# ELABORAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL EM MATLAB PARA ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA E CONTROLE DE AERONAVES RÁDIO CONTROLADAS

André Diniz Silva Brito [(1)] (andredinizsb@gmail.com), Lucas Nunes Rodrigues [(1)] (lucasrodriguesbr07@gmail.com), Luiz Felipe Rodrigues Silva [(1)] (luizfeliperodsl@gmail.com), Matheus de Sousa Borges [(1)] (matheus.dsb151099@gmail.com), Nilson Gabriel Viana Silva [(1)] (nilsongabrielvs@gmail.com)

[(1)] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI); Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO: *Desde os primeiros avanços dos estudos de aeronaves no fim do século XIX até então, são necessárias duas condições para um avião ter um voo de sucesso: garantir a estabilidade dinâmica e o controle. Tendo isso em vista, este trabalho tem como objetivo a produção de um código computacional que analisa a estabilidade dinâmica e o controle de aeronaves rádio controladas a partir de seus dados geométricos e aerodinâmicos. As rotinas de código foram produzidas em Matlab e as equações de movimento da aeronave foram modeladas conforme Nelson (1998), tendo em vista a análise da estabilidade dinâmica e controle para pequenas perturbações. Ademais, as análises foram feitas a partir de dados de entrada dos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998) e dos aeromodelos de 2017, 2018 e 2020 produzidas pela equipe de Aerodesign Sol do Equador. Os resultados utilizando os exemplos de Nelson (1998), mostraram que programa é eficaz, com um erro absoluto muito baixo, além disso, na comparação das aeronaves, as de 2018 e de 2020 tiveram as melhoras qualidades de voo, longitudinal e látero direcional, respectivamente, com base na norma MIL-F-8785C, considerando a aeronave dentro de fases de voo simples.*

PALAVRAS-CHAVE: *ESTABILIDADE E CONTROLE, ESTABILIDADE DINÂMICA, MATLAB, AERODESIGN.*

# ELABORATION OF COMPUTATIONAL CODE IN MATLAB FOR ANALYSIS OF DYNAMIC STABILITY AND CONTROL OF RADIO CONTROLLED AIRCRAFT

ABSTRACT: *From the first advances in aircraft studies at the end of the 19th century until then, two conditions are required for an aircraft to have a successful flight: ensuring dynamic stability and control. With that in mind, this work aims to produce a computacional code that analyzes the dynamic stability and control of radio controlled aircraft from their geometric and aerodynamic data. The code routines were produced in Matlab and the aircraft's motion equations were modeled according to Nelson (1998), with a view to the analysis of dynamic stability and control for minor disturbances. Furthermore, the analyses were made from input data from Nelson (1998) examples 4.3 and 5.3 and the 2017, 2018 and 2020 aeromodels produced by Sol do Equador Aerodesign team. The results using the examples of Nelson (1998) showed that program is effective, with a very low absolute error, in addition, in the comparison of aircraft, those of 2018 and 2020 had the best qualities off light, longitudinal and directional later, respectively, based on MIL-F-8785C, considering the aircraft within simple flight phases.*

KEYWORDS: *STABILITY AND CONTROL, DYNAMIC STABILITY, MATLAB, AERODESIGN.*

## DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

*Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.*

## 1. INTRODUÇÃO

Segundo Nelson (1998), por volta do início do século XX, um dos problemas pertinentes na comunidade aeronáutica para garantir um voo motorizado de um sistema mais pesado que o ar, era a relação entre a estabilidade e controle, bem como a influência do piloto na dinâmica de voo. Grande parte das ideias e suas respectivas soluções sobre estabilidade e controle vieram anos depois com experimentos com planadores não controlados, onde foi rapidamente descoberto que, para um voo bem-sucedido o planador tinha que ser inerentemente estável. Desde esse momento, avaliar os critérios de estabilidade e controle transformaram-se tarefas fundamentais para o projeto aeronáutico.

A pesquisa de estabilidade não se limita apenas a grande indústria da aviação ou aos profissionais da área. Os alunos de graduação desenvolvem aeronaves e vivenciam todo o processo de desenvolvimento de aeromodelos. Conforme Júnior *et al.* (2018), a competição SAE Brasil Aerodesign proporciona aos estudantes um espaço adequado para o desenvolvimento de conhecimentos na área de engenharia aeronáutica, por meio de aplicações práticas e de competição entre equipes, realizando um projeto de aviação, no qual uma aeronave menor simula uma aeronave real.

Todos os anos, as equipes apresentam novas ideias no projeto das aeronaves, buscando uma melhora e tornando a competição SAE Brasil Aerodesign cada vez mais disputada. A aeronave Smaug (Figura 1), projetada pela equipe Sol do Equador para a competição de 2016, ainda obtém o título de melhor colocação na história da equipe (29º no ranking). Com os avanços, há a exigência que as equipes se mantenham sempre atualizadas e desenvolvam novos métodos de análises de forma a otimizar o tempo de projeto, bem como seus resultados.



FIGURA 1. Aeronave Smaug. Fonte: Acervo da equipe Sol do Equador (2016).

*Um avião só é dinamicamente estável se após uma perturbação sofrida ele tiver a capacidade de retornar a sua posição de equilíbrio depois de um determinado intervalo de tempo e lá se manter* (MIRANDA, 2014), para isso em cada um dos eixos, com o auxílio das superfícies de controle, a aeronave realiza determinados movimentos de restauração de equilíbrio e manobra. Ademais, as análises de dinâmica de voo auxiliam na melhoria considerável da qualidade de voo mediante à possíveis perturbações externas que a aeronave vivencia durante sua operação. Assim, essa análise de mecânica de voo é importante devido à preocupação com a controlabilidade e manobrabilidade da aeronave. De acordo com Cook (2007), a análise de estabilidade é uma das partes mais complexas no projeto de uma aeronave, pois é necessário a resolução de sistemas de equações diferenciais, isso pode se tornar um trabalho árduo quando realizado manualmente.

Sendo assim, o presente trabalho foi elaborado visando apoiar futuros integrantes da gerência de estabilidade e controle da equipe de Aerodesign Sol do Equador, visto que as rotinas produzidas em Matlab auxiliará nos cálculos relacionados a estabilidade dinâmica com base nas bibliografias e simplificações utilizadas pela equipe. É importante destacar que, serão utilizados modelos lineares propostos por bibliografias, que, para pequenas perturbações de movimento em volta do ponto de operação, será as respostas do avião. Para validação dos resultados, o modelo produzido será aplicado aos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998). Em seguida, as rotinas serão adotadas para o estudo do comportamento dinâmico das aeronaves de 2017, 2018 e 2020 da equipe Sol do Equador nas situações de voo críticas.

## 2. METODOLOGIA

A metodologia foi dividida em três subitens a seguir, a fim de se desenvolver o código para a análise de estabilidade dinâmica.

### 2.1 Sistema de coordenadas

Inicialmente, definiu-se o sistema de coordenadas. As bibliografias costumam relacionar os movimentos lateral e direcional e as análises se simplificam para dinâmica longitudinal e látero-direcional, referindo-se aos estudos de movimentos da aeronave a partir da atuação das superfícies de controle nos eixos “x”, “y” e “z”, respectivamente, definidos no sistema de coordenadas da aeronave, como mostrado na Figura 2.

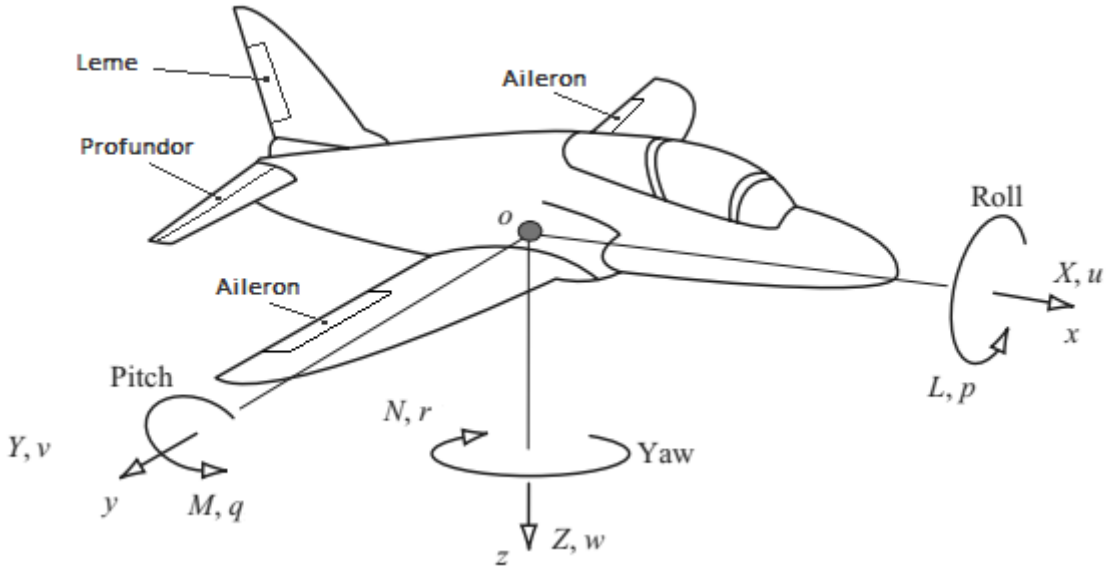


FIGURA 2. Sistema de coordenadas da aeronave atreladas as grandezas físicas, movimentos e superfícies de controle. Fonte: Cook (2007, p. 15).

Na Figura 2, temos as grandezas físicas (velocidade, aceleração, forças e momentos) atreladas aos respectivos movimentos nos eixos, sendo em torno do eixo "x" rolamento (*roll*), em torno do eixo "y" arfagem (*pitch*) e em torno do eixo "z" é chamado de guinada (*yaw*). Conforme Junior *et al.* (2018), os movimentos analisados são todos considerados em torno do eixo do avião e correlacionados por ângulos com os eixos inerciais para o cálculo das derivadas aerodinâmicas e de estabilidade e, consequentemente, construção das equações de movimento da aeronave.

## 2.2 Modelagem aerodinâmica

Pelo fato de as aeronaves analisadas terem uma configuração convencional, os dados aerodinâmicos utilizados para os cálculos de derivadas foram obtidos por modelos semi-empíricos e ferramentas computacionais. Assim, os coeficientes adimensionais apresentados pelo conjunto de equações da Tabela 1 são compostas por derivadas aerodinâmicas e de estabilidade apresentadas pelo grupo de equações da Tabela 2.

A partir das equações dos coeficientes e derivadas estimadas por Nelson (1998), foram produzidas quatro *functions*, duas para a parte dos coeficientes adimensionais e duas para as derivadas dimensionais. Além disso, como forma de organizar todos os outputs gerados, foi utilizado a função *table* do Matlab para armazenar os dados em uma tabela. Os *inputs* dessas *functions* são dados geométricos, aerodinâmicos e de desempenho.

TABELA 1. Coeficientes adimensionais.

| COEFICIENTES LONGITUDINAIS | | | |
|---|---|---|---|
| | X-FORCES DERIVATES | Z-FORCES DERIVATES | PITCHING MOMENT DERIVATIVES |
| u | $C_{Xu} = -3C_{D0}$ | $C_{Zu} = -\frac{M^2}{1-M^2} CL_0 - 2CL_0$ | $C_{Mu} = 0$ |
| α | $C_{X\alpha} = C_{L0} - \frac{2C_{L0}}{AR} \frac{C_{L\alpha}}{\pi e}$ | $C_{Z\alpha} = -(C_{L0} + C_{D0})$ | $C_{M\alpha} = C_{L\alpha w}\left(\frac{X_{CG}}{c} - \frac{X_{AC}}{c}\right) + C_{m\alpha f} - \eta_{HT} V_H C_{L\alpha t}\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)$ |
| $\dot{\alpha}$ | $C_{X\dot{\alpha}} = 0$ | $C_{Z\dot{\alpha}} = -2\eta_{HT} C_{L\alpha t} + V_H \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ | $C_{M\dot{\alpha}} = -2\eta_{HT} C_{L\alpha t} + V_H \frac{X_{HT}}{c} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ |
| q | $C_{Xq} = 0$ | $C_{Zq} = -2\eta_{HT} C_{L\alpha t} + V_H$ | $C_{Mq} = -2\eta_{HT} C_{L\alpha t} + V_H \frac{X_{HT}}{c}$ |
| $\delta_e$ | $C_{\delta_e} = 0$ | $C_{Z\delta_e} = -C_{L\alpha t}\, \tau_e\, \eta_{HT} \frac{S_{HT}}{S_W}$ | $C_{Z\delta_e} = -CL_{\alpha t}\, \tau_e\, \eta_{HT} \frac{S_{HT}}{S_W}$ |
| COEFICIENTES LÁTERO-DIRECIONAIS | | | |
| | Y-FORCES DERIVATES | YAWING MOMENT DERIVATES | ROLLING MOMENT DERIVATIVES |
| β | $C_{Y\beta} = -\eta_{VT} C_{L\alpha vt}\left(\frac{S_{VT}}{S_W}\right)\left(1 + \frac{d\sigma}{d\beta}\right)$ | $C_{N\beta} = C_{N\beta wf} + \eta_{VT}\, V_{VT}\, C_{L\alpha vt}\left(1 + \frac{d\sigma}{d\beta}\right)$ | $C_{l\beta} = \left(\frac{C_{l\beta}}{\Gamma}\right)\Gamma + \Delta C_{l\beta}$ |
| p | $C_{Yp} = C_{L0} \frac{AR + \cos\Lambda}{AR + 4\cos\Lambda} \tan\Lambda$ | $C_{Np} = \frac{-C_{L0}}{8}$ | $C_{lp} = -\frac{C_{L\alpha w}}{12} \frac{1+3\lambda}{1+\lambda}$ |
| r | $C_{Yr} = -2C_{Y\beta}\left(\frac{X_{VT}}{b}\right)$ | $C_{Nr} = -2\eta_{VT} C_{L\alpha vt} V_H \left(\frac{X_{VT}}{b}\right)$ | $C_{lr} = \frac{C_{L0}}{4} - 2\left(\frac{X_{VT} Z_{VT}}{b^2}\right) C_{Y\beta}$ |
| $\delta_a$ | $C_{\delta_a} = 0$ | $C_{N\delta_a} = 2KC_{L0} C_{l\delta_a}$ | $C_{l\delta_a} = \frac{2C_{L\alpha w}\tau_a}{S_w b} \int_{y1}^{y2} cydy$ |
| $\delta_r$ | $C_{Y\delta_r} = \frac{S_{VT}}{S_W}(\tau_r)(C_{L\alpha vt})$ | $C_{N\delta_r} = -C_{L\alpha vt}\, V_{VT}\, \eta_{VT}\, \tau_r$ | $C_{l\delta_r} = \left(\frac{S_{VT}}{S_W}\right)\tau_r C_{L\alpha w}\left(\frac{Z_{VT}}{b}\right)$ |

Fonte: Nelson (1998).

TABELA 2. Derivadas aerodinâmicas e de estabilidade.

| DERIVADAS LONGITUDINAIS | | | |
|---|---|---|---|
| | X-FORCES DERIVATES | Z-FORCES DERIVATES | PITCHING MOMENT DERIVATIVES |
| u | $X_u=(C_{Xu})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $Z_u=(C_{Zu})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $M_u=(C_{Mu})\frac{Q\,S_w\,c}{I_y\,u_0}$ |
| w | $X_w=(C_{X\alpha})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $Z_w=(C_{Z\alpha})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $M_w=(C_{M\alpha})\frac{Q\,S_w\,c}{I_y\,u_0}$ |
| $\dot{w}$ | $X_{\dot{w}}=(C_{X\dot{\alpha}})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $Z_{\dot{w}}=(C_{Z\dot{\alpha}})\frac{Q\,S}{m\,u_0}\frac{c}{2u_0}$ | $M_{\dot{w}}=(C_{M\dot{\alpha}})\frac{Q\,S_w\,c}{I_y\,u_0}\frac{c}{2u_0}$ |
| $\alpha$ | $X_\alpha=0$ | $Z_\alpha=Z_w\,u_0$ | $M_\alpha=M_w\,u_0$ |
| $\dot{\alpha}$ | $X_{\dot{\alpha}}=0$ | $Z_{\dot{\alpha}}=Z_{\dot{w}}\,u_0$ | $M_{\dot{\alpha}}=M_{\dot{w}}\,u_0$ |
| q | $X_q=(C_{Xq})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $Z_q=(C_{Zq})\frac{Q\,S_w\,c}{m\,u_0}$ | $M_q=(C_{Mq})\frac{Q\,S_w\,c}{I_y\,u_0}\frac{c}{2u_0}$ |
| $\delta_e$ | $X_{\delta_e}=(C_{X\delta_e})\frac{Q\,S_w}{m\,u_0}$ | $Z_{\delta_e}=(C_{Z\delta_e})\frac{Q\,S_w}{m}$ | $M_{\delta_e}=(C_{M\delta_e})\frac{Q\,S_w\,c}{I_y}$ |
| DERIVADAS LÁTERO-DIRECIONAIS | | | |
| | Y-FORCES DERIVATES | YAWING MOMENT DERIVATIVES | ROLLING MOMENT DERIVATIVES |
| $\beta$ | $Y_\beta=(C_{Y\beta})\frac{Q\,S_w}{m}$ | $N_\beta=(C_{N\beta})\frac{Q\,S_w\,b}{I_z}$ | $l_\beta=(C_{l\beta})\frac{Q\,S_w\,b}{I_x}$ |
| p | $Y_p=(C_{Yp})\frac{Q\,S_w}{m}\frac{b}{2u_0}$ | $N_p=(C_{Np})\frac{Q\,S_w\,b}{I_z}\frac{b}{2u_0}$ | $l_p=(C_{lp})\frac{Q\,S_w\,b}{I_x}\frac{b}{2u_0}$ |
| r | $Y_r=(C_{Yr})\frac{Q\,S_w}{m}\frac{b}{2u_0}$ | $N_r=(C_{Nr})\frac{Q\,S_w\,b}{I_z}\frac{b}{2u_0}$ | $l_r=(C_{lr})\frac{Q\,S_w\,b}{I_x}\frac{b}{2u_0}$ |
| $\delta_a$ | $Y_{\delta_a}=(C_{Y\delta_a})\frac{Q\,S_w\,b}{m}$ | $N_{\delta a}=(C_{N\delta_a})\frac{Q\,S_w\,b}{I_z}$ | $l_{\delta a}=(C_{l\delta_a})\frac{Q\,S_w\,b}{I_x}$ |
| $\delta_r$ | $Y_{\delta_r}=(C_{Y\delta_r})\frac{Q\,S_w}{m}$ | $N_{\delta_r}=(C_{N\delta_r})\frac{Q\,S_w\,b}{I_z}$ | $l_{\delta_r}=(C_{l\delta_r})\frac{Q\,S_w\,b}{I_x}$ |

Fonte: Nelson (1998).

Em que:

- u, v, w, são as velocidades lineares nos eixos x, y e z, respectivamente;
- p, q, e r são as velocidades angulares ao redor dos eixos x, y e z, respectivamente;
- α e β são os ângulos de ataque e derrapagem, respectivamente;
- $\delta_a$, $\delta_e$ e $\delta_r$ são as deflexões de aileron, profundor e leme, respectivamente;
- $\tau_a$ , $\tau_e$ e $\tau_r$ são os parâmetros de eficácia de aileron, profundor e leme, respectivamente;
- $S_W$, AR, c, e, Λ, Γ, λ e b são os seguintes dados da asa: área, alongamento, corda média, eficiência de Oswald, ângulo de enflechamento, ângulo de diedro, afilamento e envergadura, respectivamente;
- $S_{HT}$, $V_H$ e $\eta_{HT}$ representam os seguintes dados do estabilizador horizontal: área, volume e eficiência de cauda, respectivamente;
- e $S_{VT}$, $V_{VT}$ e $\eta_{VT}$ simbolizam os seguintes dados do estabilizador vertical: área, volume e eficiência de cauda. Além disso, $Z_{VT}$ é a distância em relação ao eixo "z" do CG ao estabilizador vertical, respectivamente;
- $X_{HT}$, $X_{VT}$ são as distâncias referente ao eixo "x" do CG ao estabilizador horizontal e estabilizador vertical, respectivamente. Além disso, $X_{CG}$ e $X_{AC}$ são as posições do centro de gravidade e centro aerodinâmico em relação ao eixo "x", respectivamente;
- $C_{L\alpha w}$, $C_{L\alpha t}$, $C_{L\alpha vt}$, $C_{m\alpha f}$, $C_{L0}$, $C_{D0}$ e $C_{N\beta wf}$ correspondem aos seguintes coeficientes: angular da curva de sustentação da asa, angular da curva de sustentação do estabilizador vertical, angular da curva de sustentação do estabilizador horizontal, linear da curva de sustentação da asa, angular da curva de momento no eixo "y" gerado pela fuselagem em relação ao ângulo de ataque, arrasto induzido da asa e momento no eixo "z" gerado pela fuselagem em relação ao ângulo de derrapagem;
- $\Delta C_{l\beta}$, K, $\int_{y1}^{y2} cydy$ e M correspondem aos seguintes fatores: empírico estimado com o afilamento e o alongamento da asa, empírico estimado com a distância da corda raiz da asa ao aileron e a envergadura da asa, integral estimada com as distâncias da corda raiz da asa até as partes do aileron e número de Mach, respectivamente;
- $\frac{d\sigma}{d\beta}$ , $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ são os coeficientes angular das curvas de *sidewash* e *downwash*, respectivamente.

- $I_x$, $I_y$ e $I_z$ são os momentos de inércia em relação aos eixos "x", "y" e "z", respectivamente. Ademais, Q, $u_0$ e m representam a pressão dinâmica, a velocidade inicial no eixo "x" e a massa, respectivamente.

## 2.3 Equações do movimento

Após a etapa de cálculo dos coeficientes e derivadas, é necessário definir as equações que regem o movimento da aeronave. Segundo Cook (2007), a estabilidade dinâmica de uma aeronave está relacionada a modos dinâmicos, responsáveis por movimentos que ocorrem com alta e baixa frequência. A análise destes modos citados pode ser realizada através da frequência natural, vibração particular, de cada corpo e de seu amortecimento. É possível fazer isto através do método de espaço de estados, que conforme Nelson (1998), a partir de uma modelagem em função dos coeficientes e derivadas aerodinâmicas e de estabilidade, obtém-se as Equações 1 e 2 para a parte longitudinal e látero direcional, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{w} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_0 & 0 \\ M_u+M_{\dot{w}}Z_u & M_w+M_{\dot{w}}Z_w & M_q+M_{\dot{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_{\delta e} \\ Z_{\delta e} \\ M_{\delta e}+M_{\dot{w}}Z_{\delta e} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} [\Delta_{\delta e}] \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\beta} \\ \Delta\dot{p} \\ \Delta\dot{r} \\ \Delta\dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_\beta/u_0 & Y_p/u_0 & -(1-Y_r/u_0) & (g\cos\theta_0)/u_0 \\ I_\beta & I_p & I_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta r/u_0} \\ I_{\delta a} & I_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \Delta_{\delta a} \\ \Delta_{\delta r} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Para o cálculo matricial das Equações 1 e 2, dadas por Nelson (1998), foram criadas quatro *functions*: duas apenas considerando a dinâmica a partir de distúrbios atmosféricos (desconsiderando a matriz B de entradas de controle, ou seja, cálculos apenas com a matriz A); e duas para o cálculo dinâmico com entradas de controle (considerando toda a equação de estado), assim obtendo o gráfico *Root Locus* para a análise das respostas transitórias.

Nestas *functions*, o primeiro passo foi o cálculo da equação característica e a aplicação do critério de Root na mesma, com a finalidade de checar a estabilidade. O critério de Root é definido

a partir dos termos que acompanham “lamb” na equação característica, que se positivos, como é o caso das Equações 3 e 4, retiradas dos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998), teremos a estabilidade em todos os modos de vibração, pois irá gerar autovalores com partes reais negativas.

$$lamb^4+5,05*lamb^3+13,2*lamb^2+0,67*lamb+0,59=0 \quad (3)$$

$$lamb^4+9,417*lamb^3+13,982*lamb^2+48,10*lamb+0,42=0 \quad (4)$$

Posteriormente, define-se os autovalores e autovetores da matriz de estado e aqui alguns critérios foram impostos nas *functions* para separar corretamente os modos de vibração conforme o eixo da aeronave. É importante saber que para cada eixo há um determinado modo de vibração que pode ser identificado pelas características de seus autovalores. Ou seja, para o eixo longitudinal, como são gerados dois pares de autovalores reais e complexos, o autovalor que tiver maior parte imaginária será o modo de curto período (*short-period*) e consequentemente o outro par será o do modo fugóide (*phugoid*); para o eixo látero direcional, como temos apenas um autovalor real e complexo, ou seja, o modo de rolagem holandesa (*dutchroll*), para diferenciar os dois autovalores reais, o autovalor que tiver maior magnitude será o modo de rolagem (*roll*), e evidentemente a outra raiz será do modo espiral (*spiral*).

Ademais, para a matriz de autovetores, aplica-se os seguintes critérios na parte longitudinal, como os autovalores são de raízes reais e imaginárias, tem-se a sua matriz de autovetores com partes reais e imaginárias, onde as primeiras duas colunas são correspondentes às raízes do modo de curto período e as demais são do modo fugóide. Em seguida, na parte látero direcional, as últimas duas colunas da matriz de autovetores são correspondentes às raízes do modo de rolagem e espiral, respectivamente, assim, os pares de autovetores imaginários são do modo de rolagem holandesa.

Por fim, são plotados os gráficos de *Root Locus* ou “lugar das raízes”, a fim de analisar de estabilidade e resposta transitória do sistema, já que este demonstra graficamente o lugar dos autovalores e polos zeros do polinômio estudado e permite localizar sua posição conforme a variação do ganho, que vai de zero até infinito. Assim, conforme Freitas *et al.* (2020), para ter a estabilidade absoluta do sistema o gráfico não deve ter representação no semiplano direito, ou seja, no lado positivo do eixo das abcissas, o que representa um sistema com amortecimento inferior ou igual a zero.

## 3. RESULTADOS

Dividiu-se os resultados em dois subitens para as diferentes aplicações. Primeiramente, discorreu-se sobre a análise e validação das rotinas produzidas, onde o código foi aplicado aos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998). Em seguida, as rotinas foram aplicadas para uma comparação da estabilidade dinâmica das aeronaves de 2017, 2018 e 2020 da equipe Sol do Equador.

### 3.1 Validação dos resultados

Os dados de entrada dos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998) foram aplicados no programa e os resultados estão expostos na Tabela 3. Na comparação, para o eixo longitudinal, o maior erro absoluto foi do modo de curto período (0,0108 na parte real e 0,0111 na parte imaginária), seguido do modo *phugoid* que obteve 0,0001 na parte real e 0,0004 na parte imaginária. Além disso, no eixo látero direcional, o erro maior foi no modo *roll*, onde obteve-se 0,0022, seguido por *dutch roll* com 0,002 na parte real e 0,0006 na parte imaginária e por fim *spiral* com 0,000115 de erro.

**TABELA 3.** Comparação entre os resultados do programa e de Nelson (1998).

| Modo de vibração | Nelson (1998) | Programa | Erro Absoluto |
|---|---|---|---|
| *Phugoid* | -0,0171±0,213i | -0.0170±0.2134i | 0.0001±0.0004i |
| Curto-período | -2,5±2,59i | -2.4892±2.6011i | 0,0108±0,0111i |
| *Dutch Roll* | -0,487±2,335i | -0.4890±2.3344i | 0,002±0,0006i |
| *Roll* | -8,435 | -8.4328 | 0,0022 |
| *Spiral* | -0,00877 | -0.008885 | 0,000115 |

Fonte: Próprio autor (2021).

### 3.2 Comparação entre aeronaves

Para aplicação e avaliação do programa, além dos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998), o código também foi aplicado nas aeronaves de 2017, 2018 e 2020 da equipe Sol do Equador, ilustradas pelas Figuras 3, 4 e 5 respectivamente. As análises foram divididas em longitudinal e látero-direcional. É importante ressaltar que, como as aeronaves analisadas são todas estaticamente estáveis, foram utilizados os coeficientes já calculados em estabilidade estática, diretamente no programa como inputs.

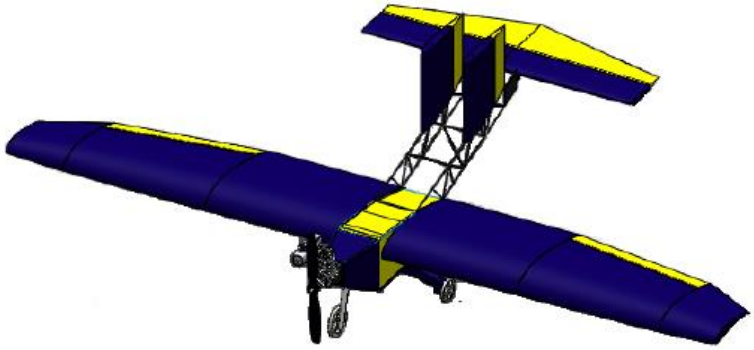

FIGURA 3. Protótipo computacional da aeronave de 2017. Fonte: Acervo da equipe Sol do Equador (2017).

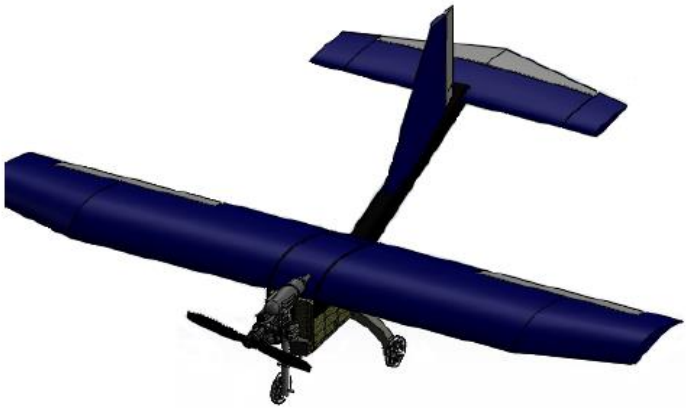

FIGURA 4. Protótipo computacional da aeronave de 2018. Fonte: Acervo da equipe Sol do Equador (2018).

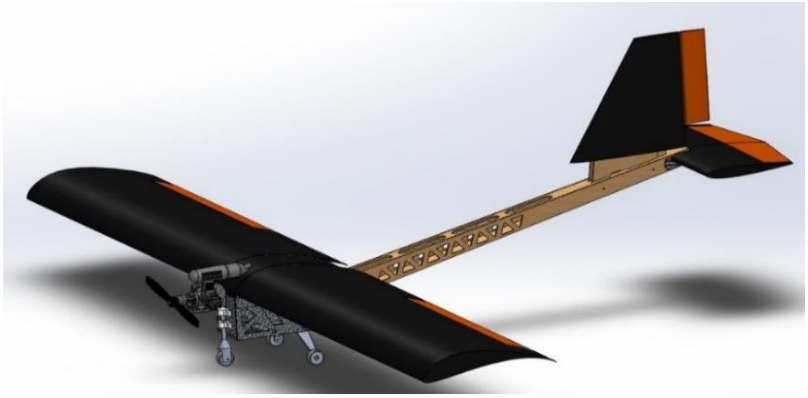

FIGURA 5. Protótipo computacional da aeronave de 2020. Fonte: Acervo da equipe Sol do Equador (2020).

### 3.2.1 Longitudinal

A dinâmica longitudinal é definida por dois modos de oscilação de raízes complexas, o curto período e o *phugoid*. As raízes longitudinais obtidas ao rodar os inputs das aeronaves supracitadas no programa são mostradas na Tabela 4 e plotadas no plano complexo (*Root Locus*) nas Figuras 6, 7 e 8.

**TABELA 4.** Raízes longitudinais das aeronaves da equipe Sol do Equador.

| Modos | Raízes | | |
|---|---|---|---|
| | Aeronave 2017 | Aeronave 2018 | Aeronave 2020 |
| *Phugoid* | -0,0406±0,7101i | -0.1048±0.8621i | -0.0747±0.6851i |
| Curto período | -0,2745±2,5788i | -5.3536±6.2283i | -0.3748±2.8343i |

Fonte: Próprio autor (2021).

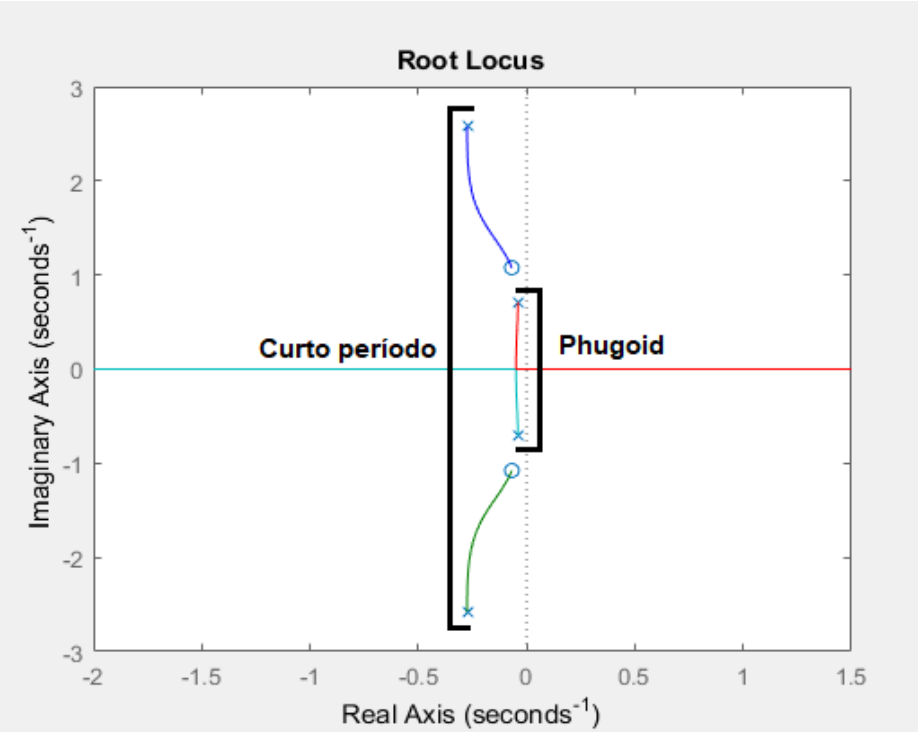


**FIGURA 6.** Raízes longitudinais da aeronave 2017 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

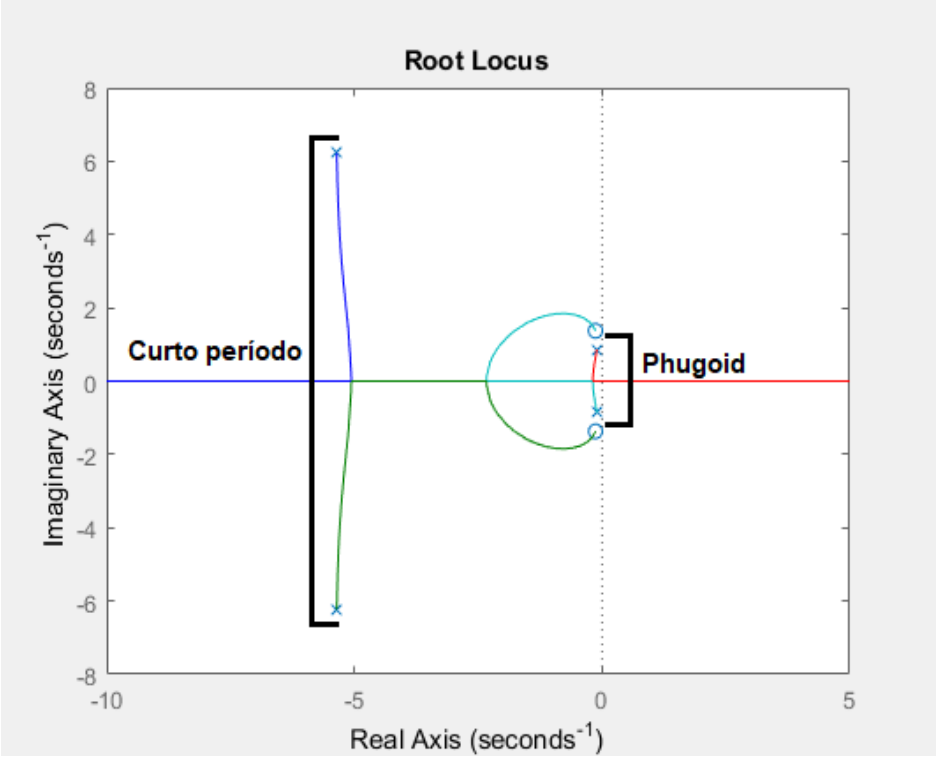


FIGURA 7. Raízes longitudinais da aeronave 2018 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

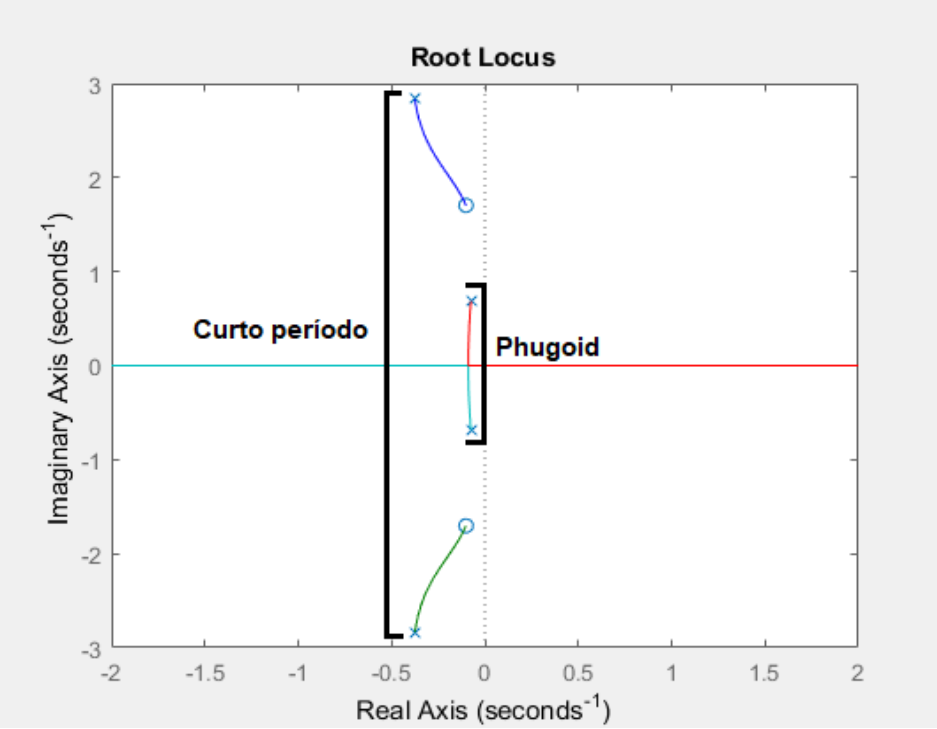


FIGURA 8. Raízes longitudinais da aeronave 2020 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

Apesar de, todas as raízes apresentadas na Tabela 4 indicarem a estabilidade longitudinalmente conforme o critério de Routh, ou seja, a parte real das raízes complexas são negativas, para analisar detalhadamente cada modo, a partir das raízes, a taxa de amortecimento ($\zeta$) e a frequência natural ($\omega_n$) dos modos *Phugoid* e Curto período foram obtidas com a plotagem do gráfico *Root Locus* e esses valores são mostrados na Tabela 5.

**TABELA 5.** Características dos modos longitudinais.

| Aeronaves | 2017 | | 2018 | | 2020 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Modos** | $\zeta$ | $\omega_n$(Hz) | $\zeta$ | $\omega_n$(Hz) | $\zeta$ | $\omega_n$(Hz) |
| *Phugoid* | 0,0571 | 0,1131 | 0,121 | 0,1381 | 0,108 | 0,1096 |
| Curto período | 0,106 | 0,4122 | 0,652 | 1,3066 | 0,131 | 0,4551 |

Fonte: Próprio autor (2021).

Todos os modos de oscilação podem ser classificados conforme a sua qualidade de voo com base na norma MIL-F-8785C, considerando uma aeronave classe III (aeronaves que suportam cargas consideráveis e tem baixa a média manobrabilidade) dentro das fases de voo B (fases de voo simples, como subida, voo reto e descida). Como diz a norma, há três níveis de voo como forma de classificação das qualidades de voo, sendo Nível I as aeronaves que apresentam as melhores qualidades de voo e menor esforço do piloto e o Nível III que apresenta piores qualidades de voo e maiores níveis de esforço do piloto. *Para os modos longitudinais, conforme o curto período definido como Nível I deve possuir* $0,3 \leq \zeta \leq 2,00$ *e o phugoid* $\zeta \geq 0,04$ (MOORHOUSE e WOODCOCK, 1980).

Como observado na Tabela 5, apenas a aeronave 2018 atende aos requisitos determinados pela norma para a garantia de Nível I de qualidades de voo, já que apresenta um amortecimento de 0,652 para o curto período e 0,121 para o *phugoid*. As demais aeronaves também atendem aos requisitos do modo *phugoid*, sendo considerado, portanto, Nível I. No entanto, para o modo curto período, as aeronaves de 2017 e 2020 apresentaram as piores qualidades de voo, já que os requisitos não foram cumpridos, sendo considerados como Nível III.

### 3.2.2 Látero Direcional

A análise látero direcional segue a mesma linha da Longitudinal, no entanto ela apresenta três modos de voo: *Dutch Roll, Roll* e *Spiral*. Segundo Raymer (1992), os modos laterais direcionais são definidos por um par de raízes complexas e duas raízes reais, em que o sinal da parte real

define a estabilidade (negativo indica estável e positivo, instável. As raízes são mostradas na Tabela 6 e plotadas no plano complexo nas Figuras 9, 10 e 11.

TABELA 6. Raízes látero direcionais das aeronaves da equipe Sol do Equador.

| Modos | Autovalores | | |
|---|---|---|---|
| | Aeronave 2017 | Aeronave 2018 | Aeronave 2020 |
| *Dutch roll* | -0,8812±19,577i | -0.5227±19.217i | -1.3026±17.898i |
| *Roll* | -0,6979 | -1.5755 | -1.7820 |
| *Spiral* | 0,0915 | 0.1465 | 0.2062 |

Fonte: Próprio autor (2021).

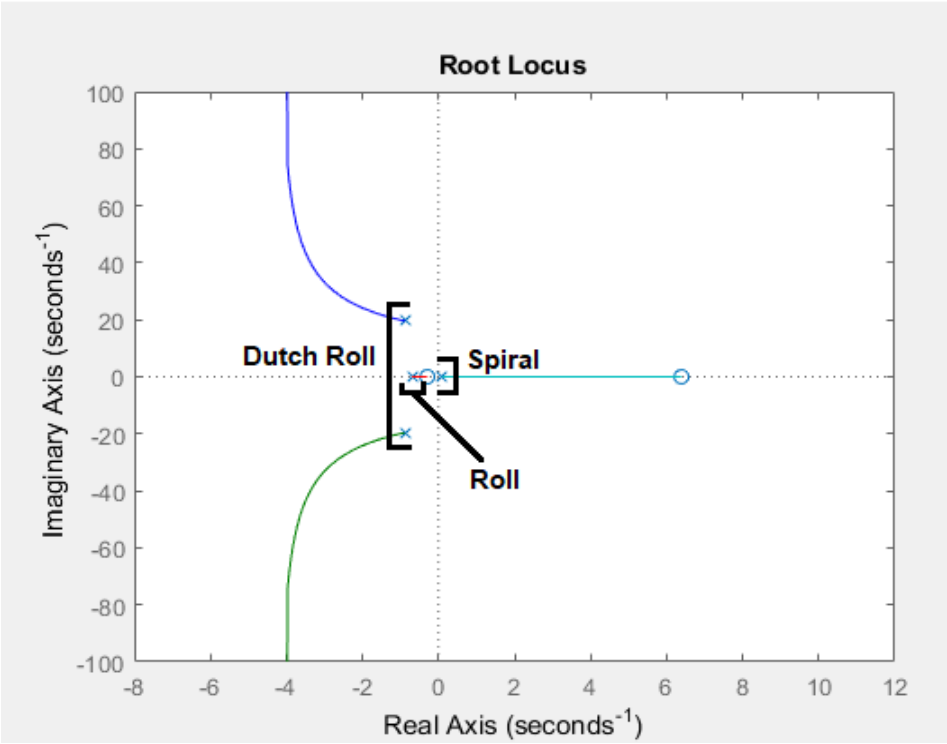


FIGURA 9. Raízes látero direcionais da aeronave 2017 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

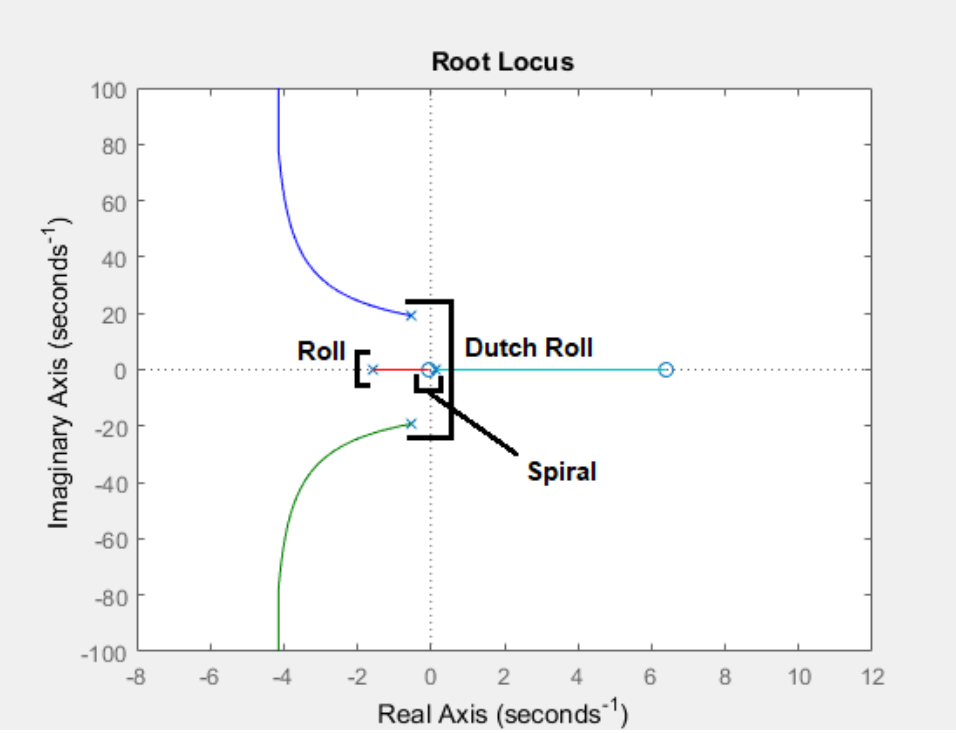


FIGURA 10. Raízes látero direcionais da aeronave 2018 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

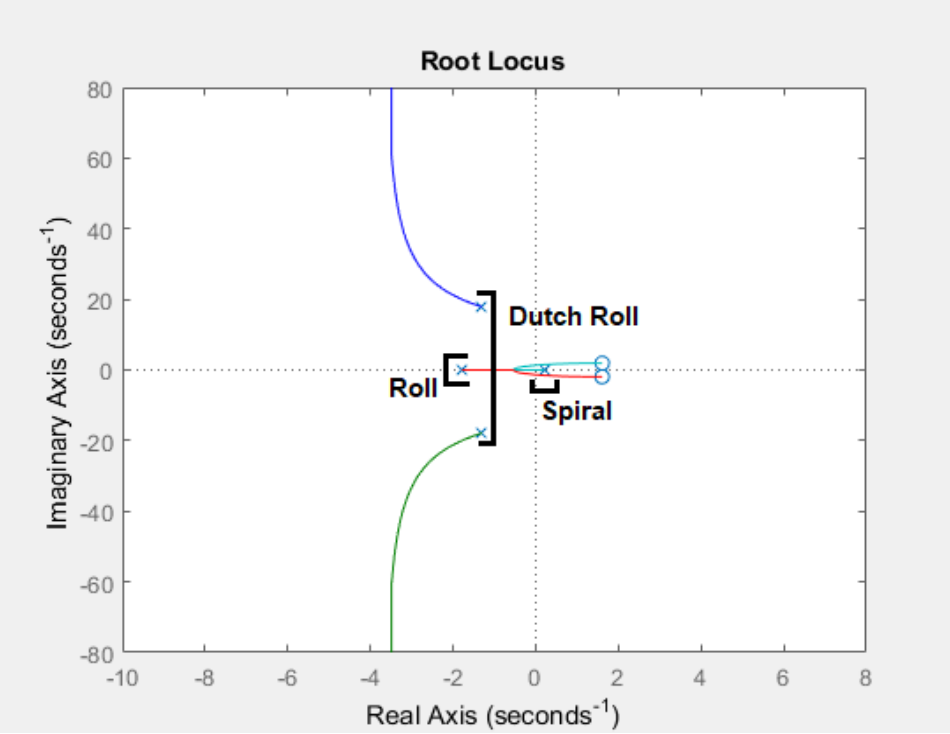


FIGURA 11. Raízes látero direcionais da aeronave 2020 no plano complexo. Fonte: Próprio autor (2021).

A partir do gráfico *Root Locus*, são determinados o amortecimento e a frequência natural para o *Dutch Roll* (Tabela 7). Além disso, para análise dos modos *Roll* e *Spiral*, foram obtidas constantes de tempo, que são apresentadas na Tabela 8.

**TABELA 7.** Amortecimento e frequência natural do modo *Dutch Roll*.

| Aeronaves | 2017 | | 2018 | | 2020 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Modos** | ζ | $\omega_n$(Hz) | ζ | $\omega_n$(Hz) | ζ | $\omega_n$(Hz) |
| *Dutch Roll* | 0,045 | 3,1194 | 0,0272 | 3,0557 | 0,08 | 2,8488 |

Fonte: Próprio autor (2021).

**TABELA 8.** Constante de tempo dos modos *Roll* e *Spiral*.

| Aeronaves | 2017 | 2018 | 2020 |
|---|---|---|---|
| **Modos** | τ(s) | τ(s) | τ(s) |
| *Roll* | 0,9886 | 0,4379 | 0,3872 |
| *Spiral* | 7,5409 | 4,7098 | 3,3462 |

Fonte: Próprio autor (2021).

Na análise dos autovalores da Tabela 6, em todas as aeronaves a parte látero direcional está instável devido ao autovalor positivo do modo *Spiral*. Entretanto, essa instabilidade é aceitável.

Segundo Moorhouse e Woodcock (1980), o modo *Dutch Roll*, considerando uma aeronave classe III dentro das fases de voo B, para ser classificado como Nível I, deve ter $\zeta \geq 0.08$; $\zeta\omega n \geq 0.15$; $\omega n \geq 0.4$. Verificando as características desse modo na Tabela 7, apenas a aeronave 2020 atende as condições impostas pela norma, classificada assim como Nível I.

Ademais, a Tabela 8 mostra os modos *Roll* e *Spiral*, que por se tratarem de modos de oscilação de primeira ordem, a característica analisada é a constante de tempo, definida como o tempo que leva para a resposta atingir 63% do valor no estado estacionário. *No modo Roll, para uma aeronave ser enquadrada em Nível I, deve apresentar* $\tau(s) < 1{,}4$ (MOORHOUSE e WOODCOCK, 1980), o que ocorre em todas as aeronaves analisadas. Por fim, *no modo Spiral, para que uma aeronave seja Nível I ela deve ter* $\tau(s) \geq 20\ s$ (MOORHOUSE e WOODCOCK, 1980), algo que não ocorre em nenhuma das aeronaves pela presença de estabilizadores verticais, contribuindo para a instabilidade nesse modo, algo que é aceitável para aeronaves de aerodesign. Assim, temos que as qualidades de voo das aeronaves em *Spiral* se classificam como Nível III.

## 4 CONCLUSÕES

No decorrer deste artigo, abordou-se a metodologia para a criação de um código em Matlab para análise da estabilidade dinâmica e controle de aeronaves rádio controladas. A avaliação do código foi feita a partir de sua aplicação nos exemplos 4.3 e 5.3 de Nelson (1998), em que se mostrou eficiente, visto que os erros absolutos obtidos foram ínfimos quando comparou-se os resultados (maiores erros de 0,0108 a 0,0111). Ademais, admitindo que as fases de voo para uma aeronave da competição SAE Brasil Aerodesign são do tipo B e se encaixam na classe III, conforme Moorhouse e Woodcock (1980), foi possível avaliar as qualidades de voo e a estabilidade dinâmica das aeronaves de 2017, 2018 e 2020 da equipe Sol do Equador. Nesta análise, observou-se que na parte longitudinal, apenas a aeronave 2018 teve bons resultados, com qualidades de voo Nível I nos dois modos, curto período e *phugoid*. Na parte látero direcional, todas as aeronaves foram dadas como Nível III no modo *spiral* e, nos demais modos, a aeronave 2020 foi a que se destacou, tendo qualidades de voo Nível I em *dutch roll* e *roll*. Os piores números foram da aeronave 2017, classificada como Nível III em qualidades de voo nos dois eixos, Longitudinal e Látero-Direcional.

## REFERÊNCIAS

COOK, M. V. Flight dynamics principles: A linear systems approach to aircraft stability and control. 2. ed. Elsevier. Miami, 2007.

D Moorhouse and R Woodcock. Us military specification mil-f-8785c. *US Department of Defense*, 1980.

FREITAS, L. de. S. F., CHIARATTI, A., CORDEIRO, F. de. P. G., DO ALTIMISSIMO, M. I. Dimensionamento e validação computacional de um controlador PI para melhora da estabilidade longitudinal dinâmica em um tailess. 7° FORUM SAE BRASIL AERODESIGN 2020, Minas Gerais, p. 1-7, Abril/2020.

JÚNIOR, J. L. R., VALE, do. L. S. F., AMARAL., M. L., NETO, C. N. R. Desenvolvimento de um código computacional para análise da estabilidade estática de aeronaves rádio-controladas. CONTECC' 2018, Maceió – AL, p. 1-5, 21 a 24 de agosto de 2018.

MIRANDA, L. E. J. R.; Fundamentos da Engenharia Aeronáutica com Aplicações ao Projeto SAE - AeroDesign. Salto/SP, 2014.

NELSON, R. C. Flight stability and automatic control. 2nd ed. McGraw-Hill. New York. 1998.

RAYMER, D. P. Aircraft design: a conceptual approach. 2. ed. American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA. Washigton, 1992.