II Congresso Aeroespacial Brasileiro
De 16 a 19 de setembro

CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPRIEDADES DE ÁREA DE VIGAS COMPOSTAS

Pedro Fellipe Martins Pires[a]**; Tiago dos Santos**[a]

[a] Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil

Resumo:
Este trabalho tem como principal objetivo o estudo das propriedades de área em vigas de seção transversal composta utilizando-se métodos numéricos. Em um pré-processamento, serão aplicadas técnicas de geração de malha customizada para materiais diferentes e exportação dos dados obtidos. Esses dados serão utilizados numa rotina de integração numérica por quadratura gaussiana em elementos triangulares para o cálculo da área ponderada, da posição do seu centroide e dos seus momentos e produtos de inércia. As rotinas serão implementadas de modo que tenham interfaces amigáveis ao usuário, para que possam ser utilizadas por terceiros. Esse projeto formará uma base para, em oportunidades futuras, implementar-se novas rotinas que poderão utilizar esses dados e gerar análises de tensões e deformações, ou até certas otimizações pertinentes à área de estruturas aeronáuticas, como a melhoria da relação peso/resistência mecânica ou da proporção de materiais de um dado perfil.

Palavras-chave: *Estruturas aeronáuticas, Vigas compostas, Propriedades de área ponderadas, Integração numérica, Quadratura gaussiana.*

1. INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações de engenharia, estruturas e materiais são submetidos a condições extremas de deformação e taxas de deformação, bem como a solicitações transientes. Estas condições de operação estão presentes em processos de fabricação, como em processos de usinagem (Neugebauer *et al.* (2011); Silva *et al.* (2016)), conformação (Geier *et al.* (2013)) e compactação (Mamalis *et al.* (2004); dos Santos *et al.* (2015)) mecânica a altas velocidades, em aplicações das indústrias aeronáutica, automotiva, militar, construção civil, na indústria de óleo e gás, naval, dentre muitas outras (Rodríguez-Martínez (2011); Rusinek e Jankowiak (2014)).

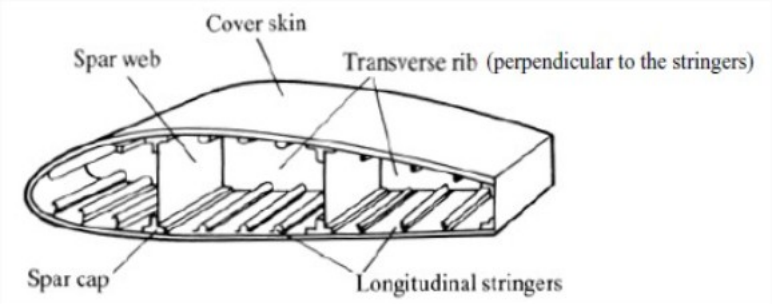


Figura 1: Ilustração da estrutura de uma asa. Fonte: Donaldson (2008).

Particularmente, a indústria aeronáutica (e aeroespacial) está em constante investigação em busca de novos materiais capazes de suportar condições extremas de velocidades (e variações de temperatura) ao mesmo tempo em que permitam a redução da massa das aeronaves (Arias *et al.* (2014)). O que leva a utilização de estruturas com geometrias complexas combinando diferentes tipos de materiais (estruturas compósitas). A descrição

Pedro Fellipe Martins Pires: pfmppedro@gmail.com

do movimento e comportamento de aeronaves flexíveis pode ser feita por meio de dinâmica de sistemas de multicorpos. Para o caso de estruturas esbeltas, modelos de vigas podem então ser utilizados (Han e Bauchau (2015)). Um aspecto chave para o desenvolvimento de modelos adequados, além de uma descrição dinâmica consistente, é a utilização de modelos capazes de representar a resposta mecânica dos materiais empregados (estruturas compósitas). Além disso, especificamente em modelos de vigas, é preciso calcular características associadas à geometria da estrutura, como área de seções transversais, centroides de área, momentos e produtos de inércia. Particularmente em estruturas aeroespaciais, geometrias complexas (Figura 1) e diferentes materiais são geralmente utilizados (Donaldson (2008); Megson (2007)). Essa complexidade geométrica, aliada à utilização de materiais compósitos, demanda a utilização/desenvolvimento de métodos computacionais para o cálculo (aproximado) de tais propriedades de área (Yassin e Nethercot (2007)).

2. Metodologia

Uma das propriedades de área a serem calculadas é o momento de inércia. Em um sistema de coordenadas yz o momento de inércia em relação ao eixo x pode ser expresso da seguinte forma:

$$I^*_{xx} = \iint_A \frac{E}{E_0} y^2 \, dA \tag{1}$$

Onde E é o módulo de elasticidade da área infinitesimal dA, z é a distância desse infinitesimal ao eixo y e E_0 é um módulo de elasticidade arbitrário tomado como referência e A é a região de integração. Essa integral (como outras) será resolvida numericamente, discretizando-se a região de integração (usando uma malha de elementos triangulares) e usando quadratura gaussiana (sobre elementos triangulares) para aproximar seu valor.

Para atingir o objetivo do presente trabalho, a seguinte metodologia será seguida. Será utilizado o programa de pré e pós-processamento GiD (https://www.gidhome.com/) para desenvolvimento da geometria, especificação dos materiais e geração de malha (Figura 2).

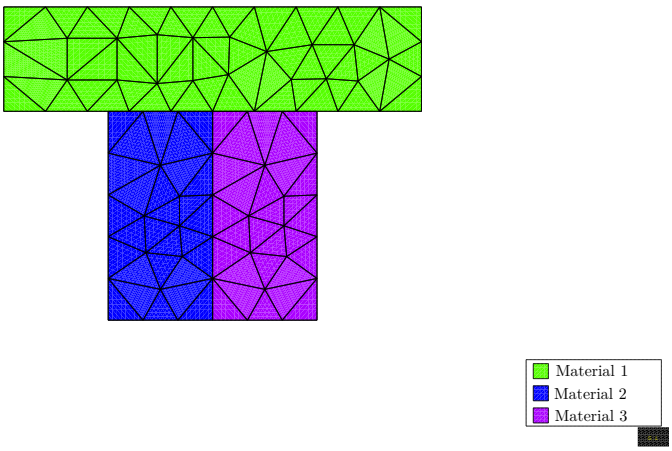


Figura 2: Exemplo de malha de um perfil com material composto gerada no GiD. Fonte: Autor.

O programa será customizado para que sejam exportados os dados e informações necessários a um arquivo de texto. Basicamente, as informações consistem em coordenadas dos nós, conectividade, propriedades elásticas dos materiais utilizados em cada elemento.

Em uma rotina computacional desenvolvida em MatLab, tendo como dados de entrada o arquivo exportado pelo GiD, será implementada um método de integração numérica utilizando quadratura de Gauss em elementos triangulares para o cálculo das propriedades de área de interesse.

2.1 Quadratura Gaussiana em Elementos Triangulares

Uma quadratura envolve a aproximação da integral de uma função por um somatório ponderado dessa mesma função aplicada em pontos específicos.

Para este estudo foi escolhido usar malhas de elementos triangulares. Malhas triangulares podem se ajustar mais facilmente a geometrias complicadas, podendo assim, reduzir o número de elementos necessários.

Segundo Fish e Belytschko (2007) podemos desenvolver uma quadratura em uma região triangular padrão T_{ST} usando um regra de quadratura cuja forma é mostrada na Equação 2.

$$\iint_{T_{st}} f(\xi,\, \eta)\, d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i f(\xi_i,\, \eta_i) \tag{2}$$

Onde $f(\xi, \eta)$ é a função a ser integrada no espaço das variáveis ξ e η; N_p é o número de pontos a serem usados; W_i é o peso associado ao i-ésimo ponto e (ξ_i, η_i) são as coordenadas desse ponto.

O triangulo-padrão (região $T_S T$) pode ser visto como a região limitada pelas equações $\xi = 0$, $\eta = 0$ e $\xi = 1 - \eta$, e é mostrada na Figura 3.

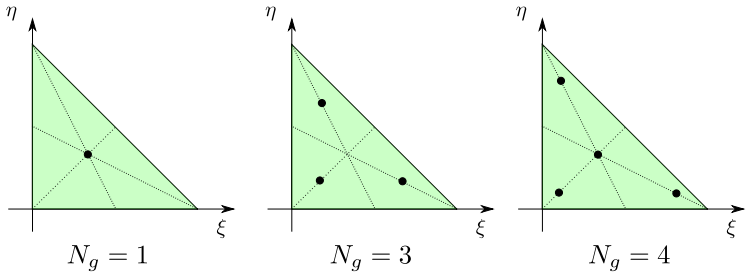


Figura 3: Ilustração dos pontos de integração para uma quadratura simétrica no triângulo-padrão para diferentes números de pontos N_p. Fonte: Autor.

Essa quadratura é desenvolvida de modo que polinômios de duas variáveis com um dado grau máximo seja integrados exatamente usando-se a soma ponderada do próprio polinômio aplicado em pontos específicos com pesos também específicos.

Esses pontos e pesos são obtidos impondo-se que o somatório seja exatamente igual a integral para um número finito de pontos, por exemplo:

Quadratura de Grau 1: Por definição essa quadratura tem de ser exata para $f(\xi,\, \eta) = 1,\, \xi,\, \eta$, assim:

$$f(\xi,\, \eta) = 1 \Longrightarrow \int_0^1 \int_0^{1-\eta} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \tag{3}$$

$$f(\xi,\, \eta) = \xi \Longrightarrow \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi\, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \Longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \xi_i \tag{4}$$

$$f(\xi,\, \eta) = \eta \Longrightarrow \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta\, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \Longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i \eta_i \tag{5}$$

Se fizermos N_p = 1, teremos:

$$\frac{1}{2} = \ W_1; \qquad \frac{1}{3} = \ \xi_1; \qquad \frac{1}{3} = \ \eta_1 \tag{6}$$

A Equação 6 mostra um conjunto de pontos e pesos que podem ser utilizados em uma quadratura de grau 1. vale salientar que esses pontos não são únicos para qualquer grau, visto que o sistema de equações gerado não possui solução única.

Quadratura de Grau 2: Para encontrar pontos para polinômios de grau 2 repetimos as equações para o conjunto $f(\xi,\,\eta) = 1,\,\xi,\,\eta,\,\xi\eta,\,\xi^2,\,\eta^2$:

$$f(\xi,\,\eta) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i; \qquad f(\xi,\,\eta) = \xi^2 \Longrightarrow \frac{1}{12} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i\xi_i^2 \tag{7}$$

$$f(\xi,\,\eta) = \xi \Longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i\xi_i; \qquad f(\xi,\,\eta) = \xi\eta \Longrightarrow \frac{1}{24} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i\xi_i\eta_i \tag{8}$$

$$f(\xi,\,\eta) = \eta \Longrightarrow \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i\eta_i; \qquad f(\xi,\,\eta) = \eta^2 \Longrightarrow \frac{1}{12} = \sum_{i=1}^{N_p} W_i\eta_i^2 \tag{9}$$

Se usarmos um único ponto teremos:

$$\frac{1}{2} = W_1; \qquad \frac{1}{6} = (\xi_1)^2 \tag{10}$$

$$\frac{1}{3} = \xi_1; \qquad \frac{1}{12} = \xi_1\eta_1 \tag{11}$$

$$\frac{1}{3} = \eta_1; \qquad \frac{1}{6} = (\eta_1)^2 \tag{12}$$

Que gera absurdos como $1/6 = (1/3)^2$ pelo fato de estarmos usando três incógnitas para resolver seis equações. Se usarmos dois pontos teremos seis incógnita e será obtida solução coerente, mas a quadratura resultante não será simétrica. Então escolhemos três pontos, que gerarão nove incógnitas. Como haverão mais incógnitas do que equações é garantido que as soluções encontradas não serão únicas. Duas das soluções são:

$$\iint_{T_{st}} f(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6},\,\frac{1}{6}\right),\,f\left(\frac{2}{3},\,\frac{1}{6}\right),f\left(\frac{1}{6},\,\frac{2}{3}\right)\right] \tag{13}$$

$$\iint_{T_{st}} f(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta = \frac{1}{6}\left[f\left(0,\,\frac{1}{2}\right),\,f\left(\frac{1}{2},\,0\right),f\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)\right] \tag{14}$$

Nesse estudo as funções a serem integradas são polinômios de primeiro e segundo grau, assim os conjuntos dados pelas Equações (6) e (14) são o bastante para este fim.

2.2 Quadratura em Triângulos Quaisquer

Para integrar uma função em um triângulo qualquer pertencente ao domínio real A basta que se desenvolva um mapeamento entre este domínio e o domínio do triângulo-padrão T_{ST} e que esse mapeamento seja de alguma forma incluído na fórmula da quadratura.

De acordo com (Fish e Belytschko, 2007) esse mapeamento é realizado baseado nas seguintes funções interpoladoras:

$$N_1(\xi,\,\eta) = 1 - \xi - \eta \tag{15}$$

$$N_2(\xi,\,\eta) = \xi \tag{16}$$

$$N_3(\xi,\,\eta) = \eta \tag{17}$$

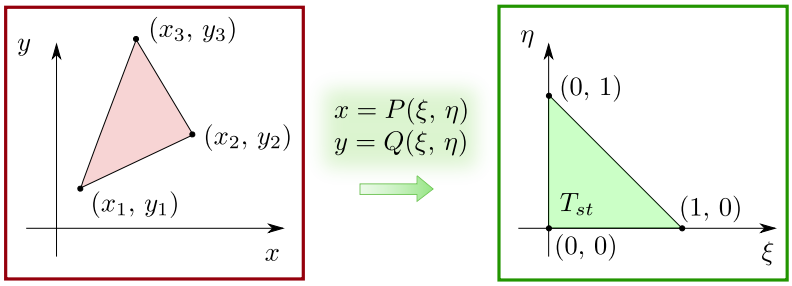


Figura 4: Mapeamento de um elemento triangular no plano xy ao triangulo-padrão no domínio $\xi\eta$. Fonte: Autor.

O mapeamento é dado pelas seguintes expressões

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i N_i(\xi,\ \eta) = P(\xi,\ \eta) \tag{18}$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} y_i N_i(\xi,\ \eta) = Q(\xi,\ \eta) \tag{19}$$

Assim, a regra de quadratura para um triângulo qualquer é dada por:

$$\iint_{T_{st}} f(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i f(\xi_i,\ \eta_i)\mathbf{J^e}(\xi_i,\ \eta_i) \tag{20}$$

Onde $\mathbf{J^e}$ é o jacobiano da transformação, dado por:

$$|\mathbf{J}^e(\xi,\ \eta)| = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\xi,\ \eta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2A_K \tag{21}$$

Onde A_K é a área do triangulo no domínio real, e pode ser calculado por:

$$A_K = \frac{1}{2}\ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \tag{22}$$

Finalmente, em suma, uma integral dupla sobre uma região triangular K no plano xy pode ser ser resolvida numericamente por quadratura gaussiana pela Equação 23:

$$\iint_{A_K} f(x,y)\, dxdy \approx 2A_K \sum_{i=1}^{N_p} W_i f\big(P(\xi,\ \eta),\ Q(\xi,\ \eta)\big) \tag{23}$$

Onde A_K é a área do elemento triangular original, N_p é o número de pontos a serem usados, $P(\xi,\ \eta)$ e $Q(\xi,\ \eta)$ são as funções de mapeamento para x e y; W_i, ξ_i e η_i são o peso, e as coordenadas de cada ponto de integração.

2.3 Propriedades de Área

As equações desenvolvidas nesta seção são baseadas no capítulo 9 do livro *Analysis of Aircraft Structures* (Donaldson, 2008).

2.3.1 Área Ponderada por Módulo de elasticidade

Consideremos uma viga composta com seção transversal constante constituída de n materiais diferentes cujos módulos de elasticidade são constantes e dados como E_1, E_2, ..., E_n. Por ser uma viga composta, não podemos usar a área total da seção transversal para fins de cálculo de tensões e deformações, visto que seu módulo de elasticidade não é constante em toda sua extensão. Mas essa seção é composta por áreas menores de módulo constante E_i $(i = 1, 2, ..., n)$, então podemos procurar uma área equivalente A^* cujo módulo de elasticidade E_0 seja constante e que leve em consideração a contribuição de cada área menor A_i associada com seu próprio módulo E_i. Equacionando:

$$A^* E_0 = A_1 E_1 + A_2 E_2 + ... + A_n E_n \tag{24}$$

Assim:

$$A^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{E_0} A_i \tag{25}$$

Se $n \to \infty$, vemos que cada área tende a um infinitesimal dA de módulo E, assim temos a seguinte integral para um caso contínuo:

$$A^* = \iint_A \frac{E}{E_0}\, dA \tag{26}$$

E_0 é um valor arbitrário de referência. Visto que nos interessa apenas a área ponderada A^* e nas equações de tensão e deformação são introduzidos termos com a seguinte forma:

$$(\cdot\cdot) = \iint_A E\,(\cdot)\, dA = \iint_A E\frac{E_0}{E_0}(\cdot) dA = E_0 \iint_A (\cdot)\frac{E}{E_0} dA \tag{27}$$

Onde E_0 será compensado.

2.3.2 Momentos e Produto de Inércia

Os momentos de inércia ponderados são definidos pelas equações:

$$I_{yy} = \iint_A \frac{E}{E_0} x^2\, dA \tag{28}$$

$$I_{xx} = \iint_A \frac{E}{E_0} y^2\, dA \tag{29}$$

e o produto de inércia ponderado pela equação:

$$I_{xy} = \iint_A \frac{E}{E_0} xy\, dA \tag{30}$$

Onde x e y são as coordenadas da área infinitesimal dA em relação ao centroide ponderado. Utilizando um sistema de coordenadas arbitrário como referência, podemos equacionar o momento de inércia em relação ao eixo x como:

$$I_{xx} = \iint_A \frac{E}{E_0}(y_0 - \bar{y}^*)^2 \, dA \tag{31}$$

Onde y_0 é a coordenada vertical em relação ao eixo arbitrário e $\bar{y}^*$ é a coordenada vertical do centroide ponderado.

Se, como antes, a seção for constituída de um número finito de áreas menores A_i com módulos de elasticidade E_i, a integral na seção completa pode ser reduzida ao somatório de integrais sobre cada área menor:

$$I_{xx} = \sum_{i=0}^{n} \iint_{A_i} \frac{E}{E_0} y^2 \, dA_i \tag{32}$$

Onde n é o número de sub áreas em que a seção é dividida. E em seguida, se as sub áreas forem triangulares podemos utilizar quadratura gaussiana pra aproximar a integral sobre cada elemento:

$$I_{xx} = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} W_j \left(Q(\xi,\, \eta) - \bar{y}^*\right)^2 \tag{33}$$

Substituindo as funções de mapeamento e as funções nodais das Equações (15) a (19) chega-se finalmente em:

$$I_{xx} = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} W_j \left(y_{1,\,i} + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \xi_j + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \eta_j - \bar{y}^*\right)^2 \tag{34}$$

Esta é a equação para o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo x. Para o momento em relação a y a fórmula é semelhante, mas integrando-se a variável x ao quadrado e para o produto de inércia integramos o produto xy:

$$I_{yy} = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} W_j \left(x_{1,\,i} + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \xi_j + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \eta_j - \bar{x}^*\right)^2 \tag{35}$$

$$\begin{aligned} I_{xy} = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} & W_j \left(x_{1,\,i} + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \xi_j + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \eta_j - \bar{x}^*\right) \times \\ & \left(y_{1,\,i} + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \xi_j + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \eta_j - \bar{y}^*\right) \end{aligned} \tag{36}$$

2.3.3 Coordenadas do Centroide

As coordenadas do centroide de área ponderado são dadas por

$$\bar{x}^* = \frac{1}{A^*} \iint_{A^*} x \, dA \tag{37}$$

$$\bar{y}^* = \frac{1}{A^*} \iint_{A^*} y \, dA \tag{38}$$

Assumindo uma seção compostas por triângulos e aplicando quadratura resulta:

$$\bar{x}^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} W_j \left(x_{1,\,i} + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \xi_j + (x_{2,\,i} - x_{1,\,i})\, \eta_j \right) \tag{39}$$

$$\bar{y}^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{E_0} 2A_i \sum_{j=1}^{N_p} W_j \left(y_{1,\,i} + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \xi_j + (y_{2,\,i} - y_{1,\,i})\, \eta_j \right) \tag{40}$$

2.4 Implementação

Para implementar a solução por quadratura, fez-se necessário o uso do programa GiD (https://www.gidhome.com/) juntamente com o módulo MAT-Fem (www.cimne.com/mat-fem/) para desenvolvimento da geometria, especificação dos materiais e geração de malha. Usando o MAT-Fem é possível exportar a malha criada em um formato fácil de ser utilizado em uma rotina MATLAB. Essa malha é exportada de modo que é possível saber as coordenadas dos nós e o material associados a cada elemento.

Foi escrita em MATLAB uma rotina que calcula a área ponderada, a posição do centroide ponderado e os momentos e produtos de inércia ponderados usando as Equações (25), (40) e (35) e usando uma segunda rotina auxiliar que fornece os pontos e pesos para a quadratura gaussiana em elementos triangulares. Como entrada é passado o arquivo exportado pelo GiD usando o MAT-Fem, que contém todas as informações necessárias, como as coordenadas dos vértices de cada elemento e as propriedades do material que foi associado a ele.

Em um primeiro estágio essa rotina percorre cada elemento da malha calculando a área ponderada de cada um usando quadratura de grau 1, já que a área é simplesmente dada pela integração de $1\ dA$, ou seja, um polinômio de grau zero. As áreas de cada elemento são então armazenadas em um vetor para serem utilizada posteriormente.

A área ponderada da seção total é então calculada pela Equação (25) simplesmente somando as áreas de todos os elementos.

A posição do centroide ponderado é calculado pela Equação (40) usando, também, quadratura de grau 1 (pois é integrado um polinômio de primeiro grau) e as áreas ponderadas calculadas anteriormente.

Em seguida os momentos e o produto de inércia são calculado pelas Equações (35) e (36) (via uma quadratura de grau 2) utilizando as posições relativas ao centroide encontrado anteriormente e as áreas ponderadas já calculadas.

Atualmente o programa não fornece uma visualização das variáveis calculadas, apenas seu valores numéricos. Há planos de ser desenvolvida uma interface para o usuário, facilitando a utilização do programa por terceiros. Em paralelo ao desenvolvimento do programa será criado um manual de utilização.

3. Resultados

Tendo-se implementando todas as rotinas, foram realizados testes com alguns perfis. Abaixo dispõe-se dois estudos de caso: um para um perfil circular homogêneo e outro para um perfil composto não-homogêneo que foi retirado de um exemplo do capítulo 9 do livro *Analysis of Aircraft Structures*, Donaldson (2008).

3.1 Estudo de Caso 1

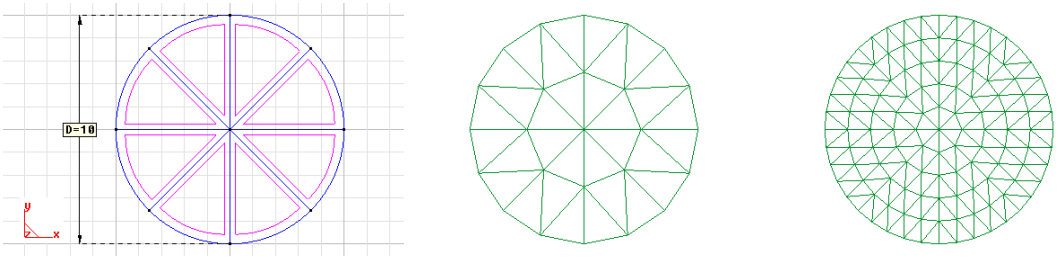
Primeiramente foi analisado um perfil circular de aço com 5 unidades de comprimento de raio. A Figura 5a mostra o perfil gerado no GiD.

Tendo-se em vista que as malhas geradas automaticamente pelo GiD tendem a ser relativamente assimétricas,para este caso escolheu-se construir uma malha estruturada, de modo que a simetria do perfil fosse incorporada na malha e possíveis erros numéricos associados à assimetria fossem reduzidos.

Vale observar que o GiD não especifica suas unidades de comprimento, deixando a cargo do usuário a interpretação das medidas. Neste estudo as unidades de comprimento são designadas por u.c..

O perfil foi construído com um círculo de raio 5 u.c. dividido em oito setores circulares idênticos, para se assegurar uma boa simetria. Esses setores serviram de base para serem construídas as malhas estruturadas.

Para se criar uma malha estruturada pelo GiD é necessário designar uma linha, superfície ou volume e informar o número de células em que se deseja dividi-lo. A Figura 5b ilustra uma malha estruturada que foi construída selecionando-se o arco circular de cada um dos setores e os dividindo em duas células. O número total de células nessa malha é 32.



(a) Perfil construido no GiD. (b) Malha estruturada com 32 elementos. (c) Malha estruturada com 200 elementos

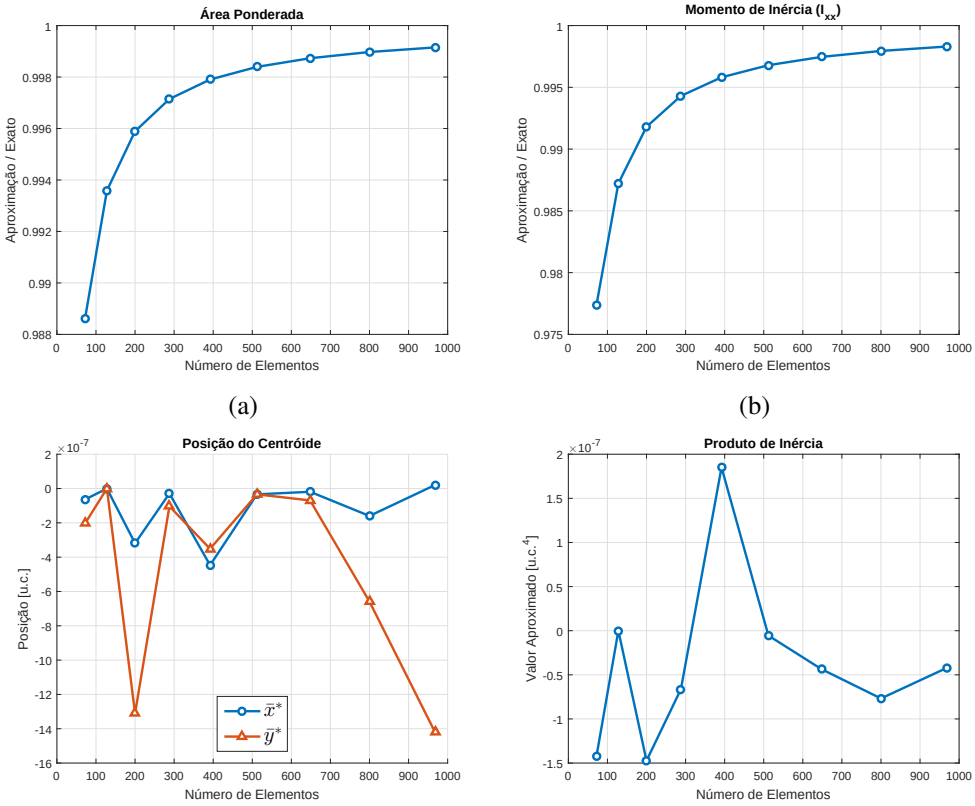
Figura 5: Perfil circular usado no caso 1. Fonte: Autor

Foram geradas 9 malhas com números de elementos entre 72 e 968. Pode-se notar, pelas Figuras 5b e 5c, que a simetria foi preservada à medida que o número de elementos aumentou.

A Figura 6 mostra cada propriedade calculada normalizada pelo valor exato quando possível (as coordenadas do centroide e o produto de inércia exatos são zero, impossibilitando a normalização).

Nas Figuras 6a e 6b é possível notar claramente que há convergência, e que para uma malha com 100 a 200 elementos já é garantida um erro menor que 1%.

Em contrapartida, as Figuras 6c e 6d mostram instabilidade, não sendo possível garantir a convergência. Mas pode-se ver que ambas as variáveis possuem desvios de ordem muito menor ($\approx 10^{-6}$ u.c.) que as dimensões do perfil ($\approx 10^{1}$ u.c.), assim o método ainda pode ser considerado válido para o produto de inércia e a posição do centróide.



(a) (b)

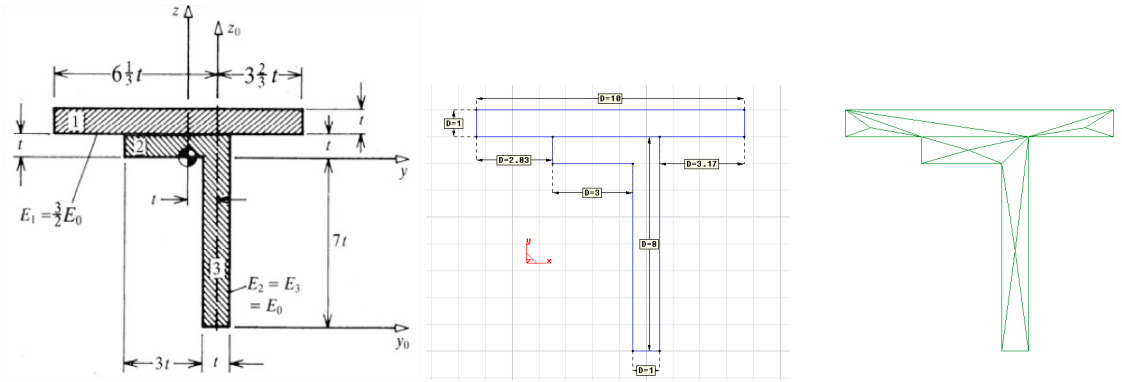
(c) Gráfico não normalizado. (d) Gráfico não normalizado.

Figura 6: Testes de convergência de malha para o caso 1. Fonte: Autor

3.2 Estudo de Caso 2

Para este caso foi usado como base o exemplo 9.3 do capítulo 9 do livro *Analysis of Aircraft Structures*, Donaldson (2008) (Figura 7a). O exemplo apresenta um perfil composto por uma placa plana com módulo de elasticidade $^3/_2E_0$ sobre uma cantoneira de módulo E_0, ambas de espessura t. O perfil gerado no GiD é mostrado na Figura 7b.

O autor do livro fornece os resultados analíticos para todas as propriedades de interesse em função da espessura t dos componentes do perfil. O perfil para a geração da malha foi desenhado utilizando $t = 1$ u.c..



(a) Exemplo como visto no livro. Fonte: (Donaldson, 2008)

(b) Perfil construido. Fonte: Autor.

(c) Exemplo de malha não-estruturada com 16 elementos. Fonte: Autor.

Figura 7: Perfil utilizado no caso 2.

Foram geradas 7 malhas não-estruturadas com números de elementos entre 16 e 527. A Figura 8 mostra a relação entre as propriedades calculadas e o número de elementos da malha.

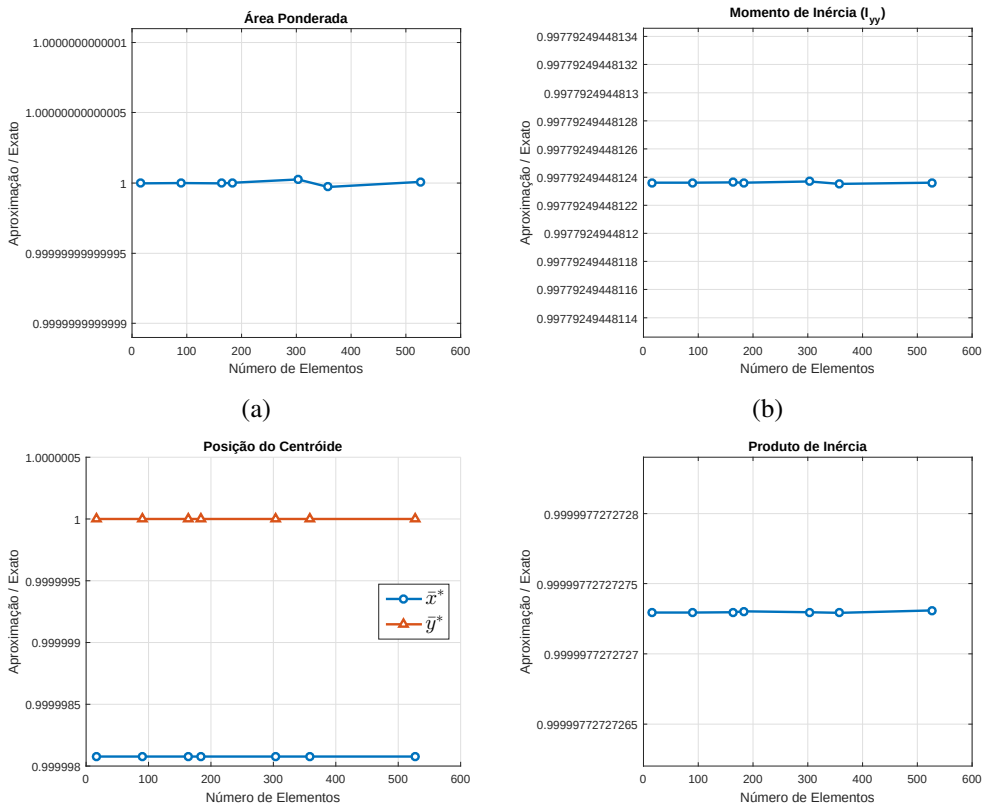


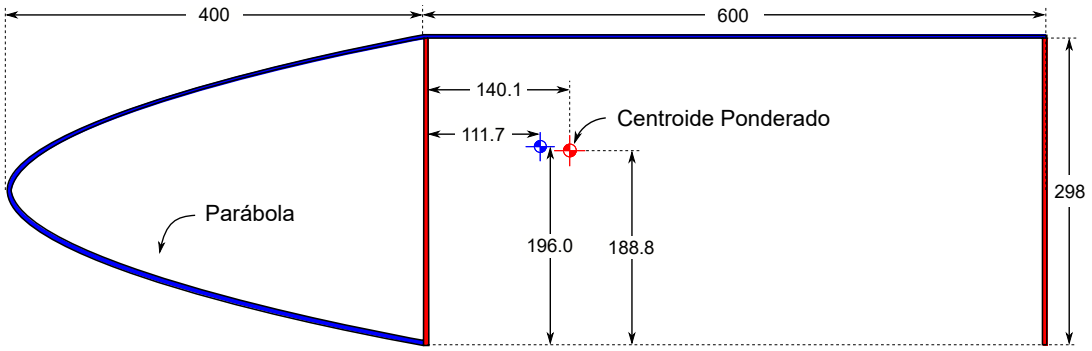
Figura 8: Testes de convergência para o caso 2. Fonte: Autor.

A partir dos gráficos mostrados na Figura 8 pode-se notar que para este exemplo o método se mostra bastante preciso, onde os desvios são aproximadamente da ordem 10^{-13} u.c. para todas as propriedades. Nota-se também que não há ganho de acurácia com aumento do número de elementos, cada propriedade possui um determinado patamar de acurácia, mas a menos acurada (momento de inércia em relação a y) apresenta erro menor que 1%.

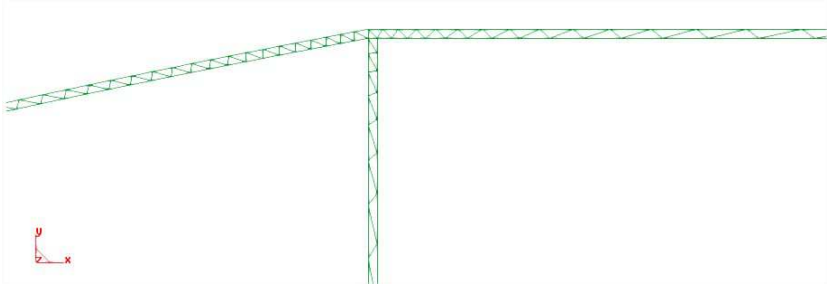
A Figura 7c ilustra que uma malha não estruturada com poucos elementos tende a gerar elementos bastante assimétricos e com geometrias destorcidas em superfícies extensas. Os resultados mostrados na Figura 8, no entanto, demonstram que em geometrias retangulares o método continua bastante acurado mesmo nessas condições de malha. Ao aumentar-se o número de elementos as malhas não estruturadas geradas pelo GiD apresentam características melhores. Em casos gerais, é aconselhado manter-se uma malha com boa distribuição de elementos e que estes tenham aspectos relativamente uniformes.

3.3 Estudo de Caso 3

Neste caso foi desenhada uma seção da caixa estrutural de uma asa, com revestimento de alumínio ($E = 70$ GPa, em azul) e longarinas de titânio ($E = 110$ GPa, em vermelho). Foi gerada uma única malha com 402 elementos. A Tabela 1 mostra os valores obtidos para os momentos e o produto de inércia e para a área ponderada. A Figura 9 mostra as dimensões do perfil bem como as posições do centroide com e sem ponderação. Devido à grande simplificação, este caso é apenas um exemplo ilustrativo de aplicação em uma estrutura aeronáutica.



(a) Perfil desenhado e ilustração da posição do centroide ponderado. Em vermelho: longarinas de titânio; em azul: revestimento de alumínio. Ponto Azul: centroide não ponderado. Espessuras de 2 mm. Unidades em mm.



(b) Detalhe da malha gerada.

Figura 9: Ilustração de aplicação em estrutura aeronáutica simplificada. Fonte: Autor.

	I^*_{xx} [mm^4]	I^*_{yy} [mm^4]	I^*_{xy} [mm^4]	A^* [mm^2]
Somente Alumínio	4.29×10^3	38.95×10^3	3.29×10^3	38.33
Longarinas de Titânio	4.93×10^3	47.10×10^3	2.75×10^3	45.14
Diferença Relativa	12,98 %	17,30 %	16,41 %	15,09 %

Tabela 1: Propriedades de área ponderadas para uma seção estrutural simplificada de uma asa. Valores ponderados pelo módulo de elasticidade do alumínio.

4. Conclusões

De acordo com o que foi analisado, utilizar a quadratura gaussiana para calcular as propriedades de área de um perfil é bastante válida e torna-se conveniente diante de perfis de geometria complexa e/ou composição não homogênea.

Destaca-se que o método se mostra muito eficiente quando a geometria do perfil é bem aproximada por triângulos. Como mostrado no caso 2, pode-se ver que há pouco desvio do valor exato para um perfil composto por retângulos para qualquer número de elementos na malha. E para um perfil arredondado, as propriedades que dependem unicamente da forma geométrica do perfil (área e momento de inércia) possuem convergência bem definida.

A não convergência do produto de inércia e da posição do centroide no caso 1 mostra algo inesperado, visto que a construção de malhas simétricas foi usada para aliviar problemas que envolvessem o aspecto assimétrico das malhas não-estruturadas geradas automaticamente pelo GiD. Como os desvios são da ordem de 10^{-6}, há uma hipótese de que o erro esteja associado à precisão do GiD em representar a malha, visto que para a versão utilizada as coordenadas são dadas com até 5 casas decimais.

4.1 Perspectivas Futuras

Pretende-se ao final do desenvolvimento dispor de uma ferramenta numérica para o cálculo numérico de propriedades de área de seções complexas compostas por diferentes materiais. Essa ferramenta poderá ser integrada a programas de análise estrutural utilizando elementos finitos de viga, fornecendo dados de entrada (áreas, momentos de inércia) tanto a análises estáticas como dinâmicas. Além disso, essa ferramenta poderá ser utilizadas em conjunto com métodos analíticos em atividades de projeto de estruturas mecânicas e mesmo auxiliando atividades em disciplinas como a de Estruturas Aeronáuticas. Há também a possibilidade de se desenvolver ferramentas de otimização para as características da seção que estabeleçam certas restrições e variáveis de modo a fornecer uma distribuição ótima para as variáveis de interesse.

5. REFERÊNCIAS

Arias, Á., López-Puente, J., Loya, J.A., Varas, D. e Zaera, R., 2014. *Analysis of high-speed impact problems in the aircraft industry*, Springer Vienna, pp. 137–207.

Donaldson, B., 2008. *Analysis of Aircraft Structures An Introduction*. Cambridge University Press.

dos Santos, T., Alves, M.K. e Rossi, R., 2015. "A constitutive formulation and numerical procedure to model rate effects on porous materials at finite strains". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 93, pp. 166 – 180. ISSN 0020-7403.

Fish, J. e Belytschko, T., 2007. *A First Course in Finite Elements*. Wiley. ISBN 9780470035801. URL `https://books.google.com.br/books?id=kqwMmAEACAAJ`.

Geier, M., M.M., J., Rossi, R., Rosa, P. e Martins, P., 2013. "Interference-fit joining of aluminium tubes by electromagnetic forming". *Advanced Materials Research*, Vol. 853, pp. 488–493.

Han, S. e Bauchau, O.A., 2015. "Nonlinear three-dimensional beam theory for flexible multibody dynamics". *Multibody System Dynamics*, Vol. 34, No. 3, pp. 211–242.

Mamalis, A., Manolakos, D., Kladas, A. e Koumoutsos, A., 2004. "Electromagnetic forming and powder processing: Trends and developments". *Applied Mechanics Reviews - APPL MECH REV*, Vol. 57.

Megson, T., 2007. *Aircraft Structures for Engineering Students*. Elsevier Science.

Neugebauer, R., Bouzakis, K.D., Denkena, B., Klocke, F., Sterzing, A., Tekkaya, A. e Wertheim, R., 2011. "Velocity effects in metal forming and machining processes". *CIRP Annals*, Vol. 60, No. 2, pp. 627 – 650.

Rodríguez-Martínez, J., 2011. "Advanced constitutive relations for modeling thermo-viscoplastic behaviour of metallic alloys subjected to impact loading".

Rusinek, A. e Jankowiak, T., 2014. *Dynamic Behavior of Materials. Constitutive Relations and Applications*, Springer Vienna, Vienna, pp. 87–135.

Silva, C.M.A., Rosa, P.A.R. e Martins, P.A.F., 2016. "Innovative testing machines and methodologies for the mechanical characterization of materials". *Experimental Techniques*, Vol. 40, No. 2, pp. 569–581.

Yassin, A.Y.M. e Nethercot, D.A., 2007. "Cross-sectional properties of complex composite beams". *Engineering Structures*, Vol. 29, No. 2, pp. 195 – 212.