

## Geometria Fractal no currículo da Educação Básica Fractal Geometry in the Basic Education curriculum

Vinícius Murilo Fratucci  
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)  
viniciusfratucci@outlook.com  
<https://orcid.org/0000-0001-8486-505X>

Luan Padilha dos Santos  
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)  
padilha.luan16@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0003-4616-3182>

Mariana Moran  
Universidade Estadual de Maringá (UEM)  
mmbarroso@uem.br  
<https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>

### Eixo 2

#### Resumo

Com esse trabalho, buscamos situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira, uma vez que pretendemos observar como essa geometria está disposta nos documentos curriculares da educação, mais especificamente, voltando nossos olhares para o estado do Paraná. Nesse sentido, para nos auxiliar nesta investigação, utilizamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático, em que utilizamos os níveis de co-determinação desenvolvido por essa teoria para podermos situar e organizar os dados. Com isso, como metodologia, utilizamos a pesquisa documental, pois ela propicia que olhemos para os documentos curriculares de maneira a delinear esta pesquisa. Por fim, concluímos, com o auxílio dos níveis de co-determinação, situar a Geometria Fractal na Educação Básica e observar que essa geometria é pouco proposta para se aplicar em sala de aula.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Didática da Matemática; TAD; Currículos da Educação Básica; Fractal.

#### Abstract

With this work, we seek to situate Fractal Geometry in Brazilian Basic Education, since we intend to observe how this geometry is arranged in the curricular documents of education, more specifically, turning our eyes to the state of Paraná. In this sense, to help us in this investigation, we used the Anthropological Theory of Didactics as a theoretical contribution, in which we used the levels of co-determination developed by this theory in order to situate and organize the data. With this, as a methodology, we use documental research, as it allows us to look at the curriculum documents in order to outline this research. Finally, we conclude, with the help of co-determination levels, to situate Fractal Geometry in Basic Education and observe that this geometry is little proposed to be applied in the classroom.

**Keywords:** Mathematics Education; Mathematics Didactics; TAD; Basic Education Curricula; Fractal.

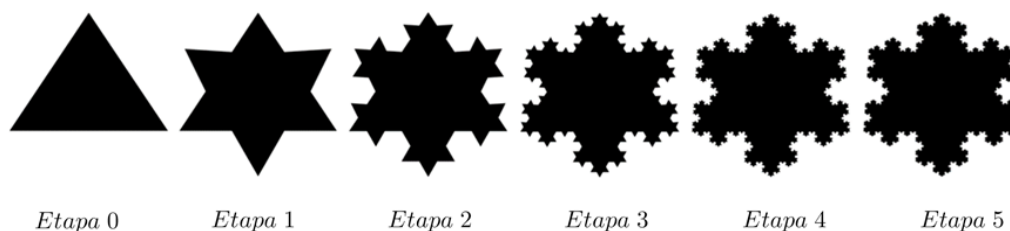
## Introdução

Este trabalho é norteado pelo seguinte questionamento: Como está situada a Geometria Fractal na Educação Básica do Paraná? Deste modo, abordamos a Geometria Fractal aliada a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como aporte teórico, e para auxiliar nessa investigação, utilizamos como metodologia a pesquisa documental proposta por Gil (2008).

Nesse sentido, buscamos situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira, mais especificamente para as diretrizes curriculares do estado do Paraná. Como forma de identificar no currículo da Educação Básica como é sugerida e estruturada a abordagem da Geometria Fractal, voltada para a sala de aula, utilizamos a TAD para articular os níveis de co-determinação com os segmentos da Educação Básica brasileira.

Com relação à geometria dos fractais, o matemático polonês Benoit Mandelbrot foi o iniciador do estudo destes objetos geométricos. Essas entidades possuem algumas propriedades particulares, entre elas, destacam-se a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (BARBOSA, 2005). Mandelbrot denominou esses objetos de fractais baseando-se na palavra *fractus*, adjetivo do latim, do verbo *frangere* que corresponde a quebrar, fragmentar.

**Figura 1:** Níveis de Co-determinação



Fonte: os autores (2022).

Deste modo, neste texto temos a proposta de apresentar as análises e as conclusões referentes aos níveis de co-determinação correspondentes aos fractais descritos nas diretrizes curriculares no âmbito da Educação Básica brasileira e paranaense.

## Referencial Teórico

Nesse estudo, utilizaremos os pressupostos da Didática da Matemática, pois ela nos dá subsídios para compreendermos aspectos envolvidos no processo de aprendizagem da Matemática. Além disso, possibilita estudar e elaborar a conceitualização e teorização das peculiaridades dos saberes matemáticos escolares.

Em vista disso, nos pautamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida pelo pesquisador francês Yves Chevallard, na qual articulamos essa teoria que mobiliza os níveis de co-determinação, buscando situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira.

Deste modo, Almouloud (2007) destaca que a TAD é uma teoria que apresenta contribuições para a Didática da Matemática, e possibilita inserir a Didática no campo antropológico, pois: “[...] focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas [OD] pensadas para o ensino e aprendizagem de organizações matemáticas [OM]” (ALMOULOUD, 2007, p. 111, inserção nossa).

Nesse sentido, Chevallard (1999) nos explica que as organizações (ou praxeologias) são associadas a um estudo matemático, e além disso, elas são divididas em dois tipos: Organização Matemática (OM) e Organização Didática (OD). O pesquisador nos elucida que a OM está envolvida na realidade Matemática que pode ser desenvolvida em uma disciplina de Matemática em torno de um determinado tema, ou seja, é nesse momento que essa realidade se desenvolve valendo-se de um quarteto praxeológico (tipo de tarefa, técnica, tecnologia, teoria). E a OD, relaciona-se com a maneira que pode ser estudado o desenvolvimento da realidade Matemática, isto é, como pode-se realizar o estudo em um determinado tema.

À vista disso, a noção de praxeologia apresentada pela teoria envolve dois termos gregos: *práxis*, que significa *praticar* e *logos*, que significa *razão*, *discurso fundamentado*, de maneira que nos permita realizar análises desde uma situação de perspectiva teórica do saber com a sua perspectiva prática (saber-fazer). Em que ambas as perspectivas nos levam a ter dois blocos, o bloco saber-fazer, constituído pelas noções de tipo de tarefa e técnica, e o bloco prático-técnico, formado pelas noções de tecnologia e a teoria (CHEVALLARD, 1999).

Nesse sentido, Chevallard (2018) esclarece a respeito de um quarteto praxeológico que

“[...] consiste um tipo de tarefa  $T$ , uma técnica  $\tau$ , maneira de executar as tarefas  $t$  do tipo  $T$ , de uma tecnologia  $\theta$ , discurso fundamentado (*logos*) sobre a técnica (*tekhnê*) que é suposto tornar  $t$  inteligível como meio para realizar as tarefas do tipo  $T$ , enfim - por último, não menos importante - uma componente teórica  $\Theta$ , que rege a tecnologia em si (e, portanto, todos os componentes da praxeologia). (CHEVALLARD, 2018, p. 34).

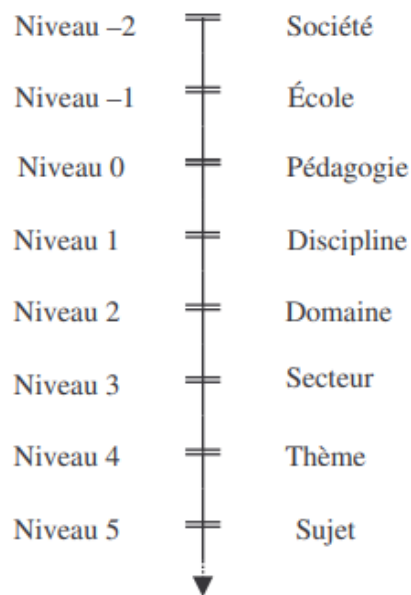
Assim, entendemos que para uma determinada tarefa existe pelo menos uma técnica (maneira como se realiza a tarefa) para aquela tarefa, a tecnologia que justifica a

maneira como se realizou a tarefa (a técnica), e por fim, tem-se a teoria, que faz a justificação daquela tecnologia.

Deste modo, Chevallard (1991) nos explica que o objeto matemático, particularmente, não existe por si só, e neste caso a Geometria Fractal precisa de outros artifícios para que ela possa ser pertinente e mobilizada na Educação Básica. Com isso, de acordo com Chevallard (1999), o saber matemático é compreendido como um modo particular do conhecimento, ou melhor, é o resultado da ação humana que é realizada em determinada instituição.

Partindo disso, com a pretensão na elaboração de um esquema que associe com esse determinado saber, Chevallard (2002) explica que quando se trata de uma organização de estudo de um determinado assunto, devemos levar em consideração uma escala hierárquica dos níveis de co-determinação didática.

**Figura 2:** Níveis de Co-determinação



Fonte: Chevallard (2002, p. 10).

Assim, esses “[...] níveis não são considerados dados, mas sim uma construção histórica. Cada nível ajuda a ecologia de uma Organização Matemática e Organização Didática por meio das dificuldades em que impõe a um estudo” (CHEVALLARD, 2002, p. 10, tradução nossa)<sup>1</sup>. Nesse sentido, ressaltamos que os níveis -2, -1 e 0 referem-se às

---

<sup>1</sup> [...] niveau se réfère à une réalité (la société, l'École, les mathématiques, etc.) qui n'est nullement un donné, mais un construit historique. Chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose.

organizações curriculares e os níveis 1, 2, 3, 4 e 5 são designados para as organizações do objeto matemático a ser estudado.

Com os níveis de co-determinação podemos desenvolver uma relação entre documentos curriculares, nos permitindo detalhar um objeto matemático específico. Assim, pretendemos percorrer o caminho que a Geometria Fractal pode ser encontrada nesses documentos de modo que podemos situar a Geometria Fractal na Educação Básica.

Nesse sentido, entendemos que os níveis de co-determinação propostos pela TAD são aliados pertinentes para que possamos situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira. De modo que essa geometria, associada aos níveis propostos, propicia apresentar uma resposta ao nosso objetivo e no desenvolvimento dos níveis de co-determinação para com os fractais.

### **Metodologia de Pesquisa**

A natureza do problema de pesquisa determinará o método a ser utilizado e, desta forma, os procedimentos nortearão as etapas de desenvolvimento da pesquisa, descrição do contexto, os procedimentos e os instrumentos de produção e análise dos dados. Portanto, tendo em vista que o objetivo dessa pesquisa é situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira, mais especificamente para as diretrizes curriculares do estado do Paraná, assim esta investigação se caracteriza como pesquisa documental.

A pesquisa documental é semelhante à pesquisa bibliográfica, e por vezes são confundidas. Por um lado, a pesquisa bibliográfica utiliza fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos (GIL, 2008). Já a pesquisa documental recorre a fontes que não recebem um tratamento analítico, tais como: cartas, fotografias, gravações, jornais, revistas, relatórios, documentos oficiais, pinturas, relatórios de empresas, vídeos de programas de televisão, etc. (GIL, 2008).

Complementando o parágrafo anterior, temos que quando se trata de uma pesquisa documental, o pesquisador está a procura de materiais que o auxiliem no entendimento histórico, social, cultural e científico de um determinado grupo e/ou de um fenômeno, de forma que esclareça seus questionamentos (FONTANA; PEREIRA, 2021). Logo, entendemos que com a pesquisa documental, pode ser desenvolvido os níveis de co-determinação acerca do fenômeno, isto é, o objeto matemático em questão, a Geometria Fractal.

## Descrição e Análise de Dados

Para compor a análise dos dados, utilizaremos os documentos oficiais da Educação Básica brasileira, e como forma de especificar como a Geometria Fractal é sugerida na sala de aula, buscaremos olhar também para os documentos curriculares do estado do Paraná.

Iniciamos a nossa análise justificando o Nível -2 dos níveis de co-determinação, que corresponde à *société* (sociedade). Entendemos que a *société* é representada pelo Ministério da Educação (MEC), uma vez que este é o órgão que regulamenta todas as diretrizes, a nível nacional, da educação brasileira, em especial, da Educação Básica.

O MEC tem como competência “a política nacional de educação; a educação infantil; a educação em geral, compreendendo ensino fundamental, ensino médio, educação superior, educação de jovens e adultos, educação profissional e tecnológica, educação especial e educação a distância, [...]” (BRASIL, 2020, p. 1).

Nesse sentido, respaldados nas diretrizes apresentadas, entendemos que a *société* da educação brasileira, que diz respeito à regulamentação da Geometria Fractal a ser implementada nas escolas, é o Ministério da Educação.

Em relação ao Nível -1, consideramos que este nível é correspondente à *école* (escola). Entendemos que a *école* é representada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos da Educação Básica brasileira devem desenvolver (BRASIL, 2018).

Podemos observar que nesse nível, conseguimos apresentar os primeiros indícios da Geometria Fractal como caráter curricular base para a Educação Básica, como é apresentado na habilidade EM13MAT105, que objetiva “Utilizar as noções de transformações isométricas [...] e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (**fractais**, construções civis, obras de arte, entre outras)” (BRASIL, 2018, p. 545, grifo nosso).

A respeito da *pédagogie* (pedagogia), correspondente ao Nível 0 entendemos que esta é correspondente à Secretaria Estadual de Educação, pois dentre suas competências está a elaboração e a difusão de diretrizes, regulamentos, regimentos e instruções requeridas para o funcionamento das instituições de ensino da Educação Básica, a nível estadual (PARANÁ, 2022).

Nesse sentido, podemos observar que o Nível 1, representado pela *discipline* (disciplina), está associado aos documentos curriculares do estado do Paraná, pois estamos especificando para esse estado. Com isso, estamos nos amparando nos documentos oficiais, que são: as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008), o Referencial Curricular do Paraná – RCP (PARANÁ, 2018) e o complemento deste documento, o Currículo da Rede Estadual do Paraná – CREP (PARANÁ, 2021), pois compreendemos que o estudo da Geometria Fractal, com base nos documentos oficiais, se torna um aliado para o ensino da Matemática por meio de sua inserção na Educação Básica.

Esses documentos dispõem que devem ser apresentadas, na Educação Básica, noções básicas da Geometria Não Euclidiana. As DCE descrevem que, no Ensino Médio, devem ser aprofundados “os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica”, recomendando a exploração do Floco de Neve de Koch e a Curva de Koch, como parte dos direcionamentos a respeito da Geometria Fractal (PARANÁ, 2008, p. 57).

O RCP (PARANÁ, 2018) é um documento regionalizado e como forma de dar maior clareza ao RCP, organiza-se um documento complementar, o CREP (PARANÁ, 2021), com o intuito de dar suporte para o ensino do estado. Dessarte, ambos apresentam que no 9º ano do Ensino Fundamental, os estudantes devem “Identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita” (PARANÁ, 2018, 2021).

Como consequência dos níveis apresentados, temos então o Nível 2, referente ao *domaine* (domínio). Este nível é representado pelos Ensino Fundamental e Ensino Médio, pois como observamos nos documentos curriculares em âmbito nacional e estadual, eles apresentam diretrizes a respeito da Geometria Fractal para ser implementada na Educação Básica. Assim, concluímos que para a Geometria Fractal o *domaine* é o Ensino Fundamental (PARANÁ, 2018, 2021) e o Ensino Médio (PARANÁ, 2008; BRASIL, 2018), uma vez que estamos em consonância com dos documentos norteadores da educação brasileira.

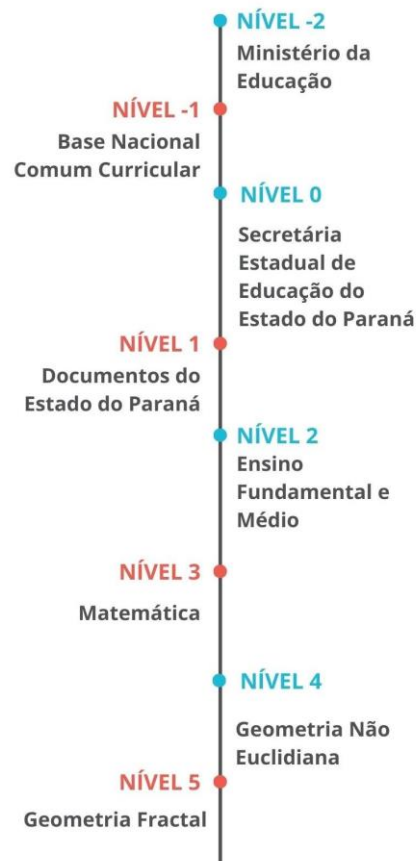
Tendo em vista o que foi exposto, entendemos que o Nível 3, representado pelo *secteur* (setor), corresponde a Matemática. Isto ocorre, pois compreendemos que a Geometria Fractal pode ser melhor empregada nas aulas do *secteur* Matemática, uma vez que com a exploração dos fractais com os estudantes da Educação Básica, pode propiciar

o trabalho com diversos conceitos matemáticos, como por exemplo: “calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite, e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas” (SALLUM, 2005, p. 1).

O *thème* (tema), representado pelo Nível 4, compreendemos que deve ser considerado como sendo a Geometria Não Euclidiana (GNE), uma vez que como sendo um campo da Matemática, os documentos curriculares, (BRASIL, 2018; PARANÁ, 2008, 2018, 2021) apresentam que a Geometria Fractal está inserida no campo da GNE. Pautado nesses motivos, entendemos que o *thème* é a Geometria Não Euclidiana.

Por fim, temos então o *sujet* (sujeito), este como sendo o Nível 5 que é representado pelo objeto matemático em questão. Nesse sentido, entendemos que o *sujet* desse trabalho é a Geometria Fractal, uma vez que este é o nosso objetivo a ser investigado, de maneira que perpassam pelos documentos curriculares e pelos órgãos que regulamentadores. Assim, conseguimos desenvolver um esquema que apresenta como os fractais estão perpassando pela Educação Básica, conforme ilustra a Figura 3.

**Figura 3:** Níveis de Co-determinação da Geometria Fractal



Fonte: os autores (2022).



Como observamos na Figura 3, desenvolvemos os níveis de co-determinação da Geometria Fractal, cujo objetivo é situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira. Portanto, especificamos e justificamos em que local os fractais estão situados na Educação Básica, desde aos órgãos regulamentadores até chegar ao objeto matemático desse trabalho.

## **Conclusões**

Neste trabalho, tivemos por objetivo situar a Geometria Fractal na Educação Básica brasileira, mais especificamente para as diretrizes curriculares do estado do Paraná. Utilizamos os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático como base teórica para desenvolver os níveis de co-determinação a respeito da Geometria Fractal.

Com isso, concluímos que a Geometria Fractal nos documentos curriculares é pouco mencionada, isto é, os documentos fazem menções a respeito dos fractais sem que sejam um estudo por si só, mas sim como meio de estudar outras noções matemáticas. Portanto, os níveis de co-determinação contribuíram para que observássemos que a Geometria Fractal é pouco ou quase nada abordada no currículo da Educação Básica.

Sugerimos que sejam explorados os fractais em sala de aula, uma vez que eles possibilitam estudar diversas noções matemáticas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, por exemplo, progressão geométrica, função logarítmica e frações equivalentes. Propiciando que os estudantes se sintam instigados a investigar tais objetos matemáticos pela sua beleza e desafiadoras formas que são apresentados na Geometria Fractal.

## **Referências**

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Apresentação**. 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/acesso-a-informacao/institucional/apresentacao>. Acesso em: 15 mar. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 1. p. 31-50.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. **Actes de la 11<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques**. France: La Pensée Sauvage, 2002.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

FONTANA, F.; PEREIRA, A. C. T. **Pesquisa Documental**. In: MAGALHÃES JÚNIOR, C. A. O.; BATISTA, M. C. Metodologia da Pesquisa em Educação e Ensino de Ciências. 1. ed. Maringá: Editora Massoni, 2021. p. 50-69.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

PARANÁ. **Secretária da Educação e do Esporte**. Curitiba: Secretaria da Educação e do Esporte, 2022. Disponível em: [https://www.educacao.pr.gov.br/secretaria\\_educacao](https://www.educacao.pr.gov.br/secretaria_educacao). Acesso em: 16 mar. 2022.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008. 81 p. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce\\_mat.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf). Acesso em: 16 mar. 2022.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba: Estado do Paraná, 2021. Disponível em: [https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos\\_restritos/files/documento/2021-05/crep\\_matematica\\_2021\\_anos finais.pdf](https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anos finais.pdf). Acesso em: 16 mar. 2022.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações. Curitiba: Estado do Paraná, 2018. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial\\_curricular\\_parana\\_cee.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf). Acesso em: 26 jan. 2022.

SALLUM, É. M. **Fractais no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v. 57, n. 1, p. 1-8, 2005.