = -\frac{1}{24} \frac{\sigma}{(1 + \frac{\beta}{2})} \frac{\partial^2}{\partial a^2}. \quad (15)$$

Para assegurar a unitariedade das soluções é necessário que o operador hamiltoniano \hat{H} seja auto-adjunto, ou seja, que o produto interno seja

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_0^\infty da \phi_1^*(a) \phi_2(a), \quad (16)$$

e como o fator de escala está restrito ao domínio $a > 0$, impomos as condições de contorno

$$\phi(0, \tau) = 0, \quad (17)$$

e

$$\phi(0, \tau)' = 0. \quad (18)$$

A equação de Wheeler-DeWitt admite soluções estacionárias do tipo

$$\Psi(a, \tau) = \eta(a) e^{-iE\tau}, \quad (19)$$

em que E é um parâmetro real e $\eta(a)$ obedece a equação

$$\frac{d^2\eta}{da^2} + \frac{24E}{\sigma} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \eta(a). \quad (20)$$

A solução geral da equação (20) se dá em termos da combinação linear de funções de Bessel de primeiro tipo. A equação (19) fornece o estado estacionário

$$\Psi_E(a, \tau) = \sqrt{a} (C_1 J_{\frac{1}{2}}[ra] + C_2 J_{-\frac{1}{2}}[ra]) e^{-iE\tau}, \quad (21)$$

em que

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{96E}{\sigma} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)}. \quad (22)$$

Aqui vamos nos concentrar na solução que respeita a condição de contorno (18), para esse caso a equação (21) se reduz a

$$\Psi_E(a, \tau) = \sqrt{a} C_2 J_{-\frac{1}{2}}[ra] e^{-iE\tau}. \quad (23)$$

Ainda que a equação (23) seja de quadrado integrável, sua norma diverge, o que pode ser contornado pela construção de um pacote de onda

$$\Psi(a, \tau) = \int_0^\infty A(E) \Psi_E(a\tau). \quad (24)$$

Para uma escolha adequada de $A(E)$, obtemos o pacote de onda

$$\Psi(a, \tau) = \left[2g + \frac{i\sigma\tau}{6(\beta+2)} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{a^2}{4g + \frac{i\sigma\tau}{3(\beta+2)}} \right], \quad (25)$$

para $g > 0$ em que g é uma constante arbitrária decorrente da escolha de $A(E)$.

Por sua vez a densidade de probabilidade definida por

$$\rho = |\Psi(a, \tau)|^2, \quad (26)$$

toma a forma de

$$\rho = \frac{1}{\left[4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{2ga^2}{4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2}}\right]. \quad (27)$$

A densidade de probabilidade atinge seu valor máximo quando $a = 0$ e decresce conforme a figura 1.

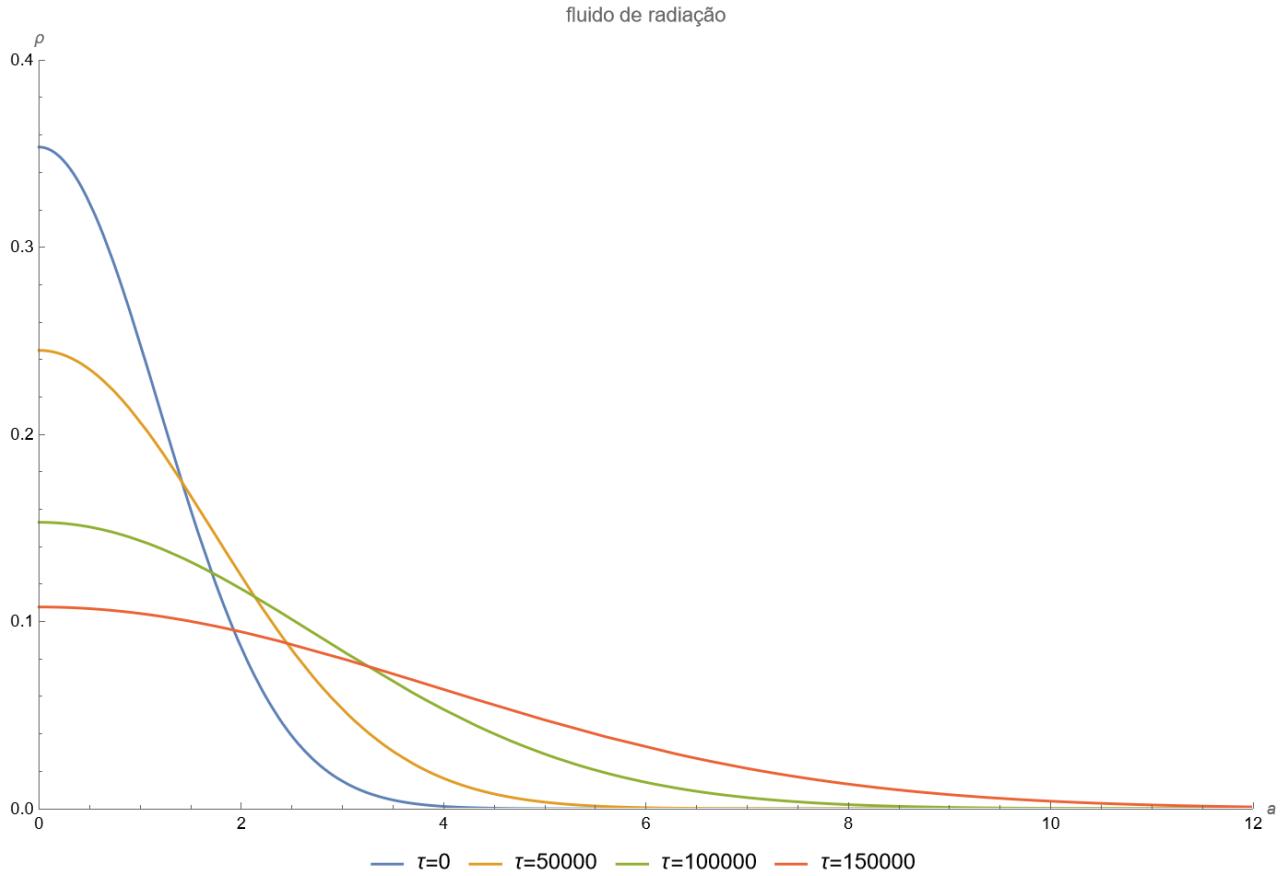


Figura 1. Densidade de probabilidade $\rho(a)$.

3- Interpretação de Muitos Mundos

A Interpretação de Muitos Mundos da mecânica quântica surge com o objetivo de permitir que a mecânica quântica seja aplicada para o universo como um todo [12]. Nesta interpretação para qualquer medição o universo seria dividido em vários universos, cada um correspondendo a um possível resultado da medição. Nenhum universo então, saberia dos outros, e cada um conteria sua própria versão do observador.

Nesta interpretação podemos calcular o valor esperado do fator de escala $a(\tau)$ como

$$\langle a(\tau) \rangle = \frac{\int_0^\infty |\Psi(a, \tau)|^2 a da}{\int_0^\infty |\Psi(a, \tau)|^2 da}, \quad (28)$$

em que a dependência temporal do fator de escala representa a evolução dinâmica do universo. Nesta versão quântica do nosso modelo cosmológico, construído a partir do modelo de Einstein-Aether, as equações (25) e (28) fornecem

$$\langle a(\tau) \rangle = \frac{\left[2g + \frac{\sigma^2 \tau^2}{72g(\beta+2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \quad (29)$$

Para valores suficientemente grandes do tempo τ ($\tau \rightarrow \infty$), o valor esperado do fator de escala cresce de acordo com a previsão clássica no calibre adotado:

$$a(\tau) \propto \left(\frac{\sigma \tau}{\beta + 2} \right). \quad (30)$$

4. Considerações Finais

Neste modelo cosmológico quântico de Einstein-Aether com fluido de radiação, em que há a quebra de simetria de Lorentz, pelo acoplamento de um campo escalar a métrica, obtemos um universo não singular. A figura (1) ilustra a densidade de probabilidade e mostra que, neste modelo, o universo possui maior probabilidade de surgir com um fator de escala menor.

Futuramente, pretendemos generalizar o modelo para fluidos barotrópicos arbitrários.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem à comissão organizadora do XII Encontro Científico de Física Aplicada pela excelência do evento.

L. A. M. Diniz agradece ao CNPq pelo suporte financeiro.

G. A. Monerat agradece à FAPERJ pelo suporte financeiro.

6. Referências

- [1] HALLIWELL, J. J. **Quantum Cosmology and Baby Universes.** (World Scientific, Singapore, 1991).
- [2] ATKATZ, D. American Journal Physics **62**, 619 (1994).
- [3] MONIZ, P. V. **Quantum Cosmology - The Supersymmetric Perspective - vol. 1: Fundamentals.** (Lecture Notes in Physics)(Springer, 2010).
- [4] JACOBSON, T. and MATTINGLY, D. **Gravity with a dynamical preferred frame.** Physical Review D, 64(2), Jun 2001.

[5] JACOBSON, T. **Einstein-aether gravity: a status report.** arXiv:0801.1547, 2008.

[6] SCHUTZ, B. F. (1970). Phys. Rev. **D 2**, 2762.

[7] SCHUTZ, B. F. (1971). Phys. Rev. **D 4**, 3559.

[8] ALVARENGA, F. G., FURTADO, R., FRACALOSSI, R. e GONÇALVES, S. V. B. Brazilian Journal of Physics, v. 47, p. 96 (2016).

[9] LAPCHINSKIIL, V. G. and RUBAKOV, V. A. (1977). Theor. Math. Phys. **33**, 1076.

[10] ALVARENGA, F. G., FABRIS, J. C. Fabris, LEMOS, N. A. e MONERAT, G. A., Gen. Relativ. Gravit. **34**, 651 (2002).

[11] MONERAT, G. A., SANTOS, C. G. M., ALVARENGA, F. G., GONÇALVES, S. V. B., FRACALOSSI, R., SILVA, E. V. C. e OLIVEIRA-NETO, G. Brazilian Journal Physics **50**, 89 – 104 (2020).

[12] DeWITT, B. S. **The Many-Worlds Interpretation of quantum Mechanics**, ed. por B.S. DeWitt e N. Graham (Princeton University Press, Princeton, 1973).