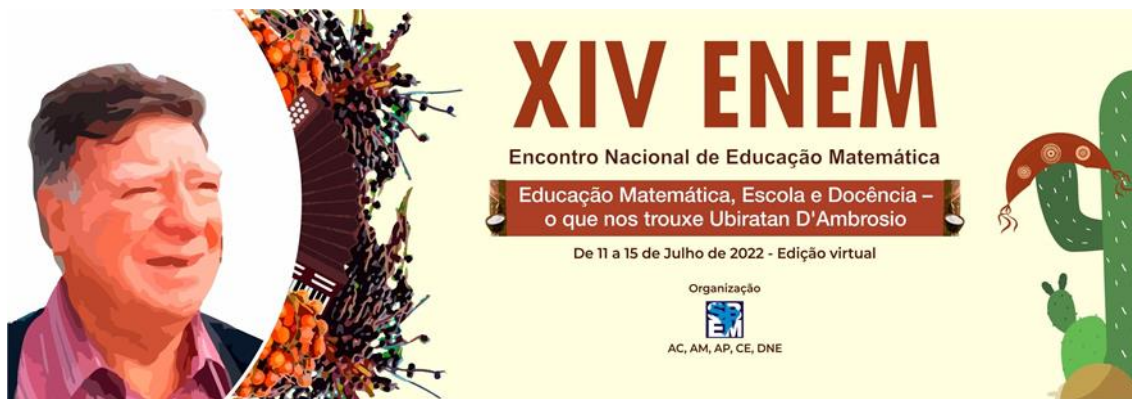




Considerações iniciais sobre o “método da primeira e últimas razões” do *Principia Matemática* de Isaac Newton

Initial considerations on the "method of first and last reasons" of Isaac Newton's *Principia Mathematica*

Ms. Jorge Luiz de Almeida Zeferino Junior
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

jorgeluiz.edu@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-5018-486X>

Prof. Dra. Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

zeze@pucsp.br

<https://orcid.org/0000-0002-1249-8091>

Eixo 13 (Dimensões filosóficas, sociológicas, culturais e políticas na Educação Matemática)

Resumo

Neste artigo apresentamos breves apontamentos preliminares que pertencem a uma pesquisa de doutorado em Educação Matemática, em andamento, cujo objetivo é estudar o método da primeira e últimas razões de Isaac Newton. As duas obras utilizadas para a investigação trazem consigo registros de aplicações do cálculo de curvaturas e quadraturas, assuntos que estavam presentes dentro e fora das academias nos séculos XVII e XVIII. Apresentaremos aqui dois exemplos diferentes, mas que, em sua essência, buscam algo em comum, a relação entre áreas e curvas cujo entendimento foi importante para termos uma compreensão mais clara dos assuntos bem como dos temas abordados por Isaac Newton para, posteriormente, dar continuidade à nossa pesquisa.

Palavras-chave: Método das Fluxões; Cálculo de Curvas; Isaac Newton.

Abstract

In this article we present brief preliminary notes that belong to a doctoral research in Mathematics Education that is in progress and whose objective is to study Isaac Newton's method of the first and last reasons. The two works used for the research bring with them records of applications of the calculus of curvatures and quadratures, subjects that were present in and outside the academies in the 17th and 18th centuries. We will present here two different examples, but which in their essence seek something in common, the relationship between areas and curves. We present the two examples whose understanding was important for us to have a clearer understanding of the issues and of the themes addressed by Isaac Newton to later continue our research.

Keywords: Method of Fluxions; Calculus of Curves; Isaac Newton.

Introdução

Esse estudo foi elaborado com base em resultados obtidos em uma investigação anterior que tratava do método das fluxões de Isaac Newton (1642 – 1727) utilizado para resolver problemas de curvaturas e quadraturas no século XVII.¹ Após analisar os tratados *De Analysisi* - 1711² e *The Method of Fluxions* – 1736³ em seus próprios contextos identificamos que seu método de fluxões sofreu uma mudança de significado de uma obra para outra a princípios por meio de uma notação matemática apresentada por Newton para representar o que Newton chamou de “momento”.

Os resultados dessa pesquisa apontaram que, além dessa nova notação matemática para seu método de fluxões, Isaac Newton iniciava a transição do método sintético (geométrico) para o método analítico (algébrico) com vistas a investigar fenômenos naturais.⁴ Uma análise contextual e epistemológica mais delineada de seu método matemático nos revelou que o cálculo do fluxões é parte integrante do desenvolvimento dos processos de diferenciação e integração.

Além disso, notamos que sua aplicação permitiu a Newton resolver os problemas de curvatura e quadratura de uma forma diferente de sua época.⁵ Segundo Zeferino Junior (2021):

Newton propõe mostrar que os estudos de curvaturas e quadraturas, que vinham sendo resolvidos por meio de séries infinitas, ganhavam uma forma mais simples de se resolver. E que os problemas até agora encontrados sobre curvas e áreas pudessem ser reduzidos a dois problemas do movimento local. (ZEFERINO JUNIOR, 2021, p. 47).⁶

Durante a investigação anterior descobrimos que Isaac Newton em sua outra obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de 1687⁷ nos apresenta, novamente, outra abordagem matemática dada ao cálculo de curvas que nos revela, em

¹ Dissertação de Mestrado Acadêmico intitulada: Um estudo sobre o cálculo de fluxões de Isaac Newton.

² *De Analysisi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* de 1711.

³ *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines* de 1736. Quando citada na pesquisa será apresentada como: (NEWTON, 1736).

⁴ Mais a respeito do método sintético e analítico vide (ROQUE, 2012).

⁵ Curvaturas representa, por assim dizer, investigações destinadas ao estudo de curvas, como no caso o estudo de cônicas e quadratura as investigações sobre áreas abaixo de curvas.

⁶ “A ciência dos movimentos que resultam de quaisquer forças, e das forças exigidas para produzir quaisquer movimentos, rigorosamente propostas e demonstradas.” (NEWTON, 2008, p. 14).

⁷ Nesse estudo utilizaremos uma tradução do *Principia* que foi elaborada pelo corpo docente da Universidade de São Paulo – Edusp em 2008. Durante nossa pesquisa será citada como (NEWTON, 2008).

um primeiro momento, conhecimentos que hoje fazem parte do estudo do cálculo de limites.

Assim, nossa pesquisa busca apresentar algumas questões de ordem matemática e epistemológica que emergem do método das primeiras e últimas razões de Isaac Newton para, posteriormente, serem exploradas na construção de interfaces entre história e ensino de matemática. Portanto, o breve estudo histórico aqui apresentado, como afirma Saito (2015, p. 32), “[...] busca compreender e analisar o processo da construção do conhecimento, considerando os conceitos e o conhecimento em seu contexto”. Nesse sentido, propusemos aqui investigar “[...] o processo da construção do conhecimento acerca da natureza e das técnicas matemáticas na inter-relação de diferentes aspectos em torno do objeto matemático”. (SAITO, 2015, p. 32 *apud* ZEFERINO JUNIOR, 2021, p. 15).

Dessarte, procuramos criar um diálogo com o texto, com vistas a comentá-lo de modo a proporcionar uma reflexão sobre as ideias matemáticas, apresentadas nas obras aqui mencionadas seguindo as orientações de Folscheid e Wunenburger (1997, p. 30) “a explicação de texto busca saber *o que um autor verdadeiramente disse* numa dada passagem, enquanto o comentário é uma interrogação armada (de referências, sobretudo) sobre *o que ele disse de verdadeiro*”.

Desse modo, em nossas investigações iniciais, tanto quanto possível, intencionamos apresentar algumas diferenças entre os métodos das fluxões e o método das primeiras e últimas razões nos limitando a um exemplo do *The Method of Fluxions* (Prob. I) e ao Lema II da Seção I dos *Principia Matemática*.

2. O método das fluxões

O método das fluxões já esteve no centro das atenções de alguns filósofos, historiadores da matemática e das ciências em geral. Por exemplo, Boyer (1992, p. 194) afirma que “no Método dos Fluxos, Newton afirmou claramente o problema fundamental do cálculo” enquanto Eves (2011, p. 439) observa que “Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos”.

De acordo com Cohen e Westfall (2010, p. 452) Isaac Newton propôs manipulações algébricas como solução para resolver problemas complexos de geometria e Guicciardini (2009, p. 180, tradução nossa), por sua vez, esclarece que “Newton deixou

claro que os objetos aos quais seu método analítico aplicado são quantidades geométricas geradas por um processo de fluxo no tempo”.

Nesse sentido, Zeferino Junior (2021, p. 14) ressalta que nessa obra *The Method of Fluxions* de 1736 “Newton não só explicitou, mas também aplicou o cálculo de fluxões metodicamente, utilizando-o para resolver problemas ligados ao estudo da curvatura e da quadratura”. Um desses problemas é o Prob – I da obra *The Method of Fluxions* em que Newton refere-se aos estudos da curvatura. Newton nos entrega esse problema como: “sendo dada a relação dos fluentes, encontrar as relações de suas fluxões”. (NEWTON, 1736, p. 21-25, tradução nossa). Nesse exemplo (Prob I) Newton usa a notação matemática “ $\dot{x}o$ ” para representar:

Os momentos de quantidades fluentes (isto é, suas partes indefinidamente pequenas, por cuja acréscimo, em porções indefinidamente pequenas de tempo, elas são continuamente aumentadas) são como as velocidades de seu fluxo ou aumento. (NEWTON, 1736, p. 24, tradução nossa).

Em outras palavras, momentos são constituídos por partes infinitamente pequenas de quantidades que ao longo de sua geração estão sujeitas a variações, isto é, podem diminuir ou aumentar continuamente. Essas quantidades infinitamente pequenas permitem Newton observar vários momentos de uma curva.

Por meio dessa notação Newton apresenta a possibilidade de resolver equações que apresentam relações entre curvas e áreas sem o uso de figuras geométricas, redução de curvas ou series infinitas. Aqui apresentamos um exemplo proposto por Newton em uma parte da obra intitulada “transição para o método de fluxos”.

58. Assim, na Equação $xx = y$, se y representa o comprimento do espaço descrito em qualquer momento de (*tempo*) medido e representado por um segundo espaço x , que está aumentando com uma velocidade uniforme $\dot{x}$. Então $2\dot{x}x$ representará a velocidade pela qual o espaço y deve ser descrito no mesmo momento do tempo. E, portanto, é que, a seguir, considero as quantidades como se fossem geradas pelo acréscimo contínuo, à maneira de um espaço que um objeto em movimento descreve em seu percurso. (NEWTON, 1736, p. 20, tradução nossa).⁸

⁸ Por essa palavra eu não a teria entendido como se eu quisesse dizer Tempo em sua aceitação formal, mas apenas aquela outra Quantidade, pelo aumento uniforme ou Fluxo do qual, o Tempo é exposto e medido. (NEWTON, 1736, p. 20, tradução nossa).

Nesse sentido, Zeferino Junior (2021) menciona que o exemplo procura a relação entre espaço, velocidade e o tempo que foi citado, como por analogia, para representar uma quantidade de mesma espécie que diminui ao longo do tempo que pode ser entendida como um intervalo.

Newton, em sua obra, orienta que em $y = xx$, y representa o comprimento do espaço e x (um segundo espaço que está aumentando que foram, substituídos por suas respectivas quantidades fluidas, acréscimo contínuo de quantidades de mesma natureza, ou seja, para x temos $x + \dot{x}o$ e para y , $y + \dot{y}o$ logo, $y = xx$, com as substituições propostas fica: $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)(x + \dot{x}o)$. (ZEFERINO JUNIOR, 2021, p. 75).

Aplicando a propriedade distributiva, nessa expressão, vem $y + \dot{y}o = xx + x\dot{x}o + x\dot{x}o + (\dot{x}o)^2$, equivalente a $y + \dot{y}o = xx + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$. Como sabemos que $y = xx$, substituindo temos $y + \dot{y}o = y + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$, que é equivalente à equação: $\dot{y}o = 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$, em que “ o ” representa uma quantidade infinitamente pequena de mesma natureza. (ZEFERINO JUNIOR, 2021, p. 76).

Newton propõe então dividir os termos pelo mesmo acréscimo infinitamente pequeno explicando que mesmo sendo uma quantidade infinitamente pequena ela não será zero e, portanto, pode dividir outra quantidade de mesma espécie apresentando a expressão $\frac{\dot{y}o}{o} = \frac{2x\dot{x}o}{o} + \frac{\dot{x}^2o^2}{o}$ que, após a divisão, é equivalente a $\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2o$ e que ainda apresenta uma quantidade infinitamente pequena.

Nesse caso, Newton considerou que como essa quantidade veio diminuindo infinitamente até que alcançou um momento, em que se tornou tão pequena que pode ser eliminada. Newton explica que uma quantidade qualquer multiplicada por uma outra infinitamente pequena produz um valor tão pequeno que pode ser desprezado o que resulta na expressão $\dot{y} = 2x\dot{x}$ em que $\dot{y}$ representa o comprimento total do espaço descrito e $2x\dot{x}$ velocidade pela qual o espaço foi descrito. (ZEFERINO JUNIOR, 2021, p. 76-77).

Portanto, utilizando os momentos, do seu cálculo de fluxões, podemos encontrar as relações entre o cálculo de curvaturas e quadraturas sem utilizar figuras geométricas, redução de curvas, divisão infinita, extração de raiz ou series infinitas. Por meio dos momentos Newton resolve os primeiros dois problemas em seu *The Method of Fluxions*, no entanto, na outra obra analisada, *Principia Matemática*, o seu método de fluxões recebe o nome de método da primeira e últimas razões.

3. O método da primeira e últimas razões de quantidades.

No Livro I de *Principia Matemática*, Newton apresenta um tópico intitulado “O Movimento dos Corpos”, no qual apresenta a matemática destinada à compreensão de alguns fenômenos naturais, tais como a movimentação de corpos celestes, pois segundo Newton:

No terceiro livro, dou um exemplo disso na explicação do Sistema do Mundo; pois pelas proposições matematicamente demonstradas nos Livros anteriores, no terceiro derivo dos fenômenos celestes as forças de gravidade com as quais corpos tendem para o Sol e para os vários planetas. (NEWTON, 2008, p. 14).

Em outras palavras, o Livro I introduz o pensamento filosófico e matemático newtoniano necessários para, posteriormente, serem utilizados nos Livros II e III o que mostra a importância do Livro I em que passamos a investigar o método das primeira e últimas razões de quantidades apresentada na Seção I.

Como anunciado anteriormente, a matemática que foi utilizada por Newton para resolver problemas relacionados a curvas e áreas no século XVII e XVIII nos foi apresentada em seu *The Method* como método das fluxões. Entretanto, em sua obra *Principia Matemática*, em especial, na Seção I do livro I, suas fluxões são apresentadas como “o método da primeira e última razões de quantidades, com o auxílio do qual demonstramos as proposições abaixo”. (NEWTON, 2008, p. 71) cujo Lema I é assim enunciado:

As quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim daquele tempo aproximam-se mais uma da outra do que por qualquer diferença dada, tornando-se finalmente iguais (NEWTON, 2008, p. 71).

Aqui temos uma ideia intuitiva do que entendemos hoje por limite de uma função que difere do nosso conceito formal atual, pois de acordo com Meneghetti e Bicudo (2002, p. 110-112)

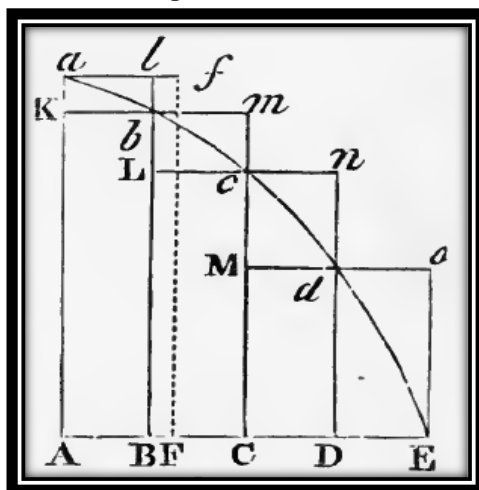
O trabalho de Newton tinha, com efeito, um caráter mais intuitivo. Sua visão de limite, por exemplo, principalmente a de seus trabalhos iniciais, era baseada em intuições geométricas. [...]. O conceito de limite de Newton era fortemente dependente da ideia do infinitamente pequeno. Essa dependência pode ser percebida em seu *Principia*, quando fala sobre a natureza das razões últimas e ainda apresenta seus três modos como equivalentes, [...].

Em outras palavras, o entendimento de que quantidades que se aproximam da igualdade, em um determinado intervalo de tempo, nos leva a considerar a influência dos movimentos e das velocidades no processo de determinação de um limite.

No entanto, na obra *The Method of Fluxions* aparece o uso de infinitésimos, isto é, de distâncias infinitesimais que são representadas por Newton, em seu método de fluxões para um intervalo de tempo, por $\dot{x}o$, não está presente nesse livro I do Principia. Tal diferença é apresentada por Newton por um exemplo em que busca a relação entre a curvatura e a quadratura de uma figura geométrica no Lema II assim enunciado:

Se em qualquer figura $AacE$, delimitada pelas retas Aa , AE e a curva acE , existirem um número qualquer de paralelogramos Ab , Bc , Cd , etc., de bases iguais AB , BC , CD , etc., e lados Bb , Cc , Dd , etc., paralelos a um lado Aa da figura; e os paralelogramos $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, etc., forem completados; então se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressivamente diminuída e o seu número aumentado in infinitum, afirmo que as razões finais que a figura inscrita $AKbLcMdD$, a figura circunscrita $AalbmcdnoE$ e a figura curvilínea $AabcdE$, terão uma para a outra, são razões de igualdades. (NEWTON, 2008, p. 71-72).

Figura I – Lema II



Fonte: (NEWTON, 2008, p. 72)

Nesse lema Newton estabelece que para determinar a medida da área sob uma curvatura devemos inscrever um número qualquer de paralelogramos. Na Figura 1 Newton apresenta os paralelogramos inscritos Ab , Bc , Cd e DE com bases iguais, AB , BC , CD e DE para inscrever paralelogramos abaixo da curvatura, ou seja, $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$ e explica que:

[...], se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressivamente diminuída e seu número aumentado até o infinito, afirmo que as razões finais que a figura inscrita $AKbLcMdD$, a figura circunscrita $AalbmcndoE$ e a figura curvilínea $AabcdE$, terão uma para outra, são razões iguais. (NEWTON, 2008, p. 71-72).

Em outras palavras, Newton esclarece que na medida em que a largura dos paralelogramos diminui, o número de paralelogramos cresce indefinidamente e provoca uma igualdade entre as medidas das áreas dos paralelogramos inscritos e circunscritos, pois:

[...] a diferença das figuras inscrita e circunscrita é a soma dos paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do , isto é (a partir da igualdade de todas as suas bases), o retângulo sob uma de suas bases Kb e a soma de suas alturas Aa , ou seja, o retângulo $ABla$. Mas este retângulo, pela hipótese de que sua largura AB seja diminuída *in infinitum*, torna-se menor que qualquer espaço dado. E, portanto (pelo Lema I), as figuras inscrita e circunscrita tornam-se, ao final, iguais uma à outra; e ainda mais, a figura curvilínea intermediária será finalmente igual a qualquer uma delas. Q.E.D. (NEWTON, 2008, p. 72).

Dessa forma a noção de limite apresentada por Newton está fundamentada em quantidades infinitesimais que, em um determinado instante de tempo, se tornarão iguais. Assim, Newton não só apresentou uma ideia intuitiva de limite, mas também buscou solucionar problemas geometricamente por meio do que chamou de método da primeira e últimas razões.

Conclusão

A ideia de limite talvez já existisse na obra de Newton, mas ainda não estava institucionalizada, ou seja, não estava definida de forma inequívoca e, portanto, não se constituía como parte fundante do cálculo. Hoje o estudo de limites está associado a investigações a respeito do comportamento de funções e apresentado por quatro aspectos: descritivo, gráfico, numérico e algébrico.

Em nossa leitura inicial percebemos duas diferenças em relação a sua matemática utilizada. A primeira é que Newton em seu *Principia Matemática* volta a usar a geometria para apresentar soluções de problemas de curvaturas e a segunda é que a notação $\dot{x}o$ para representar o momento como um intervalo de tempo em *The Method of Fluxions*, no *Principia Matemática* passa a representar uma distância infinitesimal que possui uma razão primeira e última, isto é, um limite.

O próximo passos da pesquisa é investigar a razão pela qual Isaac Newton voltou a utilizar métodos geométricos e compreender o que o motivou a mudar novamente seu método matemático, isto é, do método analítico para o sintético. Esse retorno à geometria, a priori, pode ser indicio de que Newton buscava um rigor matemático para seus métodos de cálculo ou um meio para se contrapor as opiniões de outros estudiosos de sua época, por exemplo, as críticas apresentadas por Berkeley direcionadas ao seu método de fluxões.

Referências

BOYER, C. B. **Cálculo**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Higino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, v. 6, 1992.

COHEN, I. B.; WESTFALL, R. S. **Newton**: Textos, Antecedentes, Comentários. Rio de Janeiro - RJ: Contraponto, 2010.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FOLSCHEID, D.; WUNENBURGER. **Metodologia filosófica**. São Paulo: Martins Fontes, 1997. P. 29-55.

GUICCIARDINI, N. **Isaac Newton on mathematical certainty and method**. [S.l.]: Printed and bound in the United States of America., 2009.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; BICUDO, Irineu. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. *Revista Brasileira de Matemática*[S.l.], v. 2, n. 3, p. 103-117, 2002.

NEWTON, I. **De Analysi Per Aequationes Numero Terminorum Infinitas**. Londres: [s.n.], 1711.

NEWTON, I. **The Method of Fluxions and Infinite Series**: Wirth its application to the geometry of curve-lines. Tradução de John Colson. Londres: Cambridge, 1736. Disponível em: <https://archive.org/details/methodoffluxions00newt/page/n4/mode/2up>.

NEWTON, I. **Principia**: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Tradução de Trieste Ricci; Leonardo Gregory Brunet *et al.* São Paulo: Edusp, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física/SBHMat, 2015.

ZEFERINO JUNIOR, Jorge Luiz de Almeida. **Um estudo sobre o cálculo de fluxões de Isaac Newton**. Orientador: Prof. Dr. Fumikazu Saito. 2021. 94 páginas. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/24903>