

FUNÇÃO TRANSCENDENTE COM MÚLTIPLAS VARIÁVEIS OTIMIZADA PELA COMPUTAÇÃO BIOINSPIRADA

TRANSCENDENT FUNCTION WITH MULTIPLE VARIABLES OPTIMIZED BY BIO-INSPIRED COMPUTING

Heictor Alves de Oliveira Costa[1]
Universidade Federal do Pará – UFPA Campus Belém / heictor8@gmail.com
Denis Carlos Lima Costa[2]
Instituto Federal do Pará – IFPA Campus Ananindeua / denis.costa@ifpa.edu.br
Flávio Oliveira Dias[3]
Instituto Federal do Pará – IFPA Campus Ananindeua / diasflavio95@gmail.com
Erick Freitas da Costa[4]
Instituto Federal do Pará – IFPA Campus Ananindeua / efreitas256@gmail.com
Adriane Cristina Fernandes Reis[5]
Instituto Federal do Pará – IFPA Campus Ananindeua / adriane.fr22@gmail.com

Área Temática 02:
ESTUDOS DE LINGUAGEM NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Modalidade: Artigo completo

1. Introdução

Uma Função Transcendente, nos estudos matemáticos, é aquela função que não pode ser descrita a partir de um conjunto finito de operações algébricas. Essas funções são evidenciadas por termos algébricos utilizando-se as Séries Infinitas. Na Matemática, o termo transcendente significa não algébrico (Chapra, 2018).

O uso moderno da Função Transcendente possibilitou aplicações à Ciência e Tecnologia. Esta função foi plenamente desenvolvida até 1925 por Pólya e Szegö (1925), além disso, graças aos algoritmos implementados por Corless et al (1993), esta função passou a ser amplamente empregada no final do Século XX.

À vista disso, este trabalho apresenta uma estratégia para otimizar a Função Transcendente com mais de uma variável, utilizando para isso a técnica fundamentada em Computação Bioinspirada, denominada Otimização por Enxame de Partículas (OEP).

2. Metodologia

2.1 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática está relacionada aos termos como sistema, modelo e simulação (Costa D. C. L. et al, 2021). Nesse artigo, o modelo utilizado foi o transcendente.

Para Costa H. A. O. et al (2021), a OEP pode ser representada como um conjunto de partículas que navegam por um espaço de soluções, o principal elemento deste método é a troca de informações entre partículas na população, o que permite uma mobilização coletiva para encontrar a solução ótima.

A função de avaliação é dada por $\boldsymbol{f(x_i, a)}$, sendo $\boldsymbol{x_i}$ a posição de uma partícula a na iteração $\boldsymbol{i}$, e o resultado representa a pontuação dessa solução, quanto maior a pontuação, maior a probabilidade dessa solução ser tomada como um ótimo global, conforme a Expressão (1).

$$a_n x = \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Em que $\boldsymbol{n}$ é o índice da partícula, e $\boldsymbol{m}$ é o número de dimensões trabalhadas.

A posição em que a velocidade é atualizada a cada iteração da OEP é um parâmetro essencial para a composição de cada partícula. Esse parâmetro é representado pela Expressão (2).

$$v_{i+1} = wv_i + c_1.r_1.(p_i - x_i) + c_2.r_2.(g - x_i) \tag{2}$$

Sendo $\boldsymbol{wv_i}$ é o termo de inércia, cujo objetivo é manter a partícula na direção atual, sendo $\boldsymbol{w}$ o coeficiente que define o peso deste elemento.

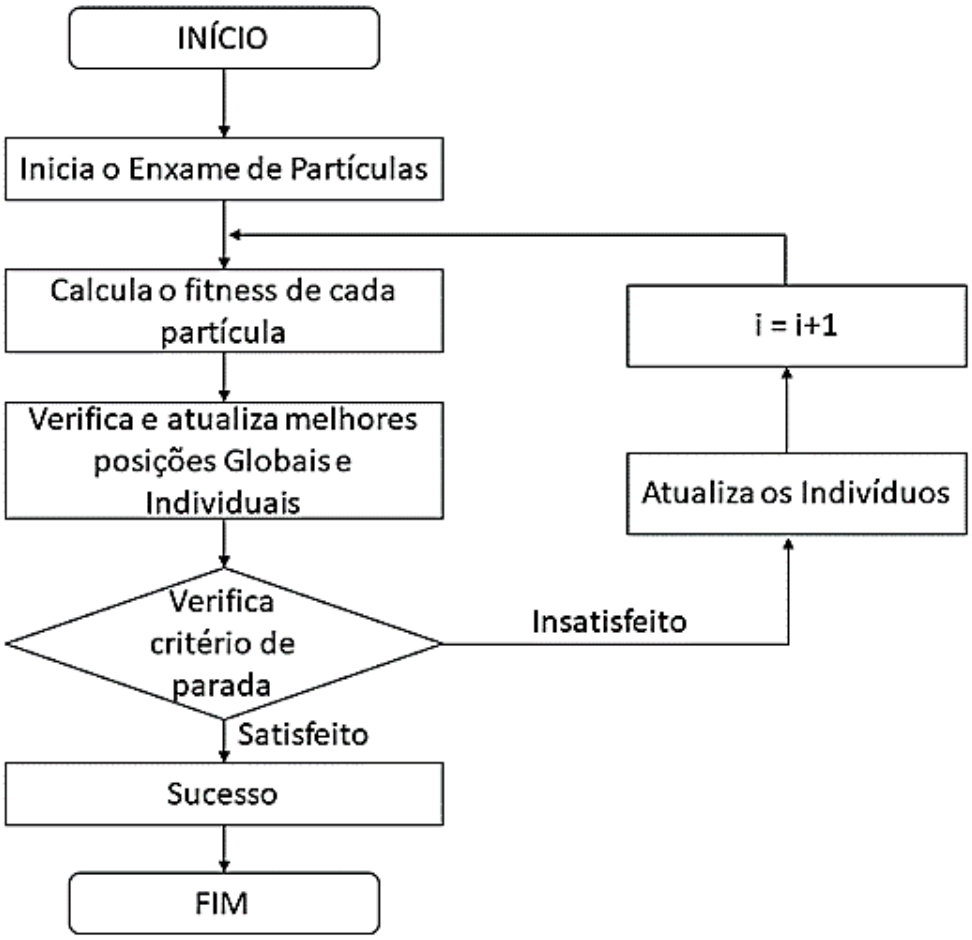
O termo $\boldsymbol{c_1 \cdot r_1 \cdot (p_i - x_i)}$ é definido como o termo cognitivo, ele atualiza a prioridade da melhor posição destinada pela partícula, em que $\boldsymbol{r_1}$ é o valor aleatório entre 0 e 1, $\boldsymbol{c_1}$ é o coeficiente do termo cognitivo e $\boldsymbol{p_i}$ é a melhor posição que a partícula $\boldsymbol{a_i}$ ocupou.

O termo social é definido por $\boldsymbol{c_2 \cdot r_2 \cdot (g - x_i)}$, ele indica a forma oposta ao termo cognitivo, priorizando o melhor valor de posição, encontrado pela população, sendo $\boldsymbol{r_2}$ um número aleatório entre 0 e 1, $\boldsymbol{c_2}$ é o coeficiente do termo social e $\boldsymbol{g}$, a melhor posição global do enxame.

2.2 Modelagem Computacional

Aplicou-se, nesta pesquisa, o modelo computacional apresentado por Costa H. A. O. et al (2021). Este modelo, desenvolvido em linguagem MATLAB de programação beneficia-se do processo de computação paralela, o que garantirá maior eficiência no processamento dos algoritmos. Este fato possibilita processar as partículas individualmente e em paralelo, não havendo prejuízo à qualidade dos resultados e ainda, maximizando a eficiência da OEP (Costa D. C. L. et al, 2021). A Figura 1 representa o fluxograma da OEP.

Figura 1: Funcionamento da OEP



Fonte: Costa H. A. O. et al, 2021.

3. Resultados e Discussões

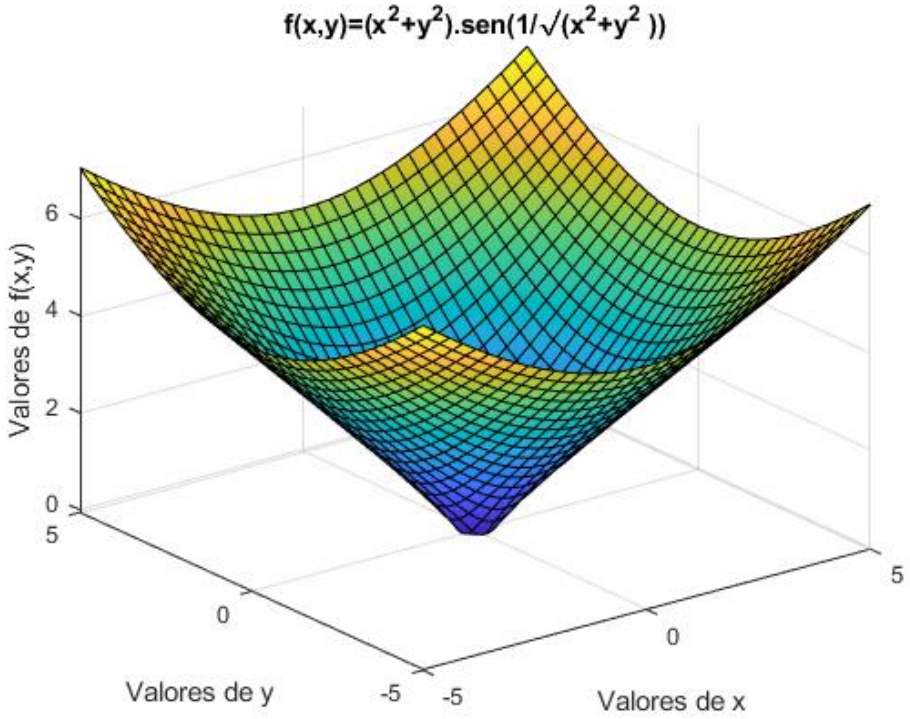
Caso 1: A Função de Avaliação, ou Função *fitness*, utilizada nesse estudo, está apresentada na Expressão (3).

$$f(x,y) = (x^2 + y^2).sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (3)$$

Essa função apresenta uma descontinuidade em $f(0,0)$ e, desta forma, realçará a relevância da aplicação de um método bioinspirado, como a OEP.

A Figura 2 representa o comportamento gráfico da Expressão (3). A variação cores indica o movimento da função em direção ao ponto mínimo: amarela indica a região com os maiores valores; azul indica a região com os menores valores.

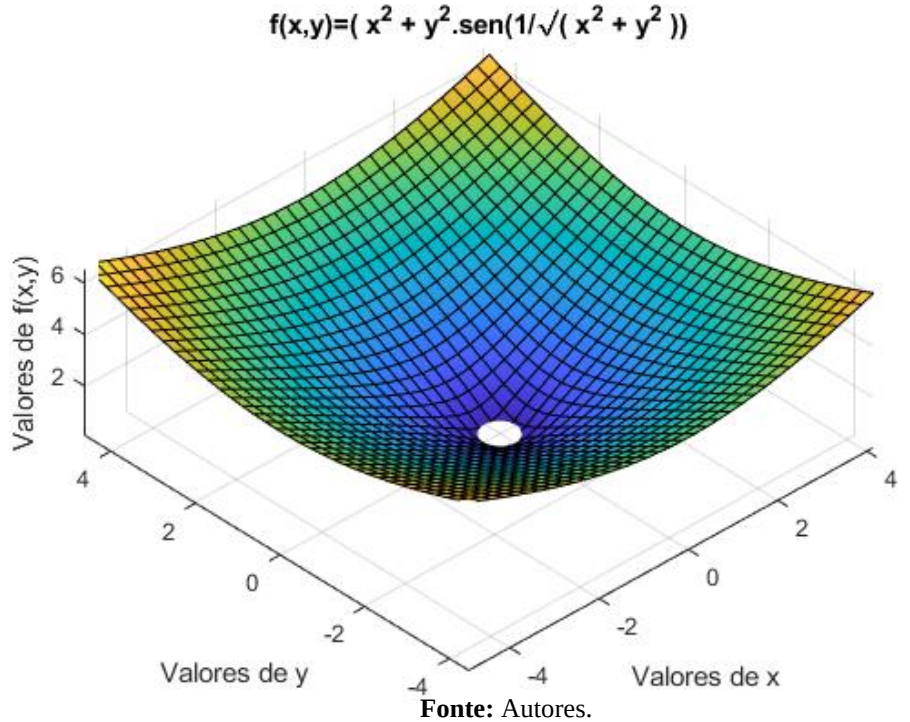
Figura 2: Função $f(x, y)$ da Expressão (3)



Fonte: Autores.

Observando-se o gráfico da Expressão (3) em múltiplas perspectivas e com uma sutil ampliação, perceberemos a descontinuidade citada. A Figura 3 destaca essas observações.

Figura 3: Função $f(x, y)$ em perspectiva 2



Fonte: Autores.

Entretanto, apesar da existência dessa restrição, os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que minimizam a função $\boldsymbol{f(x,y)}$, foram devidamente calculados pela OEP. Os resultados médios obtidos mediante o método Matemático-Computacional: $x = -0.2146; y = 0.0931$ *e* $f_{min} = -0.0496$.

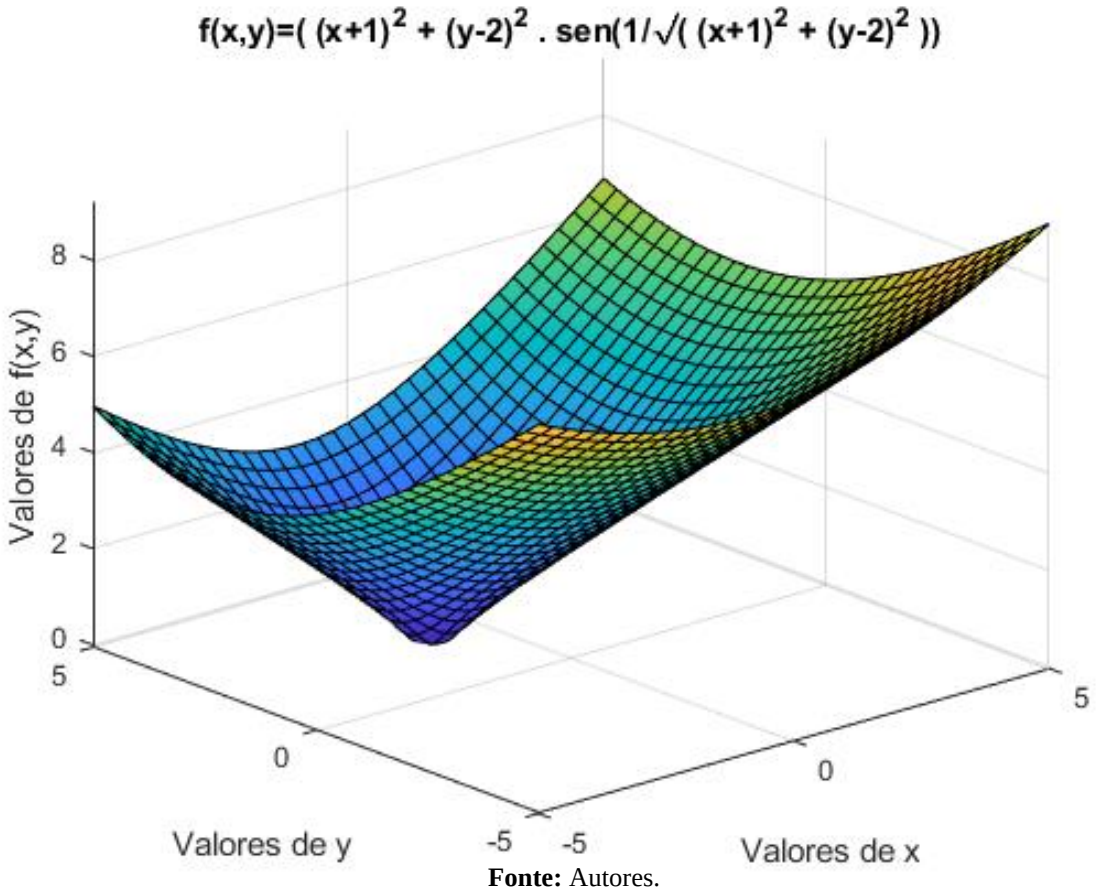
Caso 2: A segunda análise irá considerar uma translação nos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, conforme mostra a Expressão (4).

$$f_1(x,y) = [(x+1)^2 + (y-2)^2].sen\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}}\right) \quad (4)$$

Os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que minimizam a função $\boldsymbol{f_1(x,y)}$, foram devidamente calculados pela OEP. Os resultados médios obtidos mediante o método Matemático-Computacional, para essa função: $x = -1.2018; y = 1.8817$ *e* $f_{min} = -0.0496$.

As Figura 4 e 5 representam o comportamento gráfico da Expressão (4).

Figura 4: Função $f_1(x,y)$ da Expressão (4)

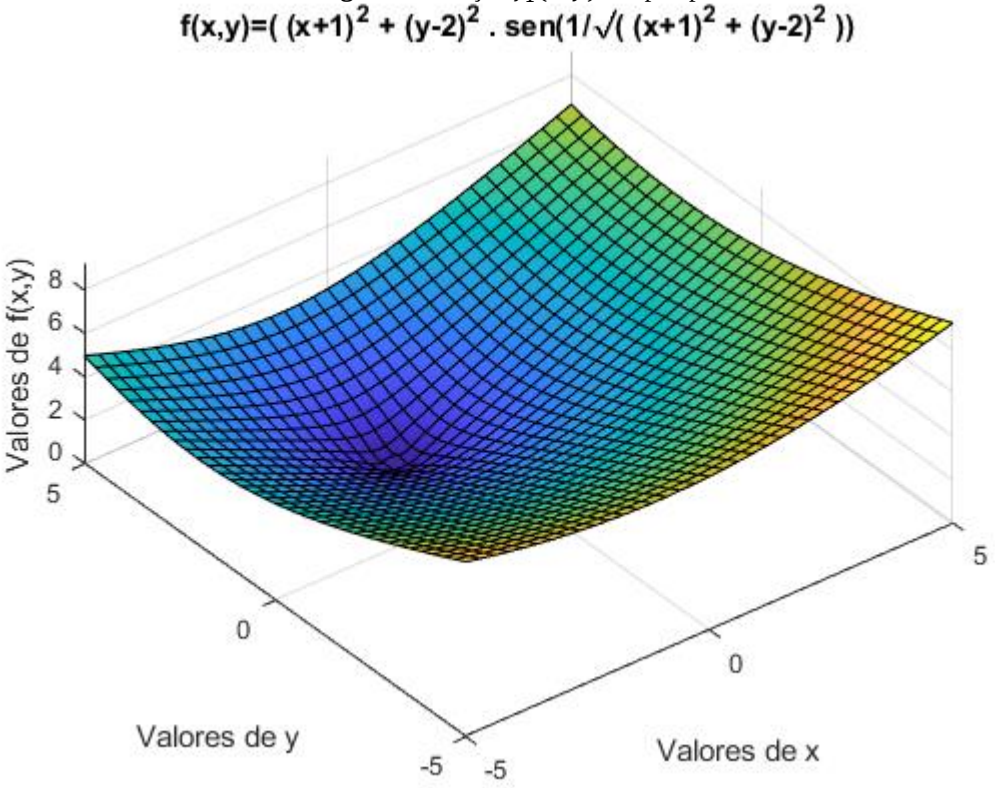


Fonte: Autores.

Para essa versão da função $f(x,y)$, não haverá região de descontinuidade nas proximidades de $f(0,0)$.

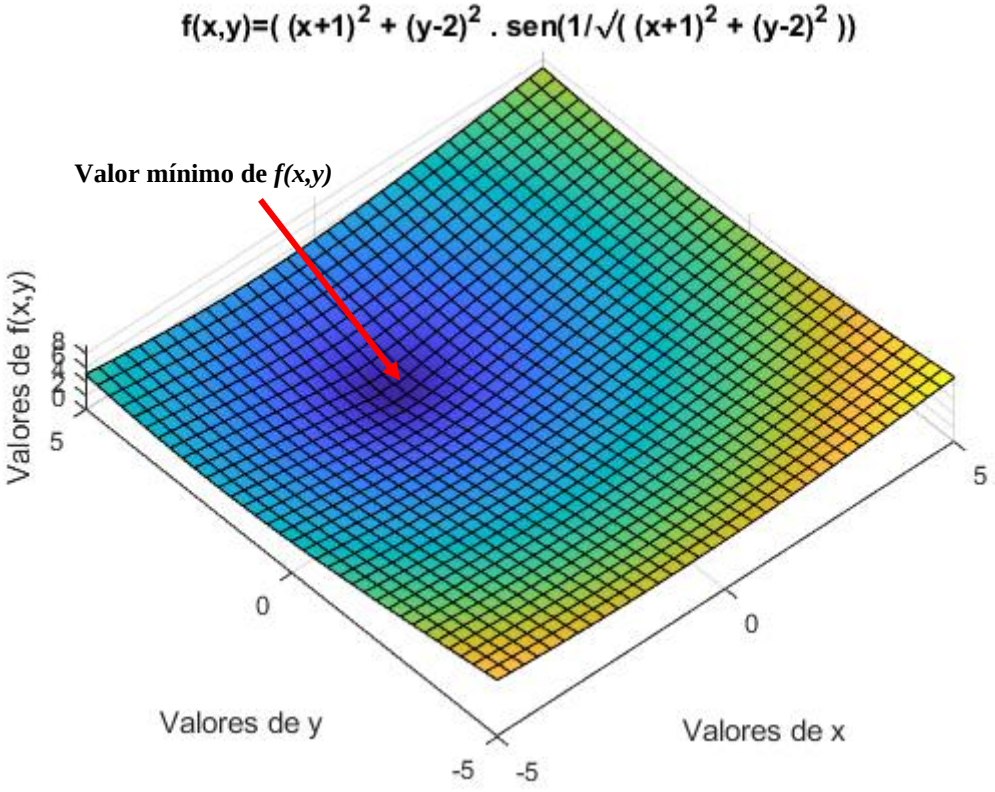
Pode-se observar, com excelente precisão, nas Figuras 5 e 6, que a zona de restrição foi corrigida com a translação dos valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, nos seus respectivos eixos.

Figura 5: Função $f_1(x, y)$ em perspectiva 2



Fonte: Autores.

Figura 6: Função $f_1(x, y)$ em perspectiva 3



Fonte: Autores.

Caso 3: A Função de Avaliação, ou Função *fitness*, utilizada nesse estudo, está apresentada na Expressão (5).

$$g(x,y) = \ sen(x^2 + y^2) \tag{5}$$

Os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que minimizam a função $\boldsymbol{g(x,y)}$, foram devidamente calculados pela OEP. Os resultados médios obtidos mediante o método Matemático-Computacional, para essa função:

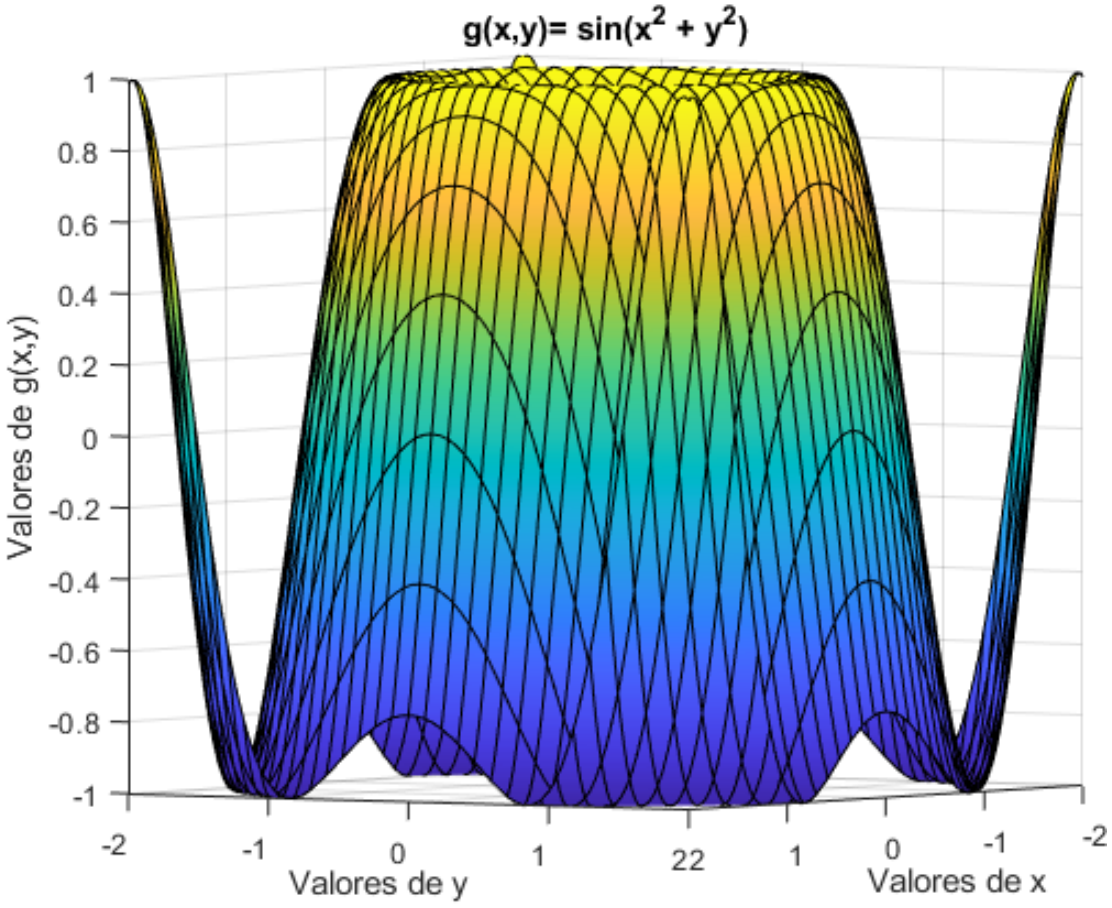
$$x = 1.9312;$$

$$y = 5.6920$$

$$f_{min} = -1.0000.$$

As Figura 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 representam o comportamento gráfico da Expressão (5), considerando as mais diversas perspectivas.

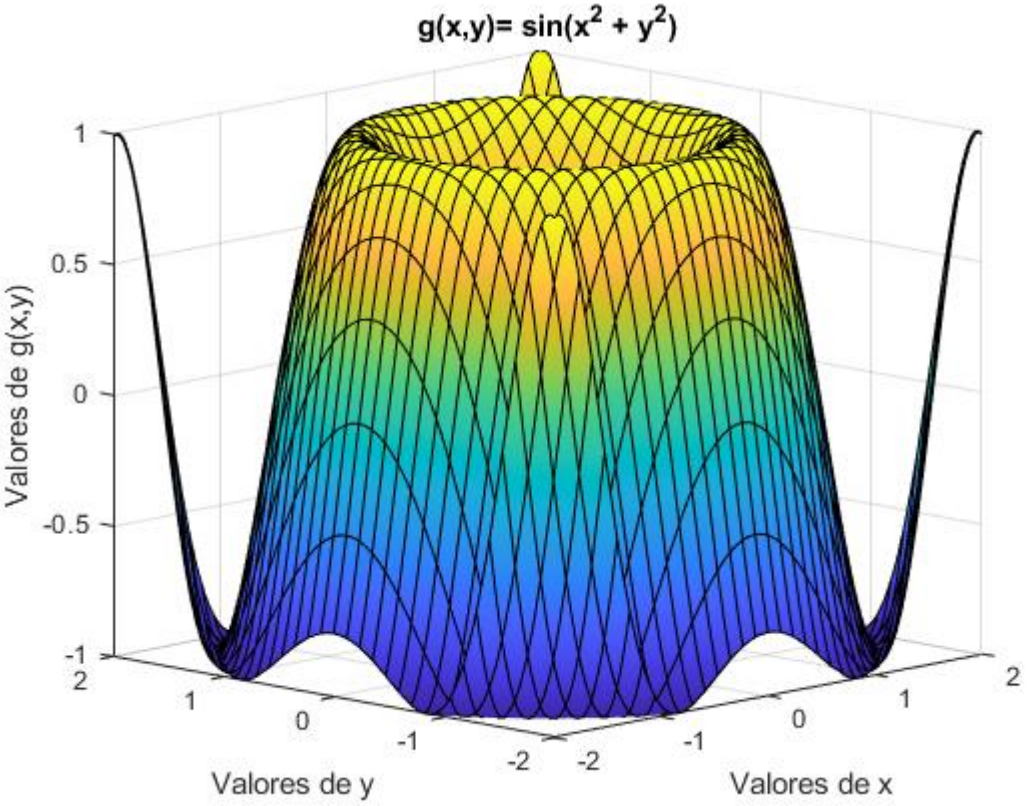
Figura 7: Função $g(x,y)$ em perspectiva 1



Fonte: Autores.

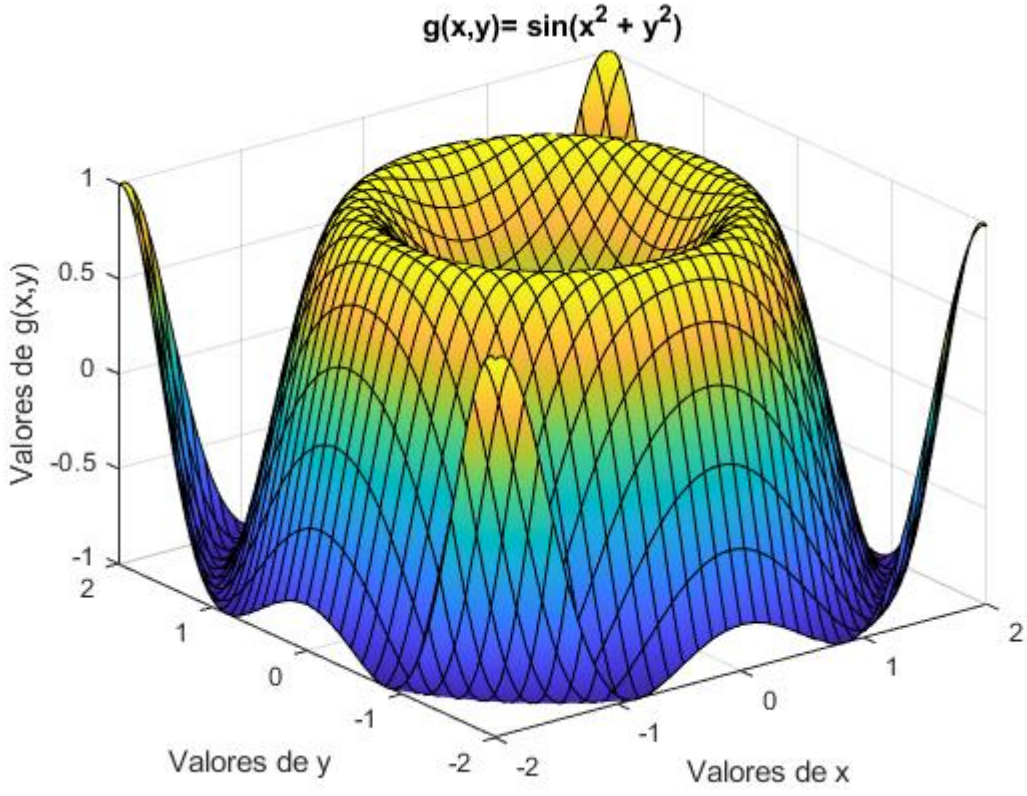
A perspectiva 1 mostra o comportamento da função $\boldsymbol{g(x,y)}$ destacando o plano $\boldsymbol{z}$.

Figura 8: Função $g(x, y)$ em perspectiva 2



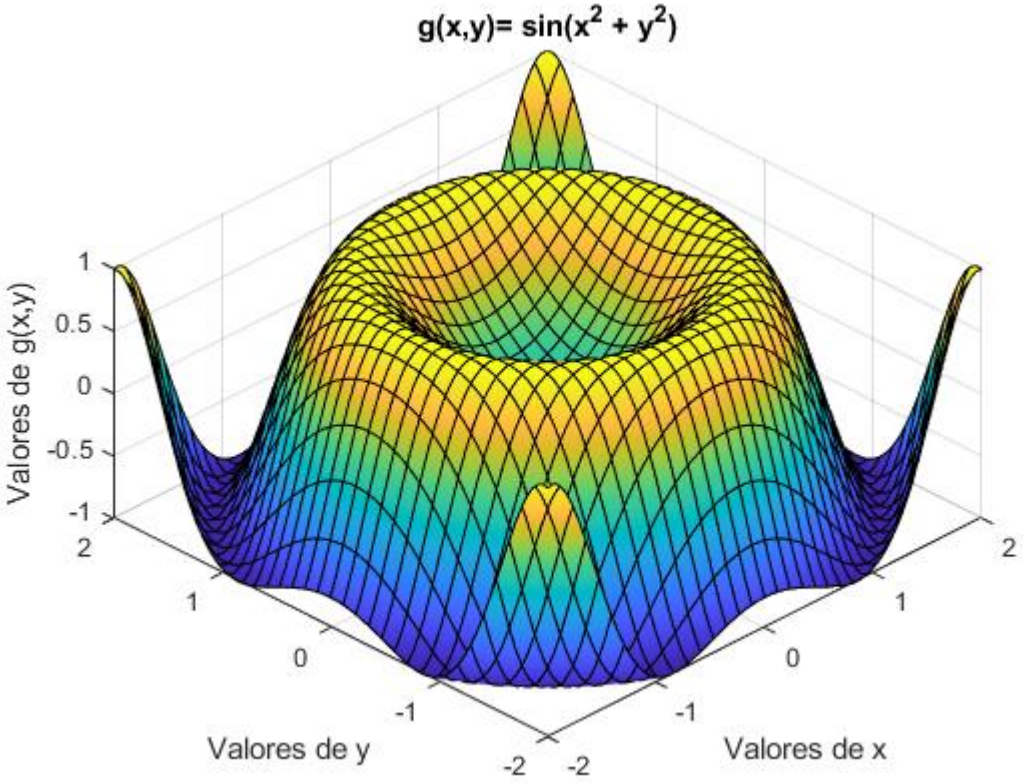
Fonte: Autores.

Figura 9: Função $g(x, y)$ em perspectiva 3



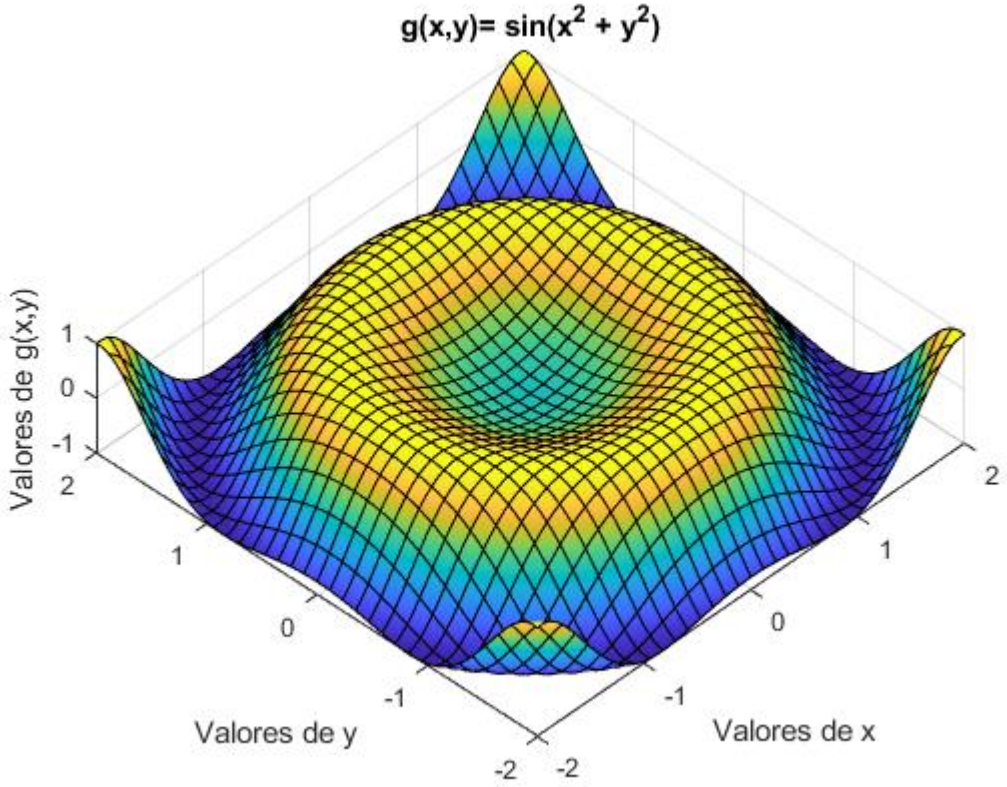
Fonte: Autores.

Figura 10: Função $g(x, y)$ em perspectiva 4



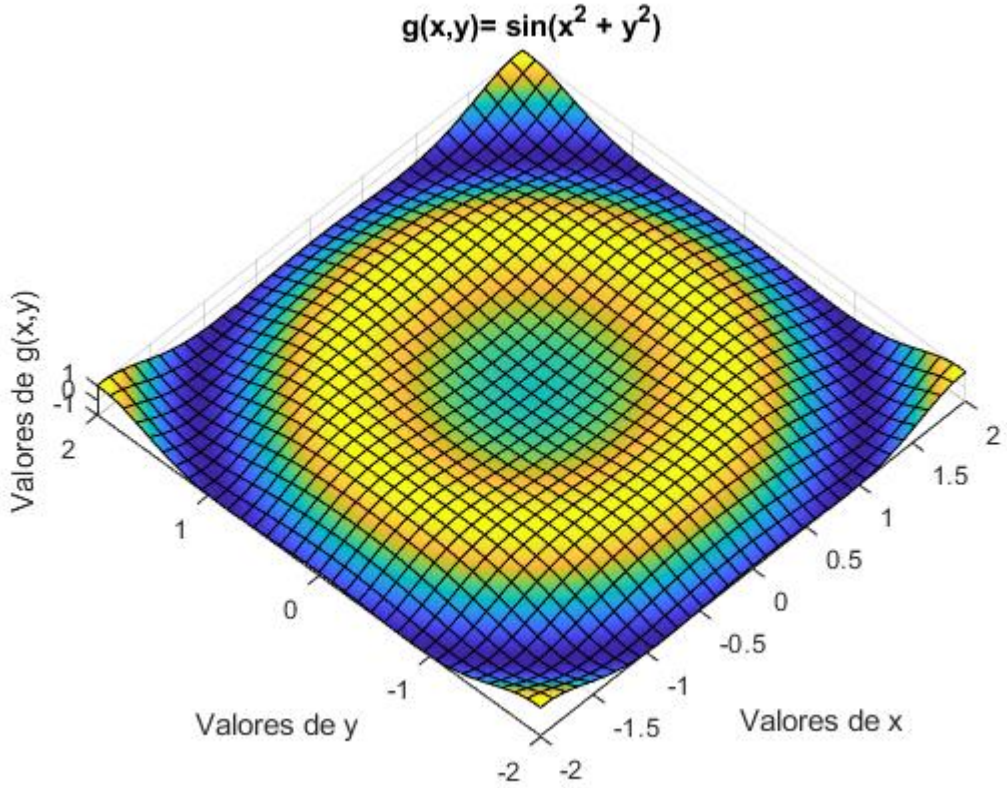
Fonte: Autores.

Figura 11: Função $g(x, y)$ em perspectiva 5



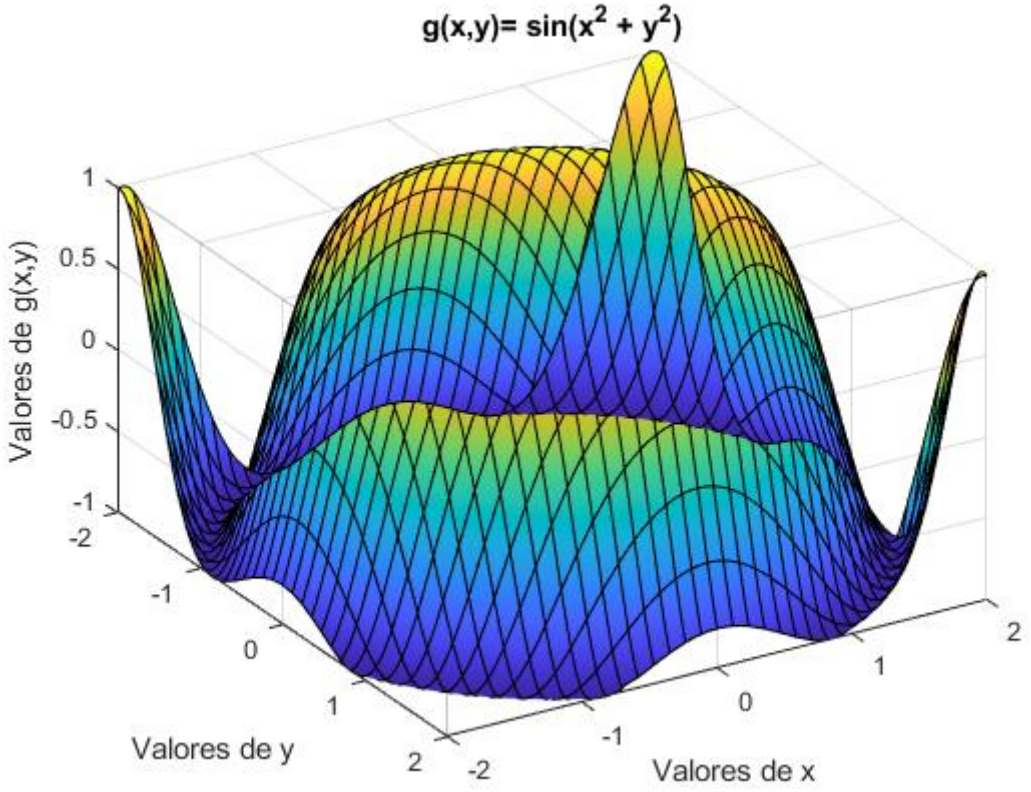
Fonte: Autores.

Figura 12: Função $g(x, y)$ em perspectiva 5



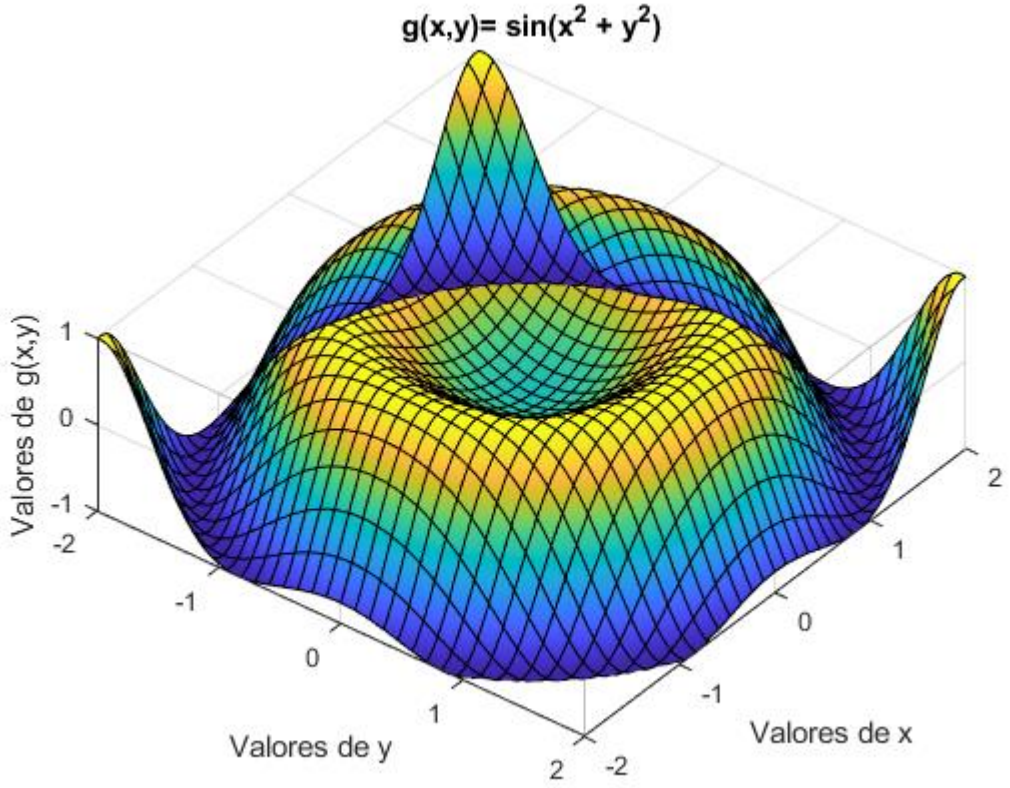
Fonte: Autores.

Figura 13: Função $g(x, y)$ em perspectiva 6



Fonte: Autores.

Figura 14: Função $g(x, y)$ em perspectiva 7



Fonte: Autores.

4. Considerações Finais

Os avanços científicos e tecnológicos estão extremamente rápidos e essa velocidade requer modelagens mais precisas para solucionar sistemas cada vez mais complexos e dinâmicos. Esses avanços sugerem estruturas matemáticas com pontos de singularidade que necessitam de métodos de otimização mais robustos, eficientes e eficazes. Nesse trabalho, apresentou-se uma estratégia baseada em Computação Bioinspirada capaz de otimizar, com excelente acurácia e precisão, Funções Transcendentes: A Otimização por Enxame de Partículas.

Essa metodologia é capaz de lidar com modelos matemáticos contínuos e com modelo com regiões de descontinuidade em seu domínio. Utilizou-se para a modelagem computacional a linguagem MATLAB de programação. Essa linguagem oferece funções residentes destinadas a essa estratégia

Para futuros trabalho, pretende-se aplicar outras metodologias de otimização, também fundamentadas em Computação Bioinspirada, em Funções Transcendentes, conforme Costa D. C. L. et al (2022). Programas em Algoritmo Genético já estão sendo desenvolvidos em nossos Laboratórios de Modelagem Matemática e Simulação Computacional.

5. Referências

CHAPRA, Steven C. **Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists**. Berger Chair in Computing and Engineering, Tufts University. Fourth edition. New York, NY: McGraw-Hill Education. 2018.

COSTA, D. C. L.; COSTA, H. A. de O.; NEVES, L. P. **Métodos Matemáticos Aplicados nas Engenharias via Sistemas Computacionais**. 2nd ed. SINEPEM-IFPA. 2019.

COSTA, D. C. L.; COSTA, H. A. de O.; SILVA, H. C. M. da. SILVA, S. T. T. da. **Matemática Computacional Aplicada à Ciência e Tecnologia.** 1st ed. Belém-PA, SINEPEM-IFPA. 2021.

COSTA, H. A. de O.; GOMES, L. L.; COSTA, D. C. L. **Genetic algorithm and particle swarm applied in electric system optimization**. Research, Society and Development, *[S. l.]*, v. 10, n. 10, p. e166101018871. DOI: 10.33448/rsd-v10i10.18871. 2021.

COSTA, D. C. L.; MENESES, L. A. de; LIMA, M. L. V. de; COSTA, H. A. de O.; REIS, A. C. F.; PINHEIRO, H. F. B.; COSTA, E. F. da; SILVA, A. R. dos S. da; REIS, A. C. F.; RAIOL, F. M.; SANTOS, R. C. P. dos. **Thermoelectric generation with reduced pollutants made possible by bio-inspired computing**. Research, Society and Development, *[S. l.]*, v. 11, n. 1, p. e7611124568. DOI: 10.33448/rsd-v11i1.24568. 2022.

PÓLYA, G.; SZEGÖ, G. P.; **Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis: Funktionentheorie-Nullstellen-Polynome-Determinanten-Zahlentheorie**. II Band, Julius Springer. 1925.

CORLESS, R, M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.G.; JEFFREY, D. **Lambert W function in Maple**. Elsevier Maple Tech. News. 9 (1) (1993) 12–22. 1993.