



IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO NOVO ENSINO MÉDIO

André Ferreira de Lima¹

GD 03º – Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: O presente projeto de pesquisa de doutorado tem como objetivo geral compreender de que modo, a partir da tríade imaginação, intuição e visualização geométrica, tarefas potencializem o desenvolvimento do pensamento geométrico. Assumimos uma investigação de natureza qualitativa, seguindo o caminho da pesquisa documental. Analisaremos quatro volumes de Geometria pertencentes a coleções distintas de livros didáticos de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD – edital 2021. Dentre essas coleções, daremos destaque aos volumes de Geometria Euclidiana Plana e Espacial. Para nossa fundamentação teórica, utilizaremos autores que investigam o ensino de Geometria à luz da imaginação, intuição e visualização. Para o tratamento dos dados utilizaremos a Análise de Discurso. Para isso, nos apoiaremos na concepção de que a Matemática é um tipo de discurso e, conseqüentemente, entendemos que a Geometria também é. Esperamos como expectativas iniciais para essa investigação a presença dos elementos da tríade geométrica e a intensidade deles nas tarefas como uma possível possibilidade para a potencialização do desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Palavras-chave: Tríade Geométrica. Livro Didático. Ensino Médio. Geometria. Pensamento Geométrico.

INTRODUÇÃO

Antes de iniciarem à escolarização formal, as crianças exploram, espontaneamente, o mundo e os objetos que estão à sua volta (BRASIL, 2017). Elas constroem as primeiras noções espaciais através dos sentidos e dos movimentos, nas brincadeiras. Assim, inicialmente, a Geometria apresenta-se de forma prática. Conforme Costa (2019, p. 120) “ao se movimentarem em sua realidade natural e ao interagir com os objetos, com pessoas ou lugares, as crianças pequenas constroem varias noções espaciais”.

A sistematização dessas noções preliminares deve ocorrer na escola a partir de diversas estratégias e recursos metodológicos. Dessa forma, a Geometria empírica na qual a criança tem contato constantemente possibilitará, posteriormente a construção de uma Geometria dedutiva, isso poderá ser potencializado quando os estudantes têm oportunidades de manipular materiais diversos, adquirindo condições para comparar as diferenças e semelhanças entre eles, o que contribui para a evocação de objetos mesmo na

¹ Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática; Doutorado em Educação Matemática; andre.lima@unesp.br; orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio

ausência deles (BRASIL, 2017).

Recomenda-se para o ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (EF) um trabalho conjunto entre a Geometria Euclidiana Plana e a Espacial, possibilitando aos alunos transitarem entre elas. Esse trabalho conjunto deve ser estendido durante toda a Educação Básica. Fonseca *et al.* (2011) defendem uma abordagem integrada envolvendo figuras geométricas de várias dimensões.

Essa dinâmica em sala de aula envolve cautela, ou seja, “como preparar a passagem da geometria de observação, de comprovação empírica de relações, para a geometria dedutiva, na qual a validade das proposições é sustentada pela coerência do raciocínio?” (GÁLVEZ, 1996, p. 248). Os trabalhos de Fluentes (2019) e Ribeiro e Carneiro, (2019) relataram a importância dessa passagem do tridimensional para o bidimensional.

Apesar das recomendações precedentes, Oliveira, Lopes e Cardoso (2016) afirmam que o estudo das figuras espaciais na última etapa da Educação Básica ocorre ainda seguindo a dinâmica na qual “os docentes continuam receitando fórmulas e problemas algébricos o que tem tornado algo mecânico e pouco produtivo, cujo resultado tem sido constatado na fragilidade do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos” (OLIVEIRA; LOPES; CARDOSO, 2016, p. 3). Todavia, sabemos que há diversos fatores internos e externos que fazem essa prática ser recorrente, um deles é a formação inicial que, muitas vezes, prioriza um conhecimento geométrico desprovido de significados.

Pesquisas da Educação Matemática (EM), por exemplo, Lima e Carvalho (2010) recomendam que os conteúdos geométricos devam ser iniciados a partir da Geometria Espacial, pois os objetos do mundo real são tridimensionais. A partir dela, desenvolvem os conteúdos da Geometria Plana, pois essa requer maior abstração e generalização.

Apesar das discussões precedentes acerca do ensino de Geometria na Educação Básica. Ele, no caso do Brasil, passou por turbulências. Por exemplo, quase ausência na sala de aula, conforme apontado por Caldato e Pavanello (2015), sendo ocasionada pelo Movimento de Matemática Moderna (MMM). Esse cenário começou a sofrer modificações a partir das ações que foram iniciadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), prosseguindo com as políticas do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e, recentemente, com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (BRASIL, 2018). Essas ações em conjunto trouxeram mudanças para os Livros Didáticos (LD).

Hodiernamente, no que concerne às pesquisas acerca da análise de LD de Matemática da Educação Básica, apresentamos alguns resultados parciais sobre um

levantamento que o Grupo teorEMa – Interlocuções entre Geometria e Educação Matemática, do qual o autor desse texto é membro, está realizando nos Anais de todas as edições do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Focaremos nos trabalhos que versam sobre a Geometria Euclidiana Plana e Espacial, ou algum conteúdo/conceito específico e análise de LD. A partir da leitura dos títulos dos trabalhos apresentados nas edições de 2010, 2013, 2016 e 2019, encontramos os seguintes resultados para pesquisas envolvendo Geometria e análise de LD: 3, 4, 8 e, por fim, 5 publicações respectivamente.

A análise dos títulos desses 20 trabalhos aponta que, nesse evento, ainda existe um número reduzido de pesquisas que analisam LD de Matemática focando em temas geométricos. No referido evento, constatamos ausência de pesquisas focando na imaginação, na intuição e na visualização geométrica (triade geométrica), no âmbito de pesquisas que fazem análises de LD de Matemática. Ressaltamos a presença de algumas investigações que analisam LD sob a ótica da visualização e representação geométrica.

Também fizemos uma busca nos Anais de todas as edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), para verificarmos o quantitativo de pesquisas que fazem análises de LD em temas de Geometria do Ensino Médio. Nesse evento ainda não há um Grupo de Trabalho (GT) especificamente para LD. Diante disso, decidimos olhar os títulos de todos os GT. Não encontramos pesquisas que se debruçaram na análise da Geometria contida nos LD da última etapa da Educação Básica. Essas informações dão indícios da necessidade de investir nesse tipo de investigação.

A triade foi tema principal da pesquisa de doutorado de Leivas (2009, p. 7), cujo objetivo foi “apontar possibilidades de uso de abordagens que mobilizem imaginação, intuição e visualização no ensino de conceitos geométricos nas disciplinas mencionadas”. A pesquisa visava saber se era possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens envolvendo essa triade.

Justificamos esse estudo, pois diverge de outros trabalhos em dois quesitos, por um lado, análise de coleções de LD do Novo Ensino Médio e, por outro lado, foco na triade geométrica no âmbito da Geometria Euclidiana Plana e Espacial. Assim, elaboramos a questão de pesquisa: Como a triade imaginação, intuição e visualização geométrica apresenta-se nos livros didáticos de Matemática do Novo Ensino Médio? E o seguinte objetivo geral se configura em compreender de que modo, a partir da triade imaginação, intuição e visualização geométrica, tarefas potencializem o desenvolvimento do pensamento geométrico (PG). A partir deste momento, compactuamos da seguinte

definição de tarefa Matemática no âmbito dos LD “a todo e qualquer tipo de proposta, ofertada por esses materiais, a ser resolvida pelo estudante”. (LITOLDO, 2021, p. 101).

ENSINO DE GEOMETRIA

O papel da Geometria para o desenvolvimento das civilizações é indiscutível, desde os povos primitivos até os dias de hoje (LIMA; CARVALHO, 2010). O seu ensino, por algumas décadas, ficou relegado a um segundo plano. Por exemplo, os autores Caldato e Pavanello (2015) e Costa (2019) afirmam que esse ensino cedeu lugar para outros temas por recomendações do MMM. Exemplificamos o caso do tratamento simbólico apoiado na linguagem da teoria dos conjuntos, da priorização da álgebra e da aritmética.

As consequências do MMM fizeram com que fossem priorizadas outras áreas da Matemática. A pesquisa de (PONTES; CAMPOS, 2019) analisou coleções de LD de Matemática dos Anos Iniciais que seguiram as habilidades geométricas indicadas pela BNCC (BRASIL, 2018) e constataram a preferência pela unidade temática “Números e Operações”. Muitas pesquisas da área de EM ainda revelam ausência de conteúdos da Geometria na Educação Básica (COSTA, 2019; OLIVEIRA, LOPES e CARDOSO, 2016). Quando o ensino de Geometria na Educação Básica ocorre, ainda é pautado na nomenclatura de polígonos, no cálculo de áreas e volumes desprovidos de significados e, no excesso de atividades quando os alunos são treinados a desenharem ou colorir polígonos (SANTOS; BAIRRAL, 2015).

Em síntese, esse debate prévio acerca do ensino de Geometria no EF é pertinente para a etapa seguinte, tendo em vista que essa tem por uma de suas finalidades “a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos” (BRASIL, 2018, p. 464). De uns anos para cá, percebemos mobilizações em torno da última etapa da Educação Básica, elas foram responsáveis pela reestruturação do Ensino Médio que culminou em algumas alterações importantes, consolidando-se uma nova roupagem com itens internos ainda merecendo atenção. Essa etapa recebeu o termo “Novo”, anunciando uma “certa” mudança positiva.

Não aprofundaremos acerca do Novo Ensino Médio. Trazemos apenas algumas mudanças ocorridas. Por exemplo, o currículo dessa etapa está sendo composto pela BNCC e pelos itinerários formativos, os direitos e objetivos de aprendizagem do Ensino Médio são definidos pela BNCC, seguindo-se as diretrizes do Conselho Nacional de Educação

(CNE) e, por último, a carga horária mínima anual que foi elevada para 3000 horas de aulas para os três anos de curso (BRASIL, 2018).

No que concerne ao conhecimento matemático para o Ensino Médio, os estudantes devem ter condições, explorando os conhecimentos da etapa anterior, de construir uma visão mais integrada da Matemática, sem deixar de levar em consideração à aplicação à realidade (BRASIL, 2018). Assim, a área de Matemática e suas Tecnologias “tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado”. (BRASIL, 2018, p. 528). Levando em conta essas recomendações e as pesquisas da área de EM, defendemos que a tríade geométrica pode contribuir para essa ampliação.

IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Antes de introduzirmos o cerne das ideias da tríade imaginação, intuição e visualização geométrica, chamamos a atenção para o fato de que a leitura e a produção de desenhos em perspectiva, ou seja, a representação da terceira dimensão do objeto é uma das maiores dificuldades dos estudantes (LIMA; CARVALHO, 2010).

Essas dificuldades poderiam ser minimizadas caso o ensino de Geometria não fosse polarizado em duas situações: percepção, isto é, atividades envolvendo observação e manipulação de objetos concretos. Concepção, atenções voltadas às “definições precisas, o enunciado cuidadoso das propriedades, o encandeamento de proposições nas demonstrações formais ou informais.” (MACHADO, 2005, p. 51). Para esse autor, por muito tempo prevaleceram atividades nos Anos Iniciais do EF que se enquadravam na face perceptiva e, quanto aos Anos Finais, predominou a face conceptiva. Para a construção do conhecimento geométrico, o autor recomenda que a polarização empírico/formal seja substituída por quatro faces: percepção, construção, representação e concepção.

A face da construção refere-se à produção de materiais presentes nas atividades dos Anos Iniciais do EF, não sendo valorizada como deveria ser nos anos seguintes, mas pode ser uma atividade rica no EF e no Médio (MACHADO, 2005). A representação refere-se à reprodução, através de desenhos, dos objetos que são percebidos ou construídos.

Quanto à importância dessas quatro faces para a construção do conhecimento geométrico, Machado (2005, p. 55) diz que a transição por parte da criança é tão importante quanto “é realizar o percurso do engenheiro ou do arquiteto, que concebe o

objeto geométrico antes de representá-lo e construí-lo, e só então torná-lo palpável”. Para o teórico, essa transição pode evitar uma saída brusca da linguagem natural trazida pelas crianças à linguagem geométrica formal. Além disso, as faces da construção do conhecimento geométrico podem contribuir para o desenvolvimento da tríade geométrica. Conforme Leivas (2009), ela possibilita o desenvolvimento do PG.

Consideraremos, em princípio, as definições de Leivas (2009) para essa tríade, uma vez que ele se apropriou de teóricos do âmbito da EM e da Psicologia da EM, inclusive os do cenário internacional. No que diz respeito à imaginação, ela “é uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito”. (LEIVAS, 2009, p. 20).

Para Leivas (2009), a imaginação deve ser considerada desde os Anos Iniciais do EF, pois desenvolve o PG. Esse trabalho pode contribuir para os estudos posteriores, bem como no decorrer das vidas dos estudantes. Defendemos que a imaginação deve ser desenvolvida durante toda a Educação Básica. Para esse mesmo pesquisador, a imaginação tem uma ligação estreita com a abstração, bem como com a intuição. Além disso, essas podem ser complementadas através da visualização. Na literatura, os termos imaginação, criatividade e abstração aparecem juntos (LEIVAS, 2009).

A intuição é entendida por Leivas (2009, p. 21) como “um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto”. Para Costa (2019, p. 89, grifo do autor), “o pensar em Geometria é de natureza intuitiva, isto é, a pessoa mobiliza o *pensamento geométrico intuitivo*, pois analisa os objetos geométricos de forma intuitiva”.

Costa (2019, p. 90) exemplifica como ocorre o PG intuitivo nas aulas de Matemática, o autor supõe a análise de uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência. Depois questiona se essa reta interceptará ou não a circunferência. Ele diz “a maior parte dos estudantes, que possuem [sic] uma breve introdução em Geometria, não apresenta dificuldade em argumentar que a reta efetivamente tanto interceptara a circunferência, quanto fara isso em dois pontos distintos”.

Leivas e Franke (2015) deu ênfase à intuição geométrica em um de seus artigos, considerando-a uma forma de construção de conhecimento matemático. Fischbein (1987) classificou a intuição em: intuições afirmativas, conjecturais, antecipatórias, conclusivas e primárias. Conforme interpretações de Leivas (2015, p. 4) dos escritos de Fischbein

(1987), intuição ou conhecimento intuitivo “é um tipo de cognição que se refere às afirmações auto evidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que o diferencia de percepção, algo como uma cognição imediata, não necessitando de prova para sua existência”. A intuição foi estudada tanto na matemática quanto em outras ciências, além disso, é relevante para o desenvolvimento de um PG (LEIVAS, 2009).

Cifuentes (2005) entende a visualização como um processo de formular imagens mentais. Leivas (2009, p. 111) define visualização como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”. Acrescenta que a visualização não deve ser entendida como uma forma de representar uma figura ou objeto.

Algumas pesquisas relatam diferenças no tocante ao significado do termo visualização, podendo ser comparadas tanto na linguagem comum, quanto na psicologia e na EM. Muitas pessoas consideram que visualizar é imaginar e desenhar uma situação. Nessas duas ciências citadas, o termo envolve a geração e a manipulação de imagens (RAMFUL; HO, 2015). A visualização é entendida por Arcavi (2003, p. 217) como “a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas”.

Após apresentarmos as definições da tríade geométrica, trazemos a definição de PG avançado, que é entendido como “um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para aquisição de conhecimentos matemáticos científicos”. (LEIVAS, 2009, p. 136).

METODOLOGIA E ANÁLISE DOS DADOS

Vislumbrando a tríade como uma alternativa para o desenvolvimento do PG, esse projeto de doutorado fará análise de coleções de LD de Matemática do Novo Ensino Médio. Para isso, nos debruçaremos nas tarefas propostas nesses documentos. Constatando-se a tríade geométrica nos volumes de Geometria, analisaremos como é apresentada e, se a forma como está possibilita que os estudantes desenvolvam o PG.

Essa investigação assume uma abordagem qualitativa. Apresentamos brevemente algumas características dessa tipologia, “preocupação em compreender a totalidade do fenômeno estudado, interpretação intensiva dos dados, heterodoxia da análise e exercício da intuição e da imaginação na investigação científica”. (PERINELLI NETO, 2019, p. 378).

Dentre as abordagens do âmbito da pesquisa qualitativa, consideramos que nossa investigação enquadra-se no tipo documental. A justificativa para essa escolha deve-se ao fato de que nossa fonte de produção de dados é composta de coleções de LD. No que concerne à definição de pesquisa documental, concordamos que:

[...] o exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se novas e/ou interpretações complementares, constitui o que estamos denominando pesquisa documental. (GODOY, 1995, p. 21).

A interpretação desses materiais, conforme Mazzi (2018, p. 82) pode estar em função de vários fatores, por exemplo, “o olhar do investigador, o referencial teórico adotado, o objetivo da pesquisa, entre outros. Não é, então, passível de uma mesma interpretação sempre”. Diante dessas considerações sobre a pesquisa documental, esclarecemos que dentre as dez coleções aprovadas no PNLD, edital de 2021, na área de Matemática para o Ensino Médio, escolhemos para nossa investigação quatro, cujo critério refere-se ao fato de que elas foram doadas por uma coordenadora pedagógica. Dentre os seis volumes que compõem cada coleção, focaremos naqueles que abordem à Geometria.

Os LD analisados estarão disponíveis para uso nas escolas a partir de 2022 até 2025. A respeito do ciclo desses materiais, Mazzi e Amaral-Schio (2021) dizem que uma das mudanças do PNLD refere-se ao ciclo de funcionamento, isto é, antes era de três anos, passando a vigorar para um período de quatro anos. Diante disso, nossa investigação estará ocorrendo simultaneamente ao processo de utilização por professores(as) e estudantes dessas obras aprovadas. Em síntese, a conclusão dessa pesquisa ocorrerá antes do ano de atendimento para a nova escolha, que ocorrerá novamente somente em 2025.

No tratamento dos dados escolhemos a Análise do Discurso Matemático (ADM). Inicialmente, buscamos esclarecimentos sobre o termo discurso. Assim, concordamos com a concepção proposta por Sfar (2001) que entende o discurso como qualquer tipo específico de comunicação, podendo ocorrer com outros(as) ou consigo mesmo, podendo ser verbalmente ou com ajuda de qualquer sistema simbólico. Sfar (2008) entende a matemática como um caso específico de discurso, contando com quatro características.

Uso da palavra (utilização de palavras matemáticas tais como polígono, prisma, dentre outros; também o uso de palavras ordinárias, utilizando em um contexto com significado matemático, por exemplo, o prisma está inclinado ao invés de oblíquo); mediadores visuais (objetos visuais que os estudantes do discurso matemático (DM) fazem utilização durante o processo de comunicação, isto é, as fórmulas matemáticas, os gráficos

e desenhos); narrativas, “qualquer sequência de expressões, faladas ou escritas, enquadradas como uma descrição de objetos, de relações entre objetos, ou de atividades com ou por objetos” (SFARD, 2008, p. 223) e rotinas: padrões que se repetem, característicos do DM. Elas podem ser deduzidas observando-se a ocorrência de regularidades na utilização das outras três características.

Morales (2017) utiliza o termo DM de Sfard (2008, p. 299) que o define como “um vocabulário que conta com matemática (contém, por exemplo, palavras que se referem a números e as operações com números e formas geométricas)”. Assim, compreendemos a Geometria como uma forma específica de DM que pode estar presente nas tarefas dos LD.

Para a análise dos nossos dados tomaremos como categorias iniciais para observar as tarefas, a tríade geométrica. Ela será observada na mesma intensidade em cada volume de Geometria. Durante a análise poderá emergir outras subcategorias de cada um dos elementos da tríade. Esse tratamento será feito à luz da ADM.

Embora nossa pesquisa não seja empírica, isso não impedirá de supor como a tríade geométrica pode contribuir para o desenvolvimento do PG. Um dos argumentos da plausibilidade do estudo diz respeito à concepção que adotamos de Sfard (2008) a respeito da Matemática, isto é, compreendendo-a como um discurso. Além disso, pautamos na noção de expectativas de aprendizagem (EA), proposta na tese de Lupiáñez (2009). Nossa escolha deve-se ao fato de que entendemos que a tríade geométrica é tida no LD como EA.

Exemplos de EA: “os documentos e diretrizes curriculares que estabelecem finalidades gerais da educação, ou os objetivos específicos de um livro didático sobre um tema concreto da matemática” (LUPÍÁÑEZ, 2009, p. 76, tradução nossa). Esse pesquisador pondera que as EA se referem, nos diferentes níveis escolares, a tudo aquilo que os estudantes deveriam aprender durante a Educação Básica, bem como às implicações dessa aprendizagem. A expressão EA foi empregada para denominar, de forma geral:

[...] aquelas capacidades, competências, conhecimentos, saberes, aptidões, habilidades, técnicas, hábitos, valores e atitudes que, segundo diferentes instâncias do currículo, se espera que alcance, adquiram, desenvolvam e utilizem os estudantes. (LUPÍÁÑEZ, 2009, p.77, tradução nossa).

De forma resumida, na análise dos LD escolhidos, faremos inferências acerca da possibilidade de as tarefas poderem proporcionar aos estudantes o desenvolvimento da tríade geométrica e, conseqüentemente, o PG.

Nosso cronograma subdivide-se em: 2021 (adaptações no projeto de tese), 2022 (apresentação na atividade de verão da UNESP, revisão de literatura, estrutura e redação

preliminar dos capítulos), 2023 (análise dos dados, seminário obrigatório e qualificação) e, por fim (redação final, revisão gramatical e defesa pública).

Agradecimentos: A todos(as) colegas do Grupo de Pesquisa teorEMa que colaboraram com sugestões para este texto. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento dessa pesquisa.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. Symbol Semse. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: North American Chapter of the PME, 1999. **Proceedings**. Disponível em: <<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>>. Acesso em: 15 set. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CALDATTO, M. E; PAVANELLO, R. M. Visualização de Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Revista Quadrante**. Portugal Vol. 24, nº 01, p. 103-128, 2015.

CIFUENTES, J.C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

COSTA, A. P. **A Construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do Pensamento Geométrico:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics:** an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

FONSECA, M. da C; LOPES, M. P; BARBOSA, M. G. G; GOMES, M. L. M; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental:** Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

FUENTES, G. F. A comunicação e a representação do espaço por crianças de 5 a 6 anos: Algumas considerações. In: **ENEM**, 12, 2019, Cuiabá/MT. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-11.

GÁLVEZ, G. A. Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da Geometria na escola primária. In: PARRA, C., SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução por Juan A. L. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.236-258.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

LEIVAS, J. C. P.; FRANKE, Rosvita F. Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas. **XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Chiapas, México, 2015.

LEIVAS, J. C.P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. Geometria. In. PITOMBEIRA, J. B. (Org). **Coleção Explorando o Ensino. Matemática EF**. Brasília: MEC/SEB, 2010, v. 17. P.135-166.

LITOLDO, B. F. **A contextualização e os níveis de demanda cognitiva de tarefas de geometria presentes em livros didáticos de matemática sob a perspectiva do Opportunity-to-learn**. 2021. 222 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2021.

LUPIÁÑEZ, J. L. **Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. 2009. 551 f. Tese (Doutorado) Universidade de Granada, 2009.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MAZZI, L. C; AMARAL-SCHIO, R. B. Uma trajetória histórica dos livros didáticos: um foco nas políticas públicas implementadas nos séculos XX e XXI. **Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar**, Vitória da Conquista/BA, v. 2, n. 1, p. 80-105, 2021.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria**. 2018. 160 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

MORALES, J. A. H.; **Características comognitivas del discurso matemático de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes universitarios.** 2017. 169 f. Tese (Doutorado). Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, 2017.

OLIVEIRA, R. B.; LOPES, L. Q.; CARDOSO, V. C. Interface da geometria plana à espacial: Um estudo a partir dos triângulos e dos sólidos de Platão. In: **ENEM**, 12, 2016, São Paulo/SP. Anais [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-8.

PERINELLI NETO, H. A construção de pesquisas qualitativas e o fazer cinematográfico: contribuições do documentário brasileiro contemporâneo aos estudos de caso. In: BICUDO, M. A. V; COSTA, A. P. (Org). **Leituras em pesquisa qualitativa.** São Paulo: Livraria da Física, 2019. p. 377-439.

PONTES, J. S.; CAMPOS, C. R. Praxeologia do professor que ensina geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. In: **ENEM**, 13, 2019, Cuiabá/MT. Anais [...]. Educação Matemática com as escolas da educação básica: Interfaces entre pesquisas e salas de aula. Cuiabá: SBEM, 2019. P. 1-12.

RAMFUL, A.; HO, S. Y; LOWRIE, T. **Visual and analytical strategies in spatial visualisation:** perspectives from bilateral symmetry and reflection. Disponível em < <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-015-0144-0> >. Acesso em: 20 set. 2015.

RIBEIRO, C. de P.; CARNEIRO, R. F. O método Montessori no ensino e aprendizagem da geometria na educação infantil. In: **ENEM**, 13, 2019, Cuiabá/MT. Anais [...]. Educação Matemática com as escolas da educação básica: Interfaces entre pesquisas e salas de aula. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-13.

SANTOS, R.T. dos; BAIRRAL, M. A. Aspectos emergentes na construção do conceito de polígono por alunos do 6º ano de uma escola pública. **Revista Vydia**, Santa Maria/RS, Vol.35 nº1, p. 15-40, 2015.

SFARD, A. **Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.** Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

SFARD, A. **There is more to discourse than meets the ears:** looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, *Educational Studies in Mathematics*, 46, p.13–57. 2001.