II Congresso Aeroespacial Brasileiro
De 16 a 19 de setembro

CONTROLE DO MOVIMENTO DE UM SISTEMA TETHER ESPACIAL

Maria Cecília Zanardi[a]; Paola da Rosa Prado[a] Leandro Baroni[a]
[a] Engenharia Aeroespacial, Universidade Federal do ABC - UFABC, São Bernardo do Campo, SP, Brasil.

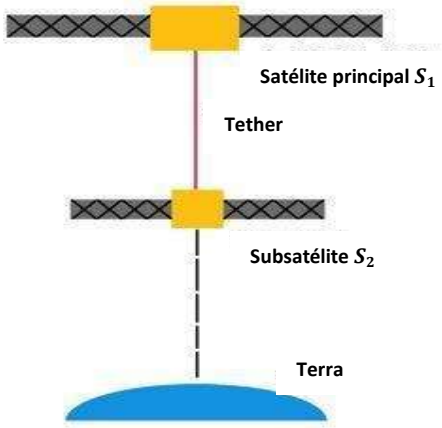
Resumo: *O presente trabalho propõe o estudo de um sistema tether espacial composto por dois satélites de modo a elaborar um sistema de controle que limite o movimento do satélite secundário ao plano orbital do satélite principal. Para efetuar esse controle é utilizado o método LQR, um controlador ótimo por realimentação de estados que prevê a linearização das equações do movimento para calcular o ganho de realimentação, através da resolução da equação de Ricatti. Os resultados apontam um controle efetivo, tendo sido necessário a inclusão de um torque auxiliar, sendo o movimento do satélite secundário restrito apenas ao estiramento do cabo que une os dois satélites*

Palavras-chave: *Sistema Tether Espacial, Controle, Método LQR*

1. INTRODUÇÃO

Um Sistema de Satélites Tether (Space Tether System - STS) trata de dois, ou mais, corpos rígidos conectados por um, ou mais, cabos longos, aqui denominados *tethers.* No presente trabalho será abordado o caso de um STS composto por dois satélites (Livio,2017), um principal S_1, de massa m_1, orbitando a Terra em uma trajetória circular de raio R, um *tether*, de comprimento l e massa m_t, que conecta um satélite secundário S_2, de massa m_2, ao a satélite principal S_1, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Esquema de um STS composto por dois satélites (Greene e Denney, 1991)



Para análise do movimento do satélite S_2 ao redor de S_1, é utilizado um sistema de referência F_0 com origem O no centro de massa (CM) do satélite principal S_1, eixo X_0 tem sentido de sua velocidade orbital, eixo Y_0 sentido ao CM da Terra e o eixo Z_0 é normal ao plano orbital de S_1 (Livio, 2017). A posição do satélite secundário S_2, em relação ao principal S_1, se dá por meio da obtenção de suas coordenadas esféricas (α, β, l); sendo α o ângulo formado entre o eixo Y_0 e a projeção da posição de S_2 no plano da órbita circular de S_1, e β o ângulo fora do plano formado por essa mesma projeção e o comprimento l do tether. Como esquematizado na Figura 2.

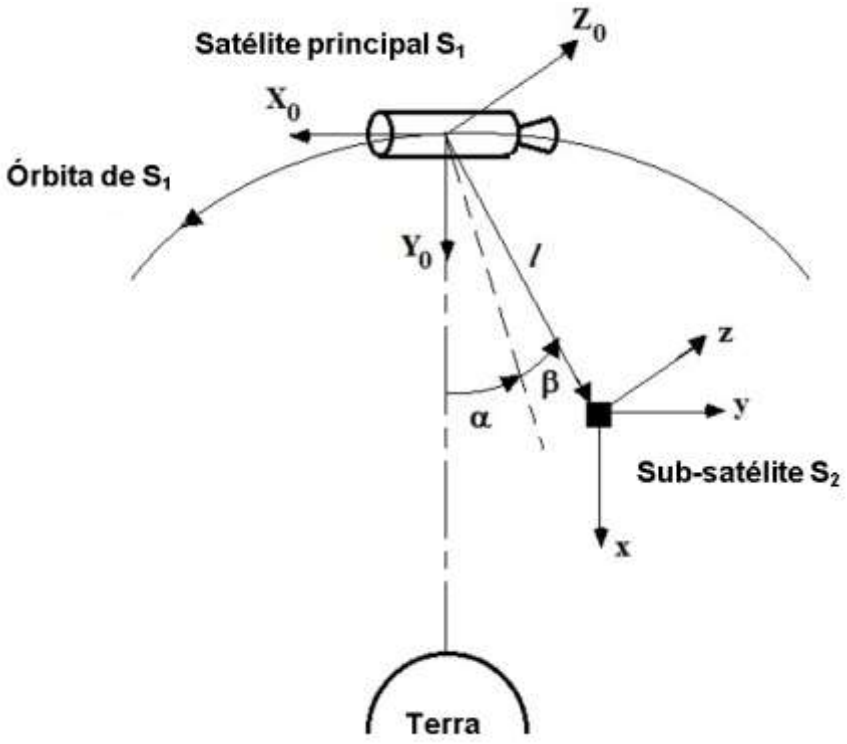
O presente trabalho propõe o estudo de um sistema *tether* espacial composto pelos satélites S_1 e S_2, de

M. C. Zanardi , Email: mceciliazanardi@gmail.com

modo a elaborar um sistema de controle que limite o movimento do satélite secundário S_2 ao plano orbital OX_0Y_0 do satélite principal S_1.

Para controlar o movimento no plano e fora do plano do satélite secundário ao redor do satélite principal será utilizado o método Regulador Linear Quadrático - **LQR**, uma técnica de controle ótimo por realimentação de estados que prevê a linearização das equações do movimento para calcular o ganho de alimentação, através da resolução da equação de Ricatti. Esse método deve ser aplicado para limitar o movimento do satélite secundário ao plano orbital do satélite principal e assim restringir o movimento apenas ao estiramento do cabo que une os dois satélites.

Figura 2: Sistema de coordenadas esféricas do STS. (Greene e Denney, 1991)



2. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

De acordo com Greene e Denney (1991), as equações do movimento translacional do subsatélite S_2 em torno do satélite principal S_1 são dadas por:

$$\frac{d^2 l}{d\,t^2} = M_{21} l \left(\frac{d\,\beta}{d\,t}\right)^2 + M_{21} l \left(\frac{d\,\alpha}{d\,t} + \frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 cos^2(\beta) + M_{21} \left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 l (3cos^2(\alpha)cos^2(\beta) - 1) - \frac{T}{m_2} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\,\alpha}{d\,t^2} = -2\frac{M_{23}}{l}\frac{d\,l}{d\,t}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,t} + \frac{d\,u}{d\,t}\right) - 2\frac{d\,\beta}{d\,t}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,t} + \frac{d\,u}{d\,t}\right) tan(\beta) - 3\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 sen(\alpha)cos(\alpha) \quad (2)$$

$$\frac{d^2\beta}{d\,t^2} = -2\frac{M_{23}}{l}\frac{d\,l}{d\,t}\left(\frac{d\,\beta}{d\,t}\right) - \left(\frac{d\,\alpha}{d\,t} + \frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 sen(\beta)cos(\beta) - 3\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 cos^2(\alpha)sen(\beta)cos(\beta) \quad (3)$$

Sendo: T – a tensão no *tether*, u - argumento de latitude, associado ao satélite principal, μ – parâmetro gravitacional da Terra, R – o raio da órbita de S_1 em torno da Terra considerado como 6878 km (Yong et al., 2009), as razões de massa utilizadas e a variação do argumento de latitude no tempo são dadas por:

$$M_{21} = \frac{m_2+\frac{m_t}{2}}{m_2+m_t}, \qquad M_{23} = \frac{m_2+\frac{m_t}{2}}{m_2+\frac{m_t}{3}} \quad , \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \tag{4}$$

Yong et al.(2009) introduziram uma lei para o comprimento do *tether* (l) independente das outras variáveis de estado ($\alpha, \beta, \frac{d\,\alpha}{d\,t}, \frac{d\,\beta}{d\,t}$), sendo o comprimento do *tether* l_{final} = 45 km, $l_{inicial}$ = 50 km e c é uma constante dada com valor 0,005:

$$l = l_{final} + \left(l_{inicial} - l_{final}\right)e^{-ct} \tag{5}$$

Deste modo, as equações (2), (3) e (5) são utilizadas para descrever o movimento do satélite secundário ao redor do principal, sendo que as equações (2) e (3) devem ser linearizadas para a aplicação do método LQR.

.

3. CONTROLE REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO (LQR)

Dado um sistema linear descrito por:

$$\frac{d\,X}{d\,t} = A\,X(t) + B\,u(t) \tag{6}$$

O Regulador Linear Quadrático – LQR (Dorf e Bishop,2001) é um método de controle ótimo que tem como objetivo encontrar uma lei de controle $u\,(t) = -K\,X(t)$ que minimize o índice quadrático J*, dado por:

$$J^* = \int_0^\infty \left(X^T Q\,X + u^T R\,u\right) dt \tag{7}$$

Onde *Q* é uma matriz real simétrica e semi-definida positiva (que representa a influência dos estados); e *R* deve ser constante e positiva (que representa a influência do controle). Nessa aplicação as matrizes *Q* e *R* foram consideradas matrizes identidade de ordem 4 e 2.

Dorf e Bishop (2001) propõem uma solução analítica para obter o ganho *K* da lei de controle:

$$K = R^{-1}B^T P \tag{8}$$

Onde *P* é solução positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$A^T P + P\,A - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{9}$$

De forma que a lei de controle é dada por:

$$u\,(t) = -R^{-1}B^T P\,x\,(t) \tag{10}$$

Para um sistema linear como o descrito por (6) tanto as matrizes *A* e *B* quanto o ganho *K* são constantes, calculadas apenas uma vez no início do projeto de controle e são utilizadas para cada instante de tempo ao longo da aplicação do controle.

A fim de aplicar o controlador Regulador Linear Quadrático - LQR ao movimento do STS, deve-se obter uma aproximação das equações de estado em torno do ponto de interesse, no caso

$$(\alpha, \beta, \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,t}) = (0, 0, 0, 0),$$

onde o satélite secundário se encontra parado em relação ao satélite principal, para isso fez-se uso da Série de MacLaurin, obtemos:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = F_1\ (\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}) = -2\frac{M_{23}}{l}(\frac{dl}{dt})(\frac{du}{dt}) - 3\,(\frac{du}{dt})^2\alpha - 2\frac{M_{23}}{l}(\frac{dl}{dt})(\frac{d\alpha}{dt}) \quad (11)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = F_2\ (\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}) = -4\,(\frac{du}{dt})^2\beta - 2\frac{M_{23}}{l}(\frac{dl}{dt})(\frac{d\beta}{dt}) \quad (12)$$

As equações do movimento, segundo Greene e Denney (1991), linearizadas em torno do nosso ponto de interesse constituem um sistema não linear uma vez que a matriz dos coeficientes *A* é dependente da variável de controle $\frac{dl}{l\,dt}$. Por esse motivo o sistema de controle proposto recalcula o ganho *K* e as matrizes *A* e *B* em função de $\frac{dl}{l\,dt}$ para cada instante de tempo, ou seja não é constante.

Uma consideração importante é que a equação linearizada de $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ não possui um termo independente do vetor de estado, dessa forma não é possível controlá-lo apenas com a utilização do método LQR. Sendo assim, para controlar o Sistema Tether Espacial optou-se pela aplicação de um torque externo (T_q) no satélite principal de forma que o ângulo fora do plano (β) tenda a zero. Esse torque é, portanto, nossa segunda variável de controle. Para realizar o controle do sistema, a razão ($\frac{T_q}{J}$) é acrescida à equação linearizada de $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ em cada instante, onde *J* é o momento de inércia do subsatélite em relação ao eixo X_0 do sistema de coordenadas com origem no satélite principal:

$$J = \frac{m_T\,l^2}{3} + \frac{m_{2(}\,larg^2 + comp^2)}{12} \quad (13)$$

sendo as dimensões, em metros, do satélite secundário descritas por Yong et al. (2009) como:

alt = 0.5; comp = 2; larg = 0.37037.

Então o vetor de controle (*u(t)*) neste caso é:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \frac{dl}{l\,dt} \\ T_q \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema dinâmico controlado é representado na forma matricial através de:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3(\frac{du}{dt})^2 & 0 & -2\,\frac{M_{23}}{l}(\frac{dl}{dt}) & 0 \\ 0 & -4(\frac{du}{dt})^2 & 0 & -2\,\frac{M_{23}}{l}(\frac{dl}{dt}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2\,M_{23}(\frac{du}{dt}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{l}\left(\frac{dl}{dt}\right) \\ T_q \end{bmatrix} \quad (14)$$

4. RESULTADOS

O controlador LQR foi implementado com o auxilio do software MATLAB, com as seguintes condições iniciais:

$$\left[\alpha;\ \beta;\ \frac{d\alpha}{dt};\ \frac{d\beta}{dt}\right] = [0°;\ 10°;\ 0{,}13\ °/s;\ 0\ °/s\ ]$$

A Figuras 3, 4 e 5 mostram o comportamento do torque T_q e controle $\frac{d\,l}{l\,dt}$ aplicados e das variáveis de estado, após aplicação do método LQR junto ao torque, respectivamente. Esses resultados permitem concluir que o movimento do STS se estabiliza após 200 segundos, na posição desejada $X_0 = (\alpha, \beta, \frac{d\,\alpha}{d\,t}, \frac{d\,\beta}{d\,t}) = (0, 0, 0, 0)$, restringindo o movimento do satélite secundário ao redor do satélite principal ao estiramento do *tether* no plano orbital do satélite principal.

A Figura 6 ilustra o movimento do Sistema Tether Espacial após a aplicação do controle LQR, evidenciando a posição inicial e final, bem como a trajetória do subsatélite e a variação do comprimento do *tether*. Podemos detalhar a análise do movimento, trazendo a visão lateral e superior, onde é explicitado os ângulos finais no plano e fora dele, ambos nulos no instante final, como apresentados nas Figuras 7 e 8.

Figura 3: Evolução temporal torque T_q e controle $\frac{d\,l}{l\,dt}$ aplicados ao STS, por 300 s.

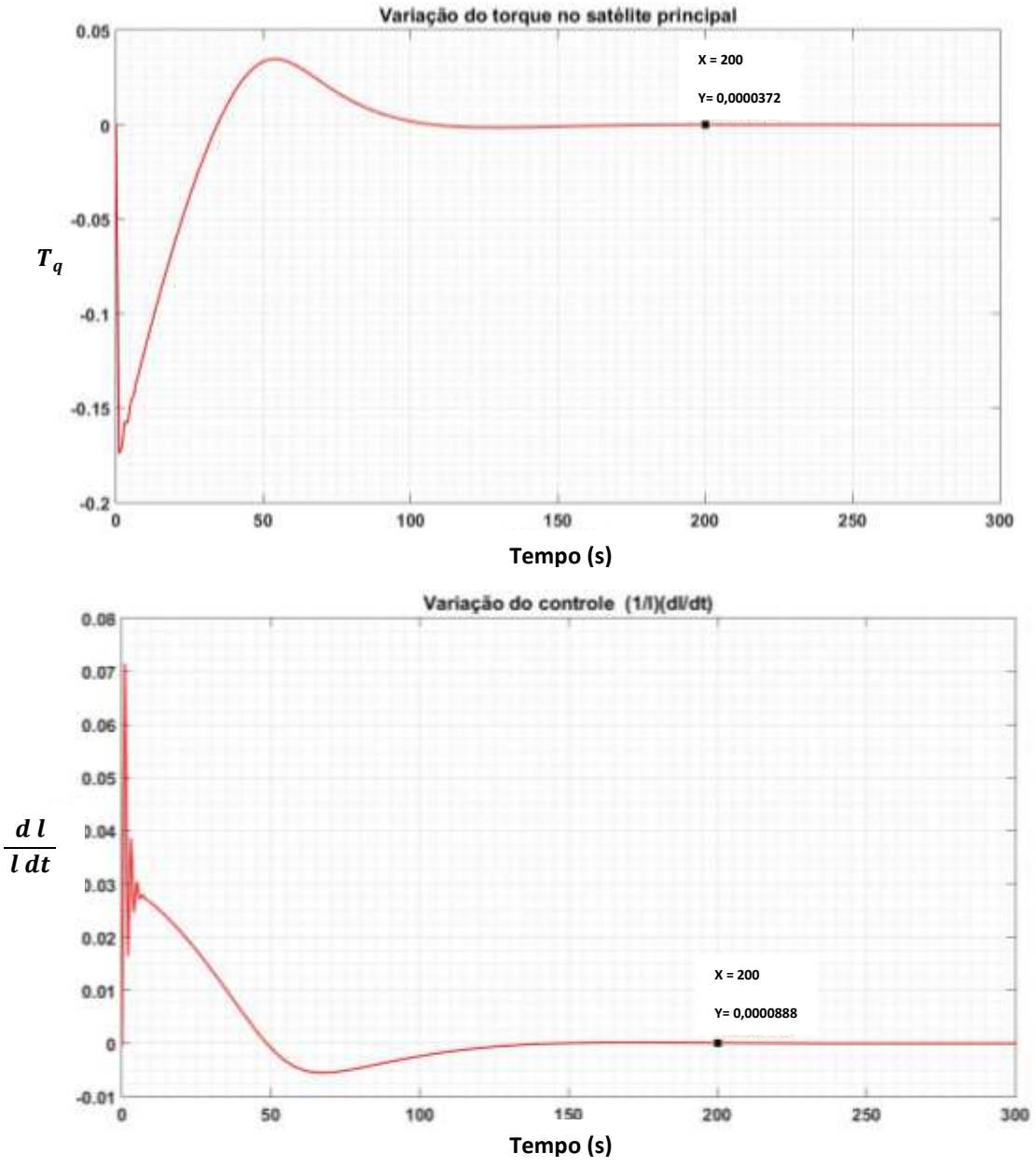
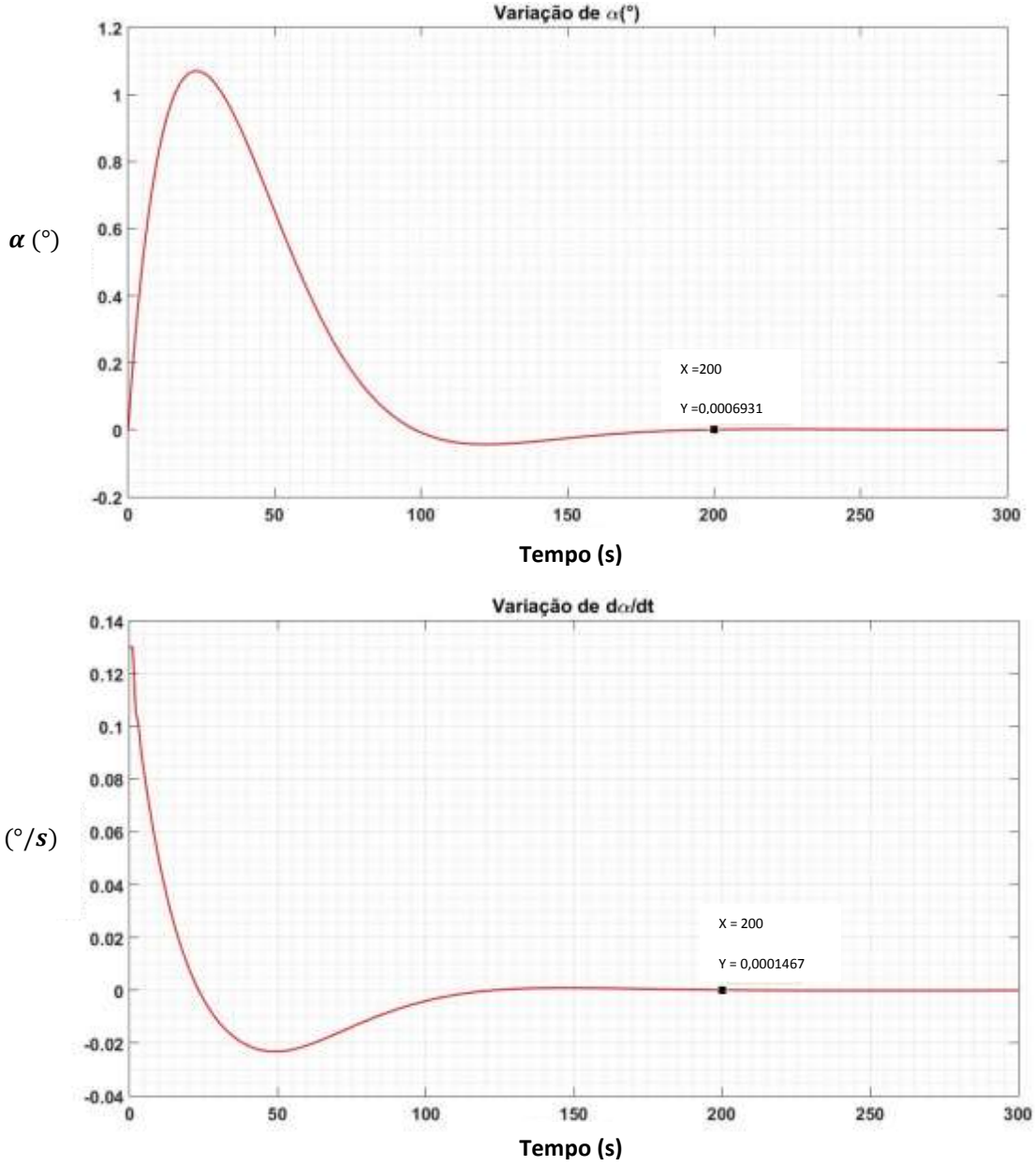


Figura 4: Variáveis de estado α e $\frac{d\alpha}{dt}$ após aplicação do Controle LQR e torque por 300 s.



A Figura 9 ilustra a variação do comprimento do *tether* por 300s, sendo que após o sistema de controle ter estabilizado, com os ângulos no plano e fora do plano estarem nulos, o *tether* ainda está se retraindo até alcançar os 45 km desejados em 1200s.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

Os resultados obtidos permitem concluir que o movimento do STS se estabiliza após 200 segundos, na posição desejada $X_0 = (\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}) = (0,0,0,0)$, restringindo o movimento do satélite secundário ao redor do satélite principal ao estiramento do *tether* no plano orbital do satélite principal. As Figura 6 e 7 evidenciam a posição final do Tether com ângulo no plano e fora do plano nulos ($\alpha = 0$, $\beta = 0$).

Essa configuração é interessante pois permite que os equipamentos e sensores do subsatélite permaneçam apontados para o objeto de estudo de interesse, por exemplo um sistema *tether* espacial orbitando Saturno

com objetivo de estudá-lo deve manter seus sensores sempre apontados para o planeta, caso sofra uma perturbação em seu movimento por qualquer que seja o motivo, deve-se implementar o sistema de controle que pode ser como o que será proposto nesse trabalho.

Assim os resultados apontam um controle efetivo, tendo sido necessário a inclusão de um torque auxiliar, ficando o movimento do satélite secundário restrito apenas ao estiramento do cabo que une os dois satélites.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Projeto universal n. 421672/2016-1).

Figura 5: Variáveis de estado β e $\frac{d\beta}{dt}$ após aplicação do Controle LQR e torque por 300 s.

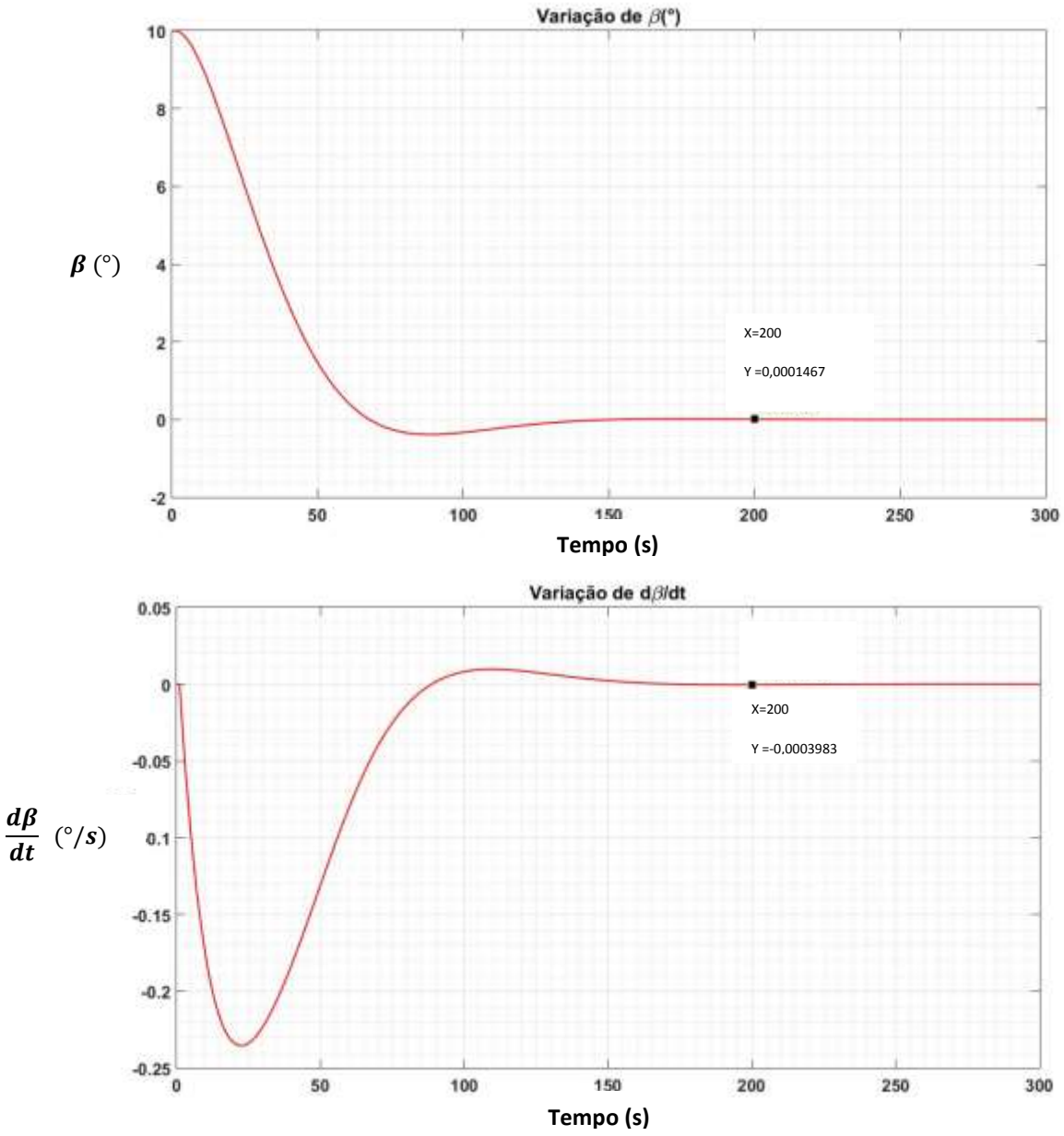


Figura 6: Representação em 3D do movimento do Sistema Tether Espacial controlado.

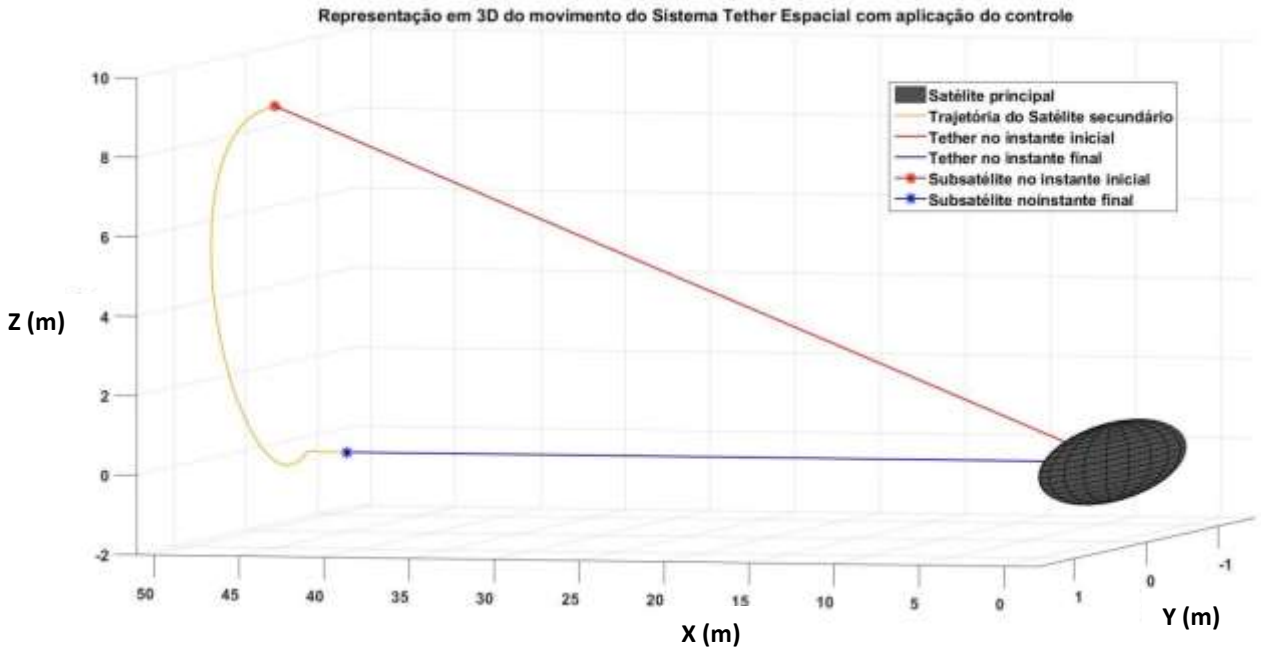


Figura 7: Visão lateral do movimento do Sistema Tether controlado,
em amarelo o *teth*er no instante final com ângulo $\beta = 0$.

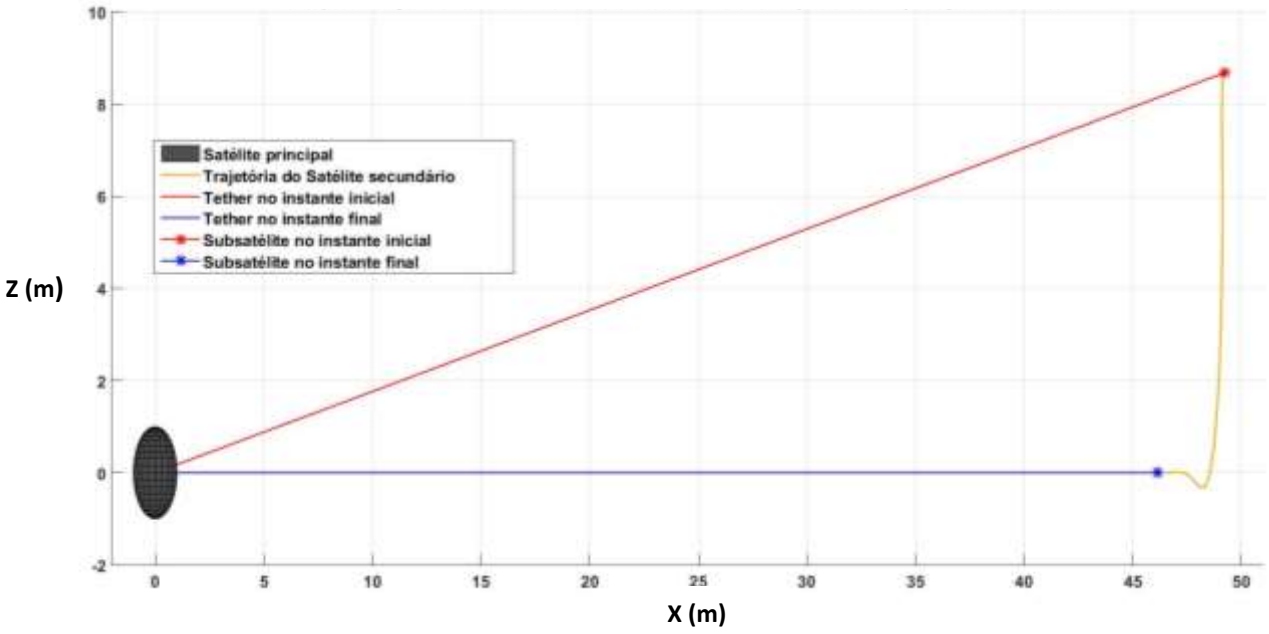


Figura 8: Visão superior do movimento do Sistema Tether controlado,
pode-se notar que a posição final do *tether* possui ângulo do plano orbital nulo $\alpha = 0$.

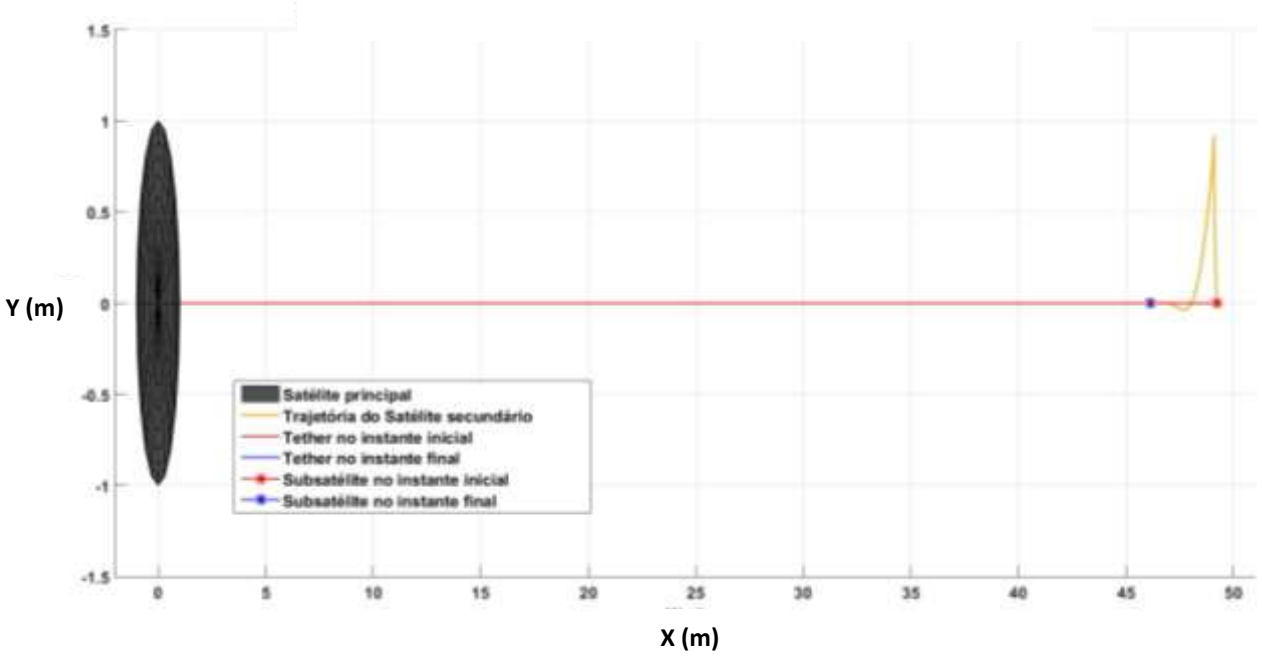
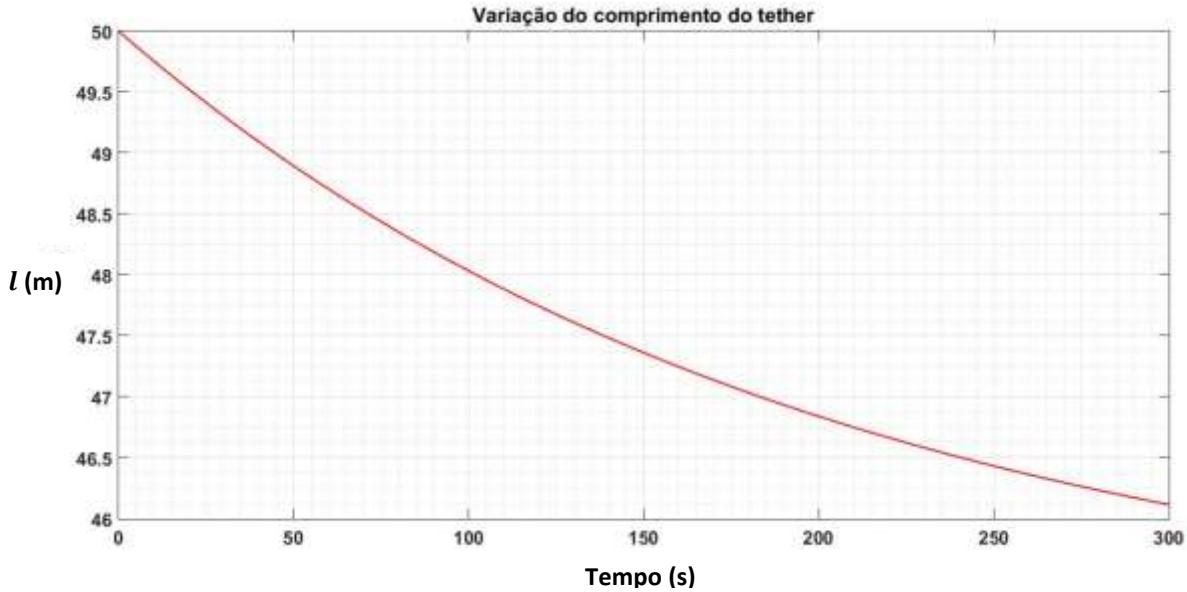


Figura 9: Variação do comprimento l do *tether* para 300s.



6. REFERÊNCIAS

Greene, M. E. , Denney, T. S. 1991. "On State Estimation for an Orbiting Single Tether System". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 27. No. 4, pp. 689 – 695.

Dorf, R. C, Bishop, R. H. 2001. Sistemas de Controle Moderno, Addison Wesley Longman, 8ª Edição, 2001.

Livio B 2017 *Propagação dinâmica do movimento do Sistema de satélites tether*.Trabalho de Graduação, Universidade Federal do ABC, São Bernardo do Campo, São Paulo, Brasil.

Yong H., Bin L., Wenfu X., Cheng L. 2009. "The Research of Real-Time Estimation Method on Tether Parameters for Tethered Satellite". *ICIA 2009: International Conference on Information and Automation*, Zhuhai/Macau, pp. 148-153.