

CÁLCULO DOS OPERADORES DE CRIAÇÃO E ANIQUILAÇÃO DE UMA PARTÍCULA LIVRE NO FORMALISMO DAS COORDENADAS DO CONE DE LUZ

Jorge Kysnney Santos Kamassury¹, Damião Pedro Meira Filho², Charles da Rocha Silva³, João Bosco Soares Pampolha Júnior³, Robhyson Denys Rodrigues da Silva², Asael Ribeiro Pinto²

¹Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - Santa Catarina, Brasil
(jorge.kamassury@posgrad.ufsc.br)

²Instituto Federal do Pará, Campus Santarém, Santarém - Pará, Brasil

³Instituto Federal do Pará, Campus Belém, Belém - Pará, Brasil

Resumo: Este trabalho apresenta didaticamente os trâmites matemáticos exigidos para a construção dos operadores de criação e aniquilação para uma partícula quântica livre considerando as coordenadas do cone de luz. Para tanto, são elencadas as relações entre as coordenadas supracitadas e as coordenadas (ct, x, y, z) , além do uso da equação de Klein-Gordon-Fock no formalismo das coordenadas do cone de luz. Por fim, obtêm-se o operador evolução temporal e os operadores quânticos de criação e de aniquilação do tipo integral de movimento.

Palavras-chave: Coordenadas do cone de luz; operadores quânticos; operador de criação; operador de aniquilação; equação de Klein-Gordon-Fock.

INTRODUÇÃO

Introduzidas pelo engenheiro eletricitista e físico inglês Paul Dirac, as coordenadas do cone de luz (também conhecidas como coordenadas da frente de luz) foram desenvolvidas com o objetivo de construir formas de descrever a dinâmica relativística de um sistema físico (Dirac, 1949). De fato, a ideia original consiste na combinação dos princípios da relatividade restrita com a formulação hamiltoniana de modo que a única exigência é que a teoria satisfaça as propriedades do grupo de Poincaré.

Em razão das suas propriedades, nas últimas décadas, tais coordenadas têm sido largamente empregadas em teoria quântica de campos (TQC) e cromodinâmica quântica (QCD) sob regime de baixas energias. Especificamente no contexto do presente trabalho, as coordenadas do cone de luz proporcionam a estrutura algébrica da equação relativística de Klein-Gordon-Fock (EK-G-F). Obtida em 1926, de forma independente pelos físicos Oskar Klein, Walter Gordon e Vladimir Fock, a EK-G-F (também chamada de equação de Klein-Fock-Gordon ou apenas equação de Klein-Gordon) é historicamente reconhecida como a primeira equação de onda relativística, tendo aplicações em óptica não linear, física da matéria condensada e fenômenos de onda dispersiva, além de permitir a descrição do comportamento de partículas com spin nulo (Ohlsson, 2011; Meira Filho e Kamassury, 2018; Veerasha et al., 2020).

Ainda no âmbito da EK-G-F, conforme apresentado por Bagrov et al. (1976), ao viabilizar a troca da diferencial parcial de segunda ordem no tempo $\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)$ por uma diferencial parcial de primeira ordem na variável $\left(\frac{\partial}{\partial u^0}\right)$, o sistema de coordenadas do cone de luz facilita a construção do operador de evolução temporal a partir do qual é possível estabelecer um novo operador de aniquilação com status de integral de movimento. No contexto dos estados quânticos semiclássicos, em regime relativístico, este novo operador é relevante para a obtenção dos estados quânticos coerentes de uma partícula quântica carregada sob influência de diferentes configurações de campo eletromagnético clássico.

Na prática, essa facilitação algébrica tem seu apelo ao dar suporte aos estudos teóricos sobre os estados coerentes tão úteis na teoria quântica moderna, com aplicações imediatas em TQC, gravidade quântica em loop, óptica e computação quântica (Pereira e Miranda, 2002; Gazeau, 2009; Bagrov et al., 2015).

Isto posto, sob um escopo prioritariamente pedagógico, no presente trabalho são apresentadas as etapas do desenvolvimento algébrico para a construção dos operadores de criação e aniquilação para uma partícula livre sob o formalismo das coordenadas de luz. Para tanto, inicialmente, elencam-se as relações entre as coordenadas do cone de luz e as

coordenadas do espaço-tempo de Minkowski. Posteriormente, apresenta-se a EK-G-F usando as coordenadas curvilíneas generalizadas u^μ . Finalmente, nas duas últimas seções, obtêm-se o operador de evolução temporal e o operador do tipo integral de movimento.

COORDENADAS DO ESPAÇO DE MINKOWSKI E AS COORDENADAS DO CONE DE LUZ

De forma breve, para identificar associações entre as coordenadas do espaço-tempo de Minkowski e as coordenadas do cone de luz, considere o diagrama da Figura 1 inspirado na abordagem apresentada por Kamassury et al. (2020), na qual, $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dz)^2$ é o elemento de linha de um subespaço bidimensional (z e ct).

Relacionando as coordenadas do cone de luz (u^0 e u^3) com as coordenadas (z e $x^0 = ct$), alcançamos:

$$u^0 = +z\cos(45) + x^0\sin(45) = \frac{x^0 + z}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$u^3 = -z\cos(45) + x^0\sin(45) = \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

De posse das equações (1) e (2) e generalizando para o espaço 4-dimensional, obtêm-se tanto as coordenadas do espaço-tempo de Minkowski

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (3)$$

quanto as coordenadas do cone de luz:

$$\begin{aligned} u^\mu &= (u^0, u^1, u^2, u^3) \\ &= \left(\frac{x^0 + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{ct + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{ct - z}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

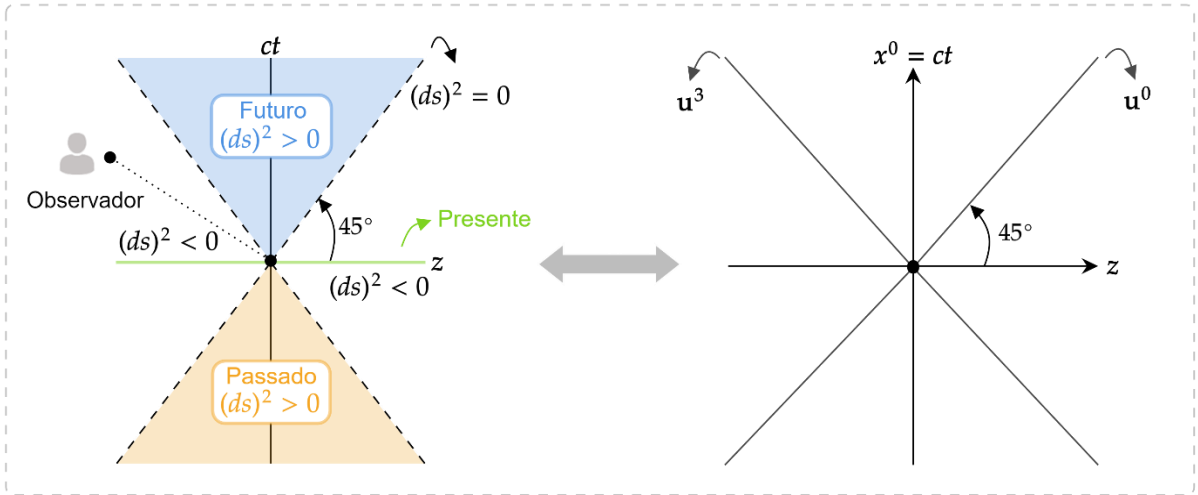


Figura 1. Diagrama e coordenadas do cone de luz.

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON-FOCK PARA UMA PARTÍCULA LIVRE EM COORDENADAS DO CONE DE LUZ

Considerando as coordenadas espaço-temporais curvilíneas generalizadas u^μ em termos das coordenadas cartesianas e de tempo x^μ , a EK-G-F para uma partícula livre e relativística pode ser escrita como

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu - i \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{p}_\alpha \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (5)$$

onde o tensor métrico $\tilde{g}^{\mu\nu}$, o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ e o termo \tilde{p}_μ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}_{\mu\nu} (\partial_\alpha \tilde{g}_{\nu\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\nu\alpha} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta}) \\ \tilde{p}_\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial u^\mu} \end{aligned}$$

Fazendo uso das relações expressas em (4) e sabendo que as componentes não nulas da métrica $\eta^{\mu\nu}$ são

$$\eta^{jj} = 1, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

temos

$$g^{00} = g^{01} = g^{02} = g^{10} = g^{12} = g^{13} = g^{20} \\ = g^{21} = g^{23} = g^{31} = g^{32} = g^{33} = 0$$

e

$$g^{03} = -g^{11} = -g^{22} = g^{30} = 1$$

Observando essas últimas relações, conclui-se que os componentes do símbolo de Christoffel são todos nulos ($\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$), o que possibilita reescrever a equação (5) como:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{p}_{\mu} \tilde{p}_{\nu} \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (6)$$

Para os próximos passos, considere as relações entre as coordenadas (ct, x, y, z) e (u^0, u^1, u^2, u^3) dos operadores diferenciais dispostos na tabela 1. Isto posto, pode-se substituir adequadamente as relações dos operadores diferenciais parciais na equação (6) como se segue

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^{0^2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right) \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} -$$

Tabela 1: Relação entre os operadores diferenciais dos sistemas de coordenadas cartesianas e de tempo e as coordenadas do cone de luz.

Coordenadas	x	$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u^1}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}}$
	y	$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}}$
	$x^0 = ct$	$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial}{\partial u^3} \right)$	$\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^{0^2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right)$
	z	$\frac{\partial}{\partial x^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{\partial}{\partial u^3} \right)$	$\frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^{0^2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right)$

OPERADOR DE EVOLUÇÃO TEMPORAL

Para a obtenção do operador de evolução temporal, considere uma partícula quântica livre de spin-zero eletricamente carregada cuja dinâmica é descrita pela EK-G-F no sistema de coordenadas do cone de luz expressa na equação (7) que pode ser reescrita como:

$$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^0 \partial u^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (10)$$

Ademais, pode-se definir os operadores de criação (a) e aniquilação (a^+) associados às coordenadas u^1 e u^2 como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^{0^2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right) \Psi = -\frac{m_0 c^2}{\hbar^2} \Psi$$

resultado na expressão:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \Psi \right) \right] \quad (7)$$

A equação (7) é reconhecida como a EK-G-F para uma partícula livre escrita em termos das coordenadas do cone de luz. Alternativamente, é possível reescrevê-la de forma algebricamente similar à famosa equação de Schrödinger (Bagrov e Gitman, 1990), ou seja

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \hat{\mathcal{H}} \Psi \quad (8)$$

em que a função de onda Ψ está descrita em termos das coordenadas (u^1, u^2, u^3, u^0) e o operador do tipo hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \right) \quad (9)$$

$$\hat{a}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right), \quad \hat{a}_1^+ = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \\ \hat{a}_2 = \left(i \frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u^1} \right), \quad \hat{a}_2^+ = -\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \quad (11)$$

Em seguida, calcula-se convenientemente a expressão $\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi$ da seguinte forma:

$$\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \Psi \\ = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u^1} - i \frac{\partial \Psi}{\partial u^2} \right) \\ = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{i^2}} - i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^1 \partial u^2} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2 \partial u^1} \quad (12)$$

E, de forma análoga, a expressão $\hat{a}_2\hat{a}_2^+\Psi$:

$$\hat{a}_2\hat{a}_2^+\Psi = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^{i^2}} - i \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2\partial u^1} + i \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^1\partial u^2} \quad (13)$$

Verificando que $\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^1\partial u^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2\partial u^1}$, reescreve-se as equações (12) e (13), nesta ordem, como

$$\hat{a}_i\hat{a}_i^+\Psi = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^{i^2}}, \text{ onde } i = 1, 2 \quad (14)$$

assim como o operador hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ presente na equação (8) no seguinte formato:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1\hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2\hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \quad (15)$$

Neste íterim, definindo o operador $\hat{\mathcal{K}}_3 = \frac{\partial}{\partial u^3}$ é indispensável obter o comutador entre este e o operador $\hat{\mathcal{H}}$, com a aplicação deste comutador sobre a função de onda $\Psi = \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)$, isto é:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{K}}_3]_- \Psi = \hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{K}}_3\Psi - \hat{\mathcal{K}}_3\hat{\mathcal{H}}\Psi \quad (16)$$

Desenvolvendo algebricamente o comutador, obtém-se

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{K}}_3]_- \Psi = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{K}}_3)^{-1} (\Gamma) \hat{\mathcal{K}}_3 \Psi - \hat{\mathcal{K}}_3 \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{K}}_3)^{-1} \Gamma \Psi \quad (17)$$

em que:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{a}_i\hat{a}_i^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \quad (18)$$

Em seguida, sabendo que

$$\hat{\mathcal{K}}_3\hat{a}_1\hat{a}_1^+\Psi = \hat{a}_1\hat{a}_1^+\hat{\mathcal{K}}_3\Psi \quad (19)$$

e substituindo essa última relação na equação (17), alcança-se:

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{K}}_3]_- \Psi = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{K}}_3)^{-1} (\Gamma) \hat{\mathcal{K}}_3 \Psi - \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{K}}_3)^{-1} \Gamma \hat{\mathcal{K}}_3 \Psi = 0 \quad (20)$$

Com base no formalismo de Heisenberg, estados quânticos que descrevem a evolução temporal de estados quânticos puros que pertencem ao espaço de Hilbert, além dos observáveis associados aos operadores $\hat{\mathcal{A}}$ independentes do tempo podem ser, no formalismo de Schrödinger, substituídos por

operadores $\hat{\mathcal{A}}(t)$, que por sua vez, evoluem por meio de uma transformação unitária, a saber:

$$\hat{\mathcal{A}}(t) = \exp\left(\frac{i\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}\right) \hat{\mathcal{A}} \exp\left(-\frac{i\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}\right) \quad (21)$$

Dado que o operador $\hat{\mathcal{A}}(t)$ satisfaz a seguinte equação de movimento

$$i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{A}}(t)}{dt} = [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{H}}]_- \quad (22)$$

verifica-se que:

$$-i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{K}}_3}{dt} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{K}}_3]_- = 0 \quad (23)$$

Este último resultado nos permite afirmar que o operador $\hat{\mathcal{K}}_3 = \frac{\partial}{\partial u^3}$ é um operador do tipo *integral de movimento* para a equação (7). Em outros termos:

$$-i \frac{\partial}{\partial u^3} \Psi = \mathcal{K}_3 \Psi \quad (24)$$

Ainda, admitindo que operador \mathcal{K}_3 é uma constante, é viável reescrever a função de onda sob a forma

$$\Psi(u^1, u^2, u^3, u^0) = \exp(-i\mathcal{K}_3 u^3) \quad (25)$$

tal que

$$\hat{\mathcal{K}}_3 \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0) = -i\mathcal{K}_3 \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0) \quad (26)$$

o que assegura que Ψ é autofunção do operador $\hat{\mathcal{K}}_3$ com correspondente autovalor \mathcal{K}_3 .

Neste permeio, revisitando a modelagem da EK-G-F no formato da equação de Schrödinger destacada na expressão (8), ou seja,

$$\frac{\partial \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)}{\partial u^0} = \hat{\mathcal{H}} \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)$$

realizando a devida substituição da função de onda Ψ pela expressão (25)

$$\frac{\partial}{\partial u^0} \exp[-i\mathcal{K}_3 u^3 \Psi] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\hat{\Xi} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \exp(-i\mathcal{K}_3 u^3) \Psi$$

e desenvolvendo-a algebricamente

$$\frac{\partial}{\partial u^3} \exp(-i\mathcal{K}_3 u^3) \frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \left(\hat{\Xi} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \exp(-i\mathcal{K}_3 u^3) \Psi$$

obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = -\frac{1}{2i\mathcal{K}_3} \left(\hat{\mathcal{E}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi \quad (27)$$

sendo $\hat{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial u^j{}^2}$. Em seguida, redefinindo Ψ e $\hat{\mathcal{H}}$ como

$$\begin{aligned} \Psi &= \hat{U}(u^0) \Psi(u^1, u^2) \\ \hat{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2i\mathcal{K}_3} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^i{}^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

reescreve-se a equação (27) como se segue:

$$\begin{aligned} \Psi(u^1, u^2) \frac{d\hat{U}(u^0)}{du^0} &= \hat{U}(u^0) \left[-\frac{1}{2i\mathcal{K}_3} \left(\hat{\mathcal{E}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \right] \Psi \\ &= \hat{U}(u^0) \hat{\mathcal{H}} \Psi \end{aligned}$$

Por fim, integrando ambos os membros da última expressão

$$\begin{aligned} \int [\hat{U}(u^0)]^{-1} d\hat{U}(u^0) &= \int \hat{\mathcal{H}} du^0 \\ \ln[\hat{U}(u^0)] &= \int \hat{\mathcal{H}} du^0 \end{aligned}$$

obtem-se a expressão (29) que é denominado como *operador de evolução temporal*.

$$\hat{U}(u^0) = \exp \left(\int \hat{\mathcal{H}} du^0 \right) \quad (29)$$

OPERADOR DE CRIAÇÃO E ANIQUILAÇÃO DO TIPO INTEGRAL DE MOVIMENTO

Uma vez alcançado o operador de evolução temporal, manifesta-se conveniente construir o operador aniquilação que se comporta como *integral de movimento*. Para tal propósito, considere as seguintes expressões:

$$\hat{A}_1(u^0) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_1 \hat{U}(u^0)^{-1} \quad (30)$$

$$\hat{A}_2(u^0) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_2 \hat{U}(u^0)^{-1} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(u^0) \Psi(u^1, u^2) &= \\ \hat{U}(u^0) \hat{a}_1 \hat{U}(u^0)^{-1} \Psi(u^1, u^2) & \end{aligned} \quad (32)$$

Com a devida substituição do resultado da equação (29) na equação (32), e procedendo algebricamente, alcança-se a expressão (33).

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(u^0) \Psi(u^1, u^2) &= \exp \left(\int \hat{\mathcal{H}} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\hat{\mathcal{H}} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \\ &= \exp \left[\int \left(-\frac{i}{2\mathcal{K}_3} + \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \right) \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} du^0 \right] \exp \left(\int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \hat{\mathcal{E}} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\frac{i}{2\mathcal{K}_3} \hat{\mathcal{E}} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \\ &= \exp \left(\int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \hat{\mathcal{E}} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\frac{i}{2\mathcal{K}_3} \hat{\mathcal{E}} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \end{aligned} \quad (33)$$

Recorrendo as séries de McLaurin para as funções exponencias (Stewart, 2012)

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\ e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

adotando convenientemente

$$\hat{w} = \int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \hat{\mathcal{E}} du^0$$

e realizando alguns trâmites algébricos, resultamos em:

$$\begin{aligned} e^{\hat{w}} \hat{a}_1 e^{-\hat{w}} &= \left(1 + \hat{w} + \frac{\hat{w}^2}{2} + \dots \right) \hat{a}_1 \left(1 - \hat{w} + \frac{\hat{w}^2}{2} + \dots \right) \\ &= \hat{a}_1 + \hat{w} \hat{a}_1 + \frac{\hat{w}}{2} \hat{a}_1 - \hat{w} \hat{a}_1 - \hat{w} \hat{a}_1 \hat{w} - \frac{\hat{w} \hat{a}_1 \hat{w}}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\hat{w}^2 \frac{\hat{a}_1}{2} + \frac{\hat{w} \hat{a}_1 \hat{w}^2}{2} + \frac{\hat{w}^2 \hat{a}_1 \hat{w}^2}{4} + \dots \\ &= \hat{a}_1 + [\hat{w}, \hat{a}_1] + \frac{1}{2} (\hat{w}^2 \hat{a}_1 - 2\hat{w} \hat{a}_1 \hat{w} + \hat{w}^2 \hat{a}_1) + \dots \end{aligned}$$

Reescrevendo o termo entre parênteses como abaixo

$$\begin{aligned} \hat{w}^2 \hat{a}_1 - 2\hat{w} \hat{a}_1 \hat{w} + \hat{w}^2 \hat{a}_1 &= \hat{w} (\hat{w} \hat{a}_1 - \hat{a}_1 \hat{w}) - \\ &(\hat{w} \hat{a}_1 - \hat{a}_1 \hat{w}) \hat{w} \\ &= \hat{w} [\hat{w}, \hat{a}_1]_- - [\hat{w}, \hat{a}_1]_- \hat{w} \\ &= [\hat{w}, [\hat{w}, \hat{a}_1]_-]_- \end{aligned}$$

facilmente, obtém-se a seguinte expressão:

$$e^{\hat{w}} \hat{a}_1 e^{-\hat{w}} = \hat{a}_1 + [\hat{w}, \hat{a}_1]_- + \frac{1}{2} [\hat{w}, [\hat{w}, \hat{a}_1]_-]_-$$

Analisando minuciosamente cada termo, temos:

$$\begin{aligned}
[\widehat{w}, \widehat{a}_1]_- \Psi(u^1, u^2) &= (\widehat{w}\widehat{a}_1 - \widehat{a}_1\widehat{w})\Psi(u^1, u^2) \\
&= \widehat{w}\widehat{a}_1\Psi(u^1, u^2) - \\
&\quad \widehat{a}_1\widehat{w}\Psi(u^1, u^2)
\end{aligned} \tag{34}$$

Especificamente para o termo $\widehat{w}\widehat{a}_1\Psi(u^1, u^2)$, encontra-se a relação dada na equação (35). De posse deste resultado, é possível reformular a equação (34) como

$$[\widehat{w}, \widehat{a}_1]_- \Psi(u^1, u^2) = 0$$

e por consequência:

$$e^{\widehat{w}}\widehat{a}_1e^{-\widehat{w}}\Psi(u^1, u^2) = \widehat{a}_1\Psi(u^1, u^2) \tag{36}$$

Neste panorama, observamos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}_1(u^0)\Psi(u^1, u^2) &= \widehat{U}(u^0)\widehat{a}_1\widehat{U}(u^0)^{-1}\Psi(u^1, u^2) \\
&= \widehat{a}_1\Psi(u^1, u^2)
\end{aligned} \tag{37}$$

do qual, concluímos que:

$$\widehat{\mathcal{A}}_1 = \widehat{a}_1 \quad , \quad \widehat{\mathcal{A}}_1^+ = \widehat{a}_1^+$$

$$\begin{aligned}
\widehat{w}\widehat{a}_1\Psi(u^1, u^2) &= \left(\int -\frac{i}{2\mathcal{K}_3} \Xi du^0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \Psi(u^1, u^2) \\
&= \left[\int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + i \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} \right) du^0 \right] \left[\frac{\partial \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^1} + i \frac{\partial \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^2} \right] \\
&= \int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \left[\frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^3}} + i \frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^2} \partial u^2} + \frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^2} \partial u^1} + i \frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^3}} \right] du^0 \\
&= \int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^2}} + i \frac{\partial^2 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^2}} \right] du^0 \\
&= \widehat{a}_1\widehat{w}\Psi(u^1, u^2) du^0
\end{aligned} \tag{35}$$

Utilizando procedimentos análogos aos descritos para obtenção das relações operatoriais anteriores, verificamos que

$$\widehat{\mathcal{A}}_2 = \widehat{a}_2 \quad , \quad \widehat{\mathcal{A}}_2^+ = \widehat{a}_2^+$$

onde $\widehat{\mathcal{A}}_1^+$ e $\widehat{\mathcal{A}}_2^+$ são os operadores adjuntos dos operadores $\widehat{\mathcal{A}}_1$ e $\widehat{\mathcal{A}}_2$, nesta ordem.

Das relações em (11), identificamos:

$$\widehat{a}_1 = -\widehat{a}_2^+ \quad , \quad \widehat{a}_2 = -\widehat{a}_1^+$$

Por fim, facilmente alcançamos as relações análogas às expressões (30) e (31) para os operadores $\widehat{\mathcal{A}}_1^+$ e $\widehat{\mathcal{A}}_2^+$, a saber

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}_1^+ &= [\widehat{U}\widehat{a}_1\widehat{U}^{-1}]^+ = [\widehat{a}_1\widehat{U}^{-1}]^+ \widehat{U}^+ \\
&= [\widehat{U}^{-1}]^+ \widehat{a}_1^+ \widehat{U}^+
\end{aligned}$$

e

$$\widehat{\mathcal{A}}_2^+ = [\widehat{U}\widehat{a}_2\widehat{U}^{-1}]^+ = [\widehat{U}^{-1}]^+ \widehat{a}_2^+ \widehat{U}^+$$

Sabendo que o operador evolução temporal \widehat{U} , segundo as expressões (28) e (29), é dado por

$$\widehat{U} = \exp \left[\int \frac{(-i)}{2\mathcal{K}_3} \left(\Xi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right]$$

podemos ainda escrever o operador inverso bem como o operador adjunto do operador \widehat{U} , nesta ordem, como

$$\begin{aligned}
\widehat{U}^{-1} &= \exp \left[\int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right] \\
\widehat{U}^+ &= \exp \left[\int \frac{i}{2\mathcal{K}_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right]
\end{aligned}$$

tal que

$$\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}^+ \quad , \quad [\widehat{U}^{-1}]^+ = \widehat{U}$$

e os operadores de aniquilação do tipo integral de movimento são expressos como:

$$\widehat{\mathcal{A}}^{-1} = \widehat{U}\widehat{a}_1^+\widehat{U}^{-1} \quad , \quad \widehat{\mathcal{A}}_2^+ = \widehat{U}\widehat{a}_2^+\widehat{U}^{-1}$$

CONCLUSÃO

O formalismo do sistema de coordenadas do cone de luz tem seu apelo por facilitar os trâmites algébricos e compressão da dinâmica relativística de sistemas físicos inclusive com notáveis aplicações em TQC e computação quântica.

Neste sentido, partindo das abordagens apresentadas por Bagrov, Buchbinder, Gitman (1976) e Kamassury et al. (2020), desenvolveu-se didaticamente os passos matemáticas e considerações físicas suficientes para a construção dos operadores de criação e aniquilação tão

úteis em estudos de estados quânticos coerentes (ou estados quase-clássicos).

Além de servir como um texto preparatório para estudos avançados em áreas da física contemporânea, o caráter pedagógico e sequencial da abordagem apresentada, apesar de estar orientado ao modelo da equação de Klein-Gordon-Fock para uma partícula quântica livre, pode ser facilmente transportado para outros contextos e configurações de campo.

REFERÊNCIAS

- Bagrov, V. G.; Buchbinder, I. L.; Gitman, D. M. Coherent states of a relativistic particle in an external electromagnetic field. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 9, n. 11, p. 1955-1965, 1976.
- Bagrov, V. G.; Gitman, D. M.; Pereira, A. S. Coherent states of systems with quadratic hamiltonians. **Brazilian Journal of Physics**, v. 45, p. 369-375, 2015.
- Bagrov, V. G.; Gitman, D. M. **Exact solutions to relativistic wave equations**. Springer, Dordrecht, 1990.
- Dirac, P. A. M. Forms of relativistic dynamics. **Reviews of Modern Physics**, v. 21, n. 3, p. 392-399, 1949.
- Gazeau, J. P. **Coherent states in quantum physics**. Wiley-VCH, Weinheim, 2009.
- Kamassury, J. K. S.; Meira Filho, D. P.; Farias, S. A. S.; Paraski, N. V. Obtenção da equação de Klein-Gordon-Fock em coordenadas do cone de luz. In: Simpósio Brasileiro de Engenharia Física, 14., 2020, Santarém. **Anais ...** Ponta Grossa: Atena Editora, 2020. p. 70-82.
- Meira Filho, D. P.; Kamassury, J. K. S. Potência irradiada por uma carga elétrica acelerada no espaço-tempo de Minkowski. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 3, p. e3316, 2018.
- Ohlsson, T. **Relativistic quantum physics**. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- Pereira, R. G.; Miranda, E. Introdução à teoria quântica de campos: do oscilador harmônico ao campo escalar livre. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 237-246, 2002.
- Stewart, J. **Calculus**. 7th ed. Cengage Learning, Cambridge, 2012.
- Veerasha, P.; Prakasha, D. G.; Kumar, D. An eficiente technique for nonlinear time-fractional Klein-Gordon equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 364, p. 124637, 2020.