



O estudo do Princípio de Cavalieri por meio da Resolução de Problemas

A study of Cavalieri's Principle through Problem Solving

Amanda Zanelato Colaço, Elisandra Bar de Figueiredo e Eliane Bihuna de Azevedo
Universidade do Estado de Santa Catarina
amandazanelatocolaco@gmail.com, elisandra.figueiredo@udesc.br e
eliane.azevedo@udesc.br
0000-0001-7334-3643, 0000-0003-2101-4009 e 0000 -0002-7075-177X

Eixo 7

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma sequência de atividades para trabalhar com o Princípio de Cavalieri por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A atividade propõe o uso de aplicativos do GeoGebra 3D e de material concreto produzido usando a impressão 3D, por serem materiais que permitem unir e fomentar a participação do aluno e do professor no estudo de um objeto matemático. Temos por hipótese que a sequência contribuirá com os processos de ensino e aprendizagem, pois, com a exploração do material concreto aliada ao conhecimento prévio dos alunos, espera-se que eles possam obter resultados que os encaminham para a conclusão do Princípio de Cavalieri. Esse processo coloca o aluno no papel central da aprendizagem e o professor atua como mediador, como prevê a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Volume de sólidos; Material concreto; GeoGebra 3D.

Abstract

This work presents a sequence of activities to work with Cavalieri's Principle through the Mathematics Teaching-Learning-Assessment methodology using Problem Solving. The activity proposes the use of GeoGebra 3D applications and concrete material built using 3D printing, as those are materials that allow uniting and driving the participation of the student and the teacher in the study of a mathematical object. Our hypothesis is that the sequence will contribute to the teaching and learning processes, since, through the exploration of the concrete material along with the students' previous knowledge, they are expected to achieve results that will lead them to the conclusion of Cavalieri's Principle. This process gives the student the main role in learning, while the teacher mediates, as predicted by the Problem-Solving teaching methodology.

Keywords: Volume of solids; Concrete material; GeoGebra 3D.

Introdução

O modelo tradicional de ensino, centrado na narrativa docente, tem sido alvo de discussões no que diz respeito à sua eficácia. A concepção do professor como o detentor do conhecimento e do aluno como um ser passivo, tratada como um estudo pronto e acabado, tem gerado questionamentos (CARPES; CARPES, 2020). Em contrapartida, nos últimos anos metodologias ativas têm conquistado espaço na Educação Matemática, nas quais o aluno torna-se um ser ativo que tem grande participação nos processos de ensino e aprendizagem, enquanto o professor exerce o papel de mediador.

Muitas pesquisas na área têm direcionado os docentes focar em estratégias de inovação e aplicação das metodologias de ensino de modo a tornar de fato o discente ativo na construção da sua aprendizagem. Contudo, por muitos, essas mudanças ainda são sinônimo de resistência, pois excede a forma tradicional de ensino, geralmente aceita sem questionamentos, que limita-se a ideia rotineira da transferência do conteúdo para o quadro, memorização e posterior reprodução em avaliações, em que a sensação de aprendizado é inexistente quando é preciso aplicar o conteúdo em novas situações, demonstrando assim que esse é um mecanismo de ensino a ser revisto, já que a aprendizagem não ocorre de forma relevante e duradoura (MOREIRA, 2010).

As novas práticas, cuja atuação discente é ativa, tem sido mencionadas nos documentos curriculares brasileiros, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e apresentam a resolução de problemas como uma estratégia atual para a aprendizagem matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021). Além da resolução, a BNCC também traz a necessidade de se trabalhar com a formulação de problemas, propondo a perspectiva de que os problemas matemáticos sejam elaborados também pelos estudantes, e não somente pelo professor (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022). No Ensino Fundamental, a BNCC propõe o desenvolvimento do letramento matemático, associado às competências e habilidades que contribuam para a formulação e a resolução de problemas em diferentes contextos (BRASIL, 2018, p. 266). Já para a etapa subsequente, o documento indica que o Ensino Médio tem o intuito de incentivar “processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 529).

Nesse trabalho apresentamos uma sequência de atividades com foco no estudo do volume de sólidos pelo Princípio de Cavalieri. As atividades da sequência utilizam material concreto e aplicativos do GeoGebra, e sua aplicação segue os passos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Referencial Teórico

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, tornando-se jesuado aos 15 anos de idade. Em sua trajetória acadêmica, foi aluno de Galileu e atuou como docente de matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano em que faleceu. Uma

de suas obras publicadas mais influentes é o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em 1635. Nesse trabalho, Cavalieri apresenta o método dos indivisíveis, que remonta traços das ideias de Demócrito e Arquimedes, mas que possui motivação direta nas tentativas de Kepler de achar áreas e volumes (EVES, 2011).

As observações de Cavalieri foram formalizadas nos chamados Princípios de Cavalieri para o cálculo de áreas e de volumes. Em especial, para o cálculo de volumes, o princípio conceitua que “se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante” (EVES, 2011, p.426).

Esse princípio é um teorema que pode ser demonstrado, mas exige conceitos avançados de Cálculo Integral moderno e por isso, geralmente é considerado como um axioma. Inclusive, Pontes (2014) indica que problemas matemáticos sobre áreas e volumes, que precisam de Cálculo para sua solução, podem ser resolvidos por alunos do Ensino Médio graças a existência do Princípio de Cavalieri.

Allevato e Onuchic (2021, p. 37) afirmam que a Resolução de Problemas é considerada o “coração” da atividade matemática, que é fundamental para a construção de novos conhecimentos, e reciprocamente, novos conhecimentos possibilitam a formulação e resolução de novos problemas. A Formulação de Problemas é uma prática que propõe o aluno como formulador do problema matemático, e não o professor, o que permite o desenvolvimento de seu raciocínio matemático crítico. Cabe ressaltar ainda, que nesse processo, os estudantes também desenvolvem a autenticidade, motivação intrínseca ou extrínseca, significados e conceitos matemáticos (ALTOÉ, 2017), o que muitas vezes não é possível de ser abordado somente através da resolução de problemas.

Ao formular problemas são percorridos três procedimentos fundamentais: formular, resolver e melhorar (RAMÍREZ, 2006 apud DUARTE, 2020). Inicia-se na etapa de Formulação de Problemas, na qual é feita a estruturação do problema matemático junto aos dados numéricos necessários. Em seguida, tem-se a Resolução do Problema, em que o discente efetivamente resolverá o problema que elaborou, e às vezes, precisará retornar a etapa anterior para o aprimoramento desse. Na etapa seguinte, de Melhorias do Problema, o objetivo será analisar o problema formulado, de modo a considerar correções, grau de complexidade e melhorias, bem como sua adequação ao objetivo traçado. Caso esse último não ocorra, é possível recomeçar na etapa de Formulação de Problemas, excluindo o que foi feito anteriormente, ou retornar a etapa de Melhorias do Problema.

Uma metodologia que abrange e relaciona a resolução e a formulação de problemas é a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na qual a Formulação de Problemas constitui uma das etapas finais do roteiro proposto. Esse roteiro é constituído por dez etapas: proposição do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária, busca de consenso, formalização do conteúdo, proposição e resolução de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p.47). A palavra composta inicial que nomeia a metodologia (ensino-aprendizagem-avaliação) tem como finalidade apresentar a perspectiva em que “o ensino, aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p.43) ao longo da execução das etapas do roteiro. Nesse processo, e em especial ao formular novos problemas, o aluno amplia a compreensão e habilidade de conteúdos matemáticos básicos, e consegue demonstrar a sua percepção sobre os problemas por meio das estratégias adotadas, que são resultado de sua experiência matemática. Ou seja, a formulação torna-se uma extensão natural da resolução de problemas, caracterizando a experiência matemática completa evidenciada por Polya (2006, apud SILVA, 2020).

Convém ainda destacar, que com o intuito de aprimorar a resolução e a formulação de problemas em sala de aula, o uso de tecnologias pode proporcionar aos estudantes “alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações” (BRASIL, 2018, p.536).

Nesse contexto o GeoGebra e o material concreto têm grande potencial no sentido de auxiliar os processos de ensino e aprendizagem de matemática. O software GeoGebra permite diferentes representações de um mesmo objeto matemático, visualizado de forma algébrica, gráfica e numérica simultaneamente, que pode proporcionar aos alunos uma atividade de exploração e descobertas por conta própria, ou ser um meio de criação de materiais didáticos pelos próprios professores (PREINER, 2008). Relacionar as representações virtuais dos sólidos geométricos no GeoGebra com sua versão em material concreto pode ampliar as interpretações de conteúdos matemáticos muitas vezes difíceis de serem abstraídos. Diante disso, embora muitos educadores já tenham usado modelos tridimensionais construídos com diferentes materiais por séculos (SLAWKOVSKY, 2012), novas tecnologias, como a impressão 3D, se mostram cada vez mais acessíveis

para a produção de objetos físicos para várias áreas da educação, como na matemática. Com essa perspectiva desenvolvemos materiais concretos usando a impressão 3D, aplicativos no GeoGebra e elaboramos uma sequência de atividades que prevê o uso dessas ferramentas aliadas a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas para estudar o Princípio de Cavalieri.

Metodologia de Pesquisa

O estudo descrito nesse artigo propomos uma sequência de atividades para o ensino de volumes, no Ensino Médio ou em cursos de formação de professores, tendo como foco o Princípio de Cavalieri. A pesquisa está inserida num projeto que tem como objetivo o desenvolvimento de materiais concretos usando a tecnologia da impressão 3D e de aplicativos dinâmicos no GeoGebra para melhorar os processos de ensino e aprendizagem de matemática. Dessa forma, as potencialidades e perspectivas de aplicação apresentadas foram realizadas a partir de pesquisas em dissertações e artigos em torno dessa temática. Assim, essa investigação caracteriza-se como qualitativa onde a “fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (BODGAN; BIKLEN, 2006, p. 24). Além disso, é de natureza exploratória, pois objetiva “maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito, construindo hipóteses; envolvendo levantamento bibliográfico” (GIL, 2002), presente, por exemplo, na investigação das potencialidades e limitações das ferramentas tecnológicas que serão exploradas para o ensino de matemática, bem como o impacto dessas ferramentas na abordagem da matemática.

Nossa proposta foi adaptada do trabalho desenvolvido por Cunha (2019), sendo que a sequência de atividades é constituída de seis momentos baseados no roteiro sugerido pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), conforme retratado no Quadro 1.

Quadro 1: Momentos da sequência de atividades

Momento 1	Propor uma pesquisa sobre a vida e contribuições de Cavalieri.
Momento 2	Apresentar os sólidos geométricos (material concreto) e solicitar o preenchimento de um questionário a respeito desses.
Momento 3	Compartilhar e discutir os resultados obtidos nos Momentos 1 e 2.
Momento 4	Formalizar o conteúdo do Princípio de Cavalieri.
Momento 5	Solicitar o cálculo do volume da esfera, através de uma anticlépsidra.
Momento 6	Propor atividades que envolvam a Formulação de Problemas.

Fonte: Autoras (2022).

Descrição da sequência de atividades

O momento 1, caracterizado como uma pesquisa extraclasse, deve ser solicitado com no mínimo uma semana de antecedência da aplicação da sequência didática, e visa resgatar historicamente dados da jornada pessoal e acadêmica de Bonaventura Cavalieri, tendo como foco perceber a importância de seus feitos (CUNHA, 2019).

O momento 2 propõe uma atividade prática, que utiliza sobretudo da percepção tátil, pois os alunos devem identificar medidas e calcular áreas e volumes de sólidos. Os materiais concretos podem ser produzidos com materiais diversos, mas é preciso cuidado para manter as medidas para que os alunos possam aplicar o Princípio de Cavalieri. Os materiais que utilizamos nas nossas práticas foram elaborados com a tecnologia de impressão 3D, e nesse caso seria interessante mencionar em sala o funcionamento e a aplicação da impressão 3D na construção dos sólidos, pois é um assunto que gera interesse e motivação nos alunos, como constatou Cunha (2019). Os materiais usados nessa etapa são um cilindro, um paralelepípedo, um cone e uma pirâmide, sendo que o cone e a pirâmide podem ser separados em uma parte menor e um tronco cortados numa mesma altura nos dois sólidos, conforme a Figura 2 a.

Figura 2: Sólidos confeccionados em impressão 3D

a) pirâmide, cone, cilindro e paralelepípedo



b) esfera e anticlípsidra



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC¹, 2019.

Reunidos em grupos, os estudantes devem receber um conjunto com esses sólidos, e em seguida, responder ao questionário do Quadro 2. Os sólidos de cada conjunto devem ter a mesma altura e, ainda, o cilindro e o paralelepípedo ter áreas de base igual, bem como o cone e a pirâmide. Espera-se que por meio do estudo dos sólidos, os alunos cheguem às conclusões matemáticas conceitualmente descritas no Princípio de Cavalieri, apesar de não haver a formalização do conteúdo ainda. Durante esse processo, é essencial que os estudantes compreendam com clareza conceitos matemáticos de área e volume,

¹ Laboratório de Ensino onde são desenvolvidos materiais para o ensino de Matemática.

para que assim seja possível realizar as interpretações e constatações adequadas na atividade. Desse modo, é pertinente considerar o estudo prévio desses conteúdos.

Ao finalizar a momento 2, seguindo as etapas da metodologia de Resolução de Problemas, os grupos devem compartilhar seus resultados, enfatizando as estratégias utilizadas nos cálculos e suas opiniões sobre as conclusões alcançadas, constituindo o momento 3 da nossa sequência. Em meio a discussão, quando dificuldades vierem à tona, o professor deve incentivar o compartilhamento de métodos e ideias entre os alunos para saná-las. Análogo ao debate, relembrar a pesquisa do momento 1 e incentivar o compartilhamento das informações adquiridas, ressaltando os feitos de Cavalieri no cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos, relacionando esses dados com os resultados obtidos no questionário.

Quadro 2: Questionário

1 - Considere o cilindro e o paralelepípedo recebidos:

a) Meça os elementos necessários para calcular a área da base do cilindro e do paralelepípedo. Preencha os valores no Quadro 1.

b) Calcule a área dessas bases e preencha o Quadro 1. O que você pode concluir sobre as áreas obtidas?

Quadro 1 - Medidas do Cilindro e Paralelepípedo

Cilindro		Paralelepípedo	
Medidas		Medidas	
Área da Base		Área da Base	
Conclusão:			

c) Qual o volume do cilindro? E do paralelepípedo?

2 - Considere o cone e a pirâmide recebidos:

a) Meça os elementos necessários para calcular a área da base do cone, do tronco do cone, da pirâmide e do tronco da pirâmide. Preencha os valores no Quadro 2.

b) Calcule a área dessas bases e preencha o Quadro 2. O que você pode concluir sobre as áreas obtidas?

Quadro 2 - Medidas do Cone e Pirâmide

Cone		Pirâmide	
Medidas		Medidas	
Área da base		Área da base	
Área da seção		Área da seção	
Conclusão			

c) Qual o volume do cone? E da pirâmide?

3 - O que você pode concluir com a comparação entre os volumes do cilindro e do paralelepípedo? E a comparação entre o cone e a pirâmide?

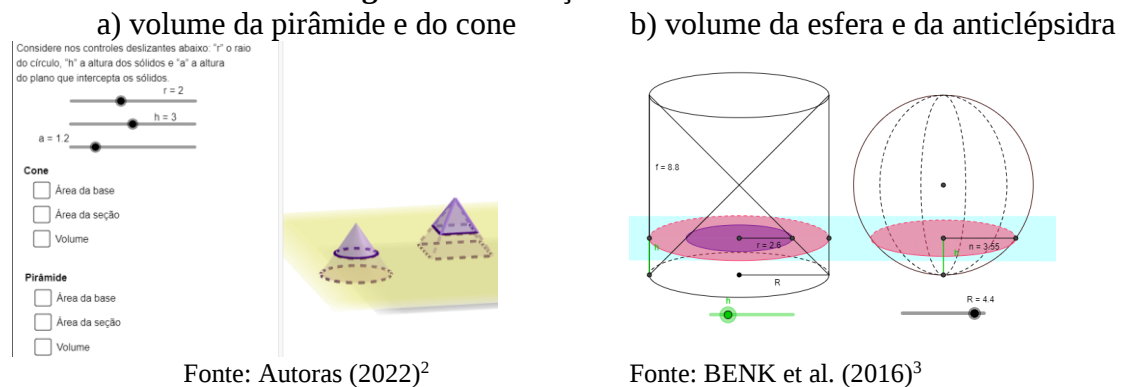
Fonte: Adaptado de Cunha (2019).

O momento 4 consiste na etapa da formalização do conteúdo, no caso o Princípio de Cavalieri, de modo a confirmar as suspeitas feitas pelos alunos sobre os volumes dos sólidos geométricos por eles calculados (CUNHA, 2019). Para isso, sugerimos usar a discussão feita no momento anterior, considerando as dificuldades apresentadas pelos estudantes nas atividades e os métodos mais utilizados por eles (e que foram adequados para os resultados matemáticos), assim a linguagem e a estratégia para ensinar o conteúdo será melhor entendida pela turma. Além disso, sugerimos o uso do GeoGebra 3D (por exemplo um aplicativo como o da Figura 3a) e/ou o material concreto, já que essas

ferramentas possibilitam “ao professor abordar um modelo estático e físico que mostra a realidade do problema e um modelo dinâmico e computacional” (BENK et al., 2016) que mostra o Princípio de Cavalieri.

Os momentos 5 e 6 correspondem a última etapa do roteiro de Resolução de Problemas (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014): Proposição e Resolução de novos problemas. No momento 5 apresentamos um novo problema, que consiste na determinação do volume da esfera utilizando volumes conhecidos do cilindro e do cone. Almejamos que os alunos, com o conteúdo formalizado, possam verificar as hipóteses do Princípio de Cavalieri, tanto no material concreto (Figura 2b) como no aplicativo disponibilizado (Figura 3b).

Figura 3: Simulações no GeoGebra



Fonte: Autoras (2022)²

Fonte: BENK et al. (2016)³

O momento 6, por sua vez, envolve a formulação de problemas pelos alunos, podendo ser implementada através de questões com condições pré-definidas pelo professor, ou então mais abertas, que possibilitam maior intervenção criativa do aluno, e que por vezes, pode permitir maior variedade de soluções. Ao propor essa prática, os alunos são convidados a utilizar seus conhecimentos prévios e a resgatar suas experiências matemáticas, aspectos essenciais para desenvolver o raciocínio matemático necessário para a formulação de problemas, pois o aluno transitará entre um resolvidor e um formulador de problemas.

Conclusões

A sequência didática apresentada contempla as etapas do roteiro da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

² <https://www.geogebra.org/m/d6dbudzb>

³ <https://www.geogebra.org/m/TbUDpCCt>

Desse modo, junto à metodologia, o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes também é apresentado aos estudantes de forma dinâmica e tecnológica, fazendo uso de materiais concretos e do GeoGebra 3D. Através disso, o aluno tem a oportunidade de atuar ativamente no estudo do conteúdo, como protagonista, podendo desenvolver suas habilidades por meio de ferramentas não convencionais, que pode fazê-lo vivenciar uma nova maneira de se efetuar os cálculos, desde que os sólidos possuam as características necessárias (CUNHA, 2019).

O material concreto e o GeoGebra 3D possibilitam uma melhor interpretação e exposição do conteúdo matemático, visto que, diferentemente de um ambiente com lápis e papel, que limitam a visualização de estudos mais complexos, evita a reprodução automática de fórmulas sem um significado conceitual (LEMKE, SIPLE, FIGUEIREDO, 2016). Além disso, a respeito desse último aspecto, o próprio Princípio de Cavalieri é uma ferramenta útil para o desprendimento de decorebas e repetições de fórmulas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao grupo de pesquisa PEMSA e à agência de financiamento FAPESC.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

ALTOÉ, Renan Oliveira. **Formulação de Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo no Ensino Fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas**. 2017. 229 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

BENK, Polyana; SILVA, Sérgio Marconi da; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. In: COLÓQUIO-LUSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO, 2., 2016, Joinville. **Anais [...]**. Joinville: 2016. p. 1-12.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: Mecseb, 2018.

CARPES, Patrícia Pujol Goulart; CARPES, Charles Quevedo. Criar e resolver problemas: habilidades para serem mobilizadas com licenciandos em matemática. **Remat: Revista**

Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, v. 6, n. 2, p. 2008, 16 out. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4224/2759>. Acesso em: 28 fev. 2022.

CUNHA, Luiz Gustavo. **Cálculo de Volumes Usando o Princípio de Cavalieri Mediado por Materiais Concretos**. 2019. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019.

DUARTE, Edna Mataruco. **O desenvolvimento de jogos educacionais digitais sob a perspectiva de Formulação de Problemas e a aprendizagem no Ensino Superior**. 2020. 245 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: UNICAMP, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2002.

LEMKE, Raiane; SIPLE, Ivanete Zuchi; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. OAs para o Ensino de Cálculo: potencialidades de tecnologias 3d. **Renote: Novas Tecnologias na Educação**, [S.L.], v. 14, n. 1, p. 1-10, 26 ago. 2016. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/67355/38450>. Acesso em: 25 fev. 2022.

MOREIRA, Marco Antonio. Abandono da Narrativa, Ensino Centrado no Aluno e Aprender a Aprender Criticamente. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIAS DA SAÚDE E DO AMBIENTE, 2., 2010, Niterói. **Anais [...]**. Niterói: 2010. p. 1-12. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/Abandonoport.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2022.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 13 set. 2021.

POSSAMAI, Janaína Poffo; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Elaboração/Formulação/Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 6, n. 12, p. 1-28, 22 fev. 2022. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/4726>. Acesso em: 28 fev. 2022.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. (Dissertation in Mathematics Education Faculty of Natural Sciences). University of Salzburg, Salzburg, 2008.

SILVA, Marcos Manoel da. **Formulação de Problemas: o que nos revela um mapeamento realizado nas publicações em artigos, dissertações e teses**. 2020. 89 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2020.

SLAVKOVSKY, ELizabeth. **Ann. Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Harvard, Cambridge, USA, 2012.