

Roteirização de um Robô de Entrega

Rafael Pêgo de Almeida Murta - rafael.murta@edu.unimontes.br

Túlio Magalhães Ferreira e Silva - tulio.silva@edu.unimontes.br

Lucas Souza Gomes - lucas.gomes@edu.unimontes.br

Jorge Fernando Campos Camargos - jorgebg2016@gmail.com

Carlos Alexandre Maia Ramos - carlosalexandremaia446@gmail.com

Rafael Abdo - rafaabdo07@gmail.com

Departamento de Ciência da Computação, Universidade Estadual de Montes Claros,
UNIMONTES – Montes Claros, MG, Brasil

Resumo

A eficiência de um sistema logístico depende da capacidade de transportar cargas entre diferentes pontos utilizando rotas curtas, contínuas e resistentes a falhas. Como um armazém é formado por estações conectadas por corredores, ele pode ser representado como um grafo, no qual os vértices representam as estações e as arestas representam os caminhos entre elas. Dessa forma, propriedades importantes do sistema podem ser analisadas por meio da Teoria dos Grafos.

Neste trabalho, a topologia de um armazém de distribuição composto por quatro estações operacionais é modelada como um grafo não dirigido ($G=(V,E)$). A partir desse modelo, são analisadas propriedades como conectividade, caminhos simples e grau dos vértices para verificar se a rede mantém sua operação mesmo diante da interdição de corredores e se sua estrutura favorece a navegação eficiente dos veículos.

A análise mostra que a rede permanece conectada mesmo com falhas localizadas, garantindo rotas alternativas entre as estações. Além disso, pelo Teorema de Euler (1736), verifica-se que o grafo possui exatamente dois vértices de grau ímpar, o que garante a existência de um caminho euleriano aberto. Como consequência, um robô móvel pode percorrer todos os corredores exatamente uma vez, realizando uma inspeção completa sem repetir trajetos e reduzindo o consumo de energia e o tempo de operação.

Por fim, os resultados obtidos na análise matemática são validados por uma implementação em Python, demonstrando como os conceitos da Teoria dos Grafos podem ser aplicados diretamente ao planejamento e à automação de sistemas logísticos.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Roteirização Logística, Problema do Carteiro Chinês, Caminho Euleriano, Otimização de Rotas, Robôs Autônomos.

1. Introdução

A otimização de fluxos operacionais em ambientes logísticos fechados, tais como centros de distribuição automatizados, constitui um desafio central na pesquisa operacional contemporânea. Como os centros de distribuição robotizados modernos, representa um pilar fundamental para a eficiência da cadeia de suprimentos contemporânea. Robôs móveis autônomos dependem de algoritmos precisos de roteamento para desempenhar tarefas de coleta, transporte e expedição de

mercadorias. O desafio analítico reside em traçar trajetórias otimizadas que minimizem o tempo de deslocamento e o consumo de energia, mitigando redundâncias de percurso. Diante disso, o problema clássico de percorrer todas as vias de um sistema exatamente uma vez, conhecido como o Problema do Carteiro Chinês, ganha destaque prático direto em rotinas de monitoramento e inspeção industrial. Este relatório aplica o formalismo matemático da Teoria dos Grafos para modelar a infraestrutura de um armazém, testando sua resiliência estrutural e sua capacidade de comportar roteiros eulerianos ótimos.

2. Fundamentação Teórica

2.1 Conceitos Básicos

A modelagem matemática de malhas viárias e sistemas de transporte encontra suporte conceitual na Teoria dos Grafos. Um grafo não dirigido é formalizado como uma estrutura matemática discreta $G = (V, E)$, em que V representa um conjunto finito de vértices (nós ou estações) e E delimita o conjunto de arestas (linhas ou corredores de tráfego bidirecionais).

A análise das propriedades locais e globais do grafo baseia-se nos seguintes conceitos:

Grau de um Vértice (δ): Define a quantidade de arestas incidentes em um determinado nó, servindo como uma métrica de conectividade e capacidade de escoamento local.

Caminho Simples: Caracteriza-se como uma sequência ordenada de vértices adjacentes em que nenhum vértice (e consequentemente nenhuma aresta) é revisitado. É a base para roteamentos elementares ponto a ponto.

Teorema de Euler (1736): Formulação clássica que rege problemas de varredura completa de redes. Segundo o teorema, um grafo conexo admite um caminho euleriano (uma trilha contínua que transita por todas as arestas de E exatamente uma vez) se, e somente se, o grafo possuir rigorosamente zero ou dois vértices com grau de valência ímpar. Se o número de vértices ímpares for zero, a trajetória constitui um ciclo euleriano, o que significa que o ponto de partida coincide obrigatoriamente com o ponto de chegada.

2.2 Componentes Conexas

A integridade global de uma rede de sensores ou de caminhos automatizados é determinada pelo conceito de conectividade. Um grafo é considerado conexo se existir pelo menos um caminho válido entre qualquer par de vértices pertencentes a V . Quando uma rede sofre fragmentações decorrentes de falhas ou bloqueios estruturais, ela se divide em subgrafos maximais independentes denominados componentes conexas.

A análise quantitativa dessas componentes mensura a resiliência topológica do sistema: a perda de conectividade integral indica uma falha catastrófica de infraestrutura onde determinados setores tornam-se completamente isolados ou inacessíveis para os agentes autônomos.

3. Análise do Estudo de Caso

O modelo sob análise reproduz o arranjo físico de um armazém de pequena escala constituído por quatro pontos estratégicos de interesse e processamento:

$$V = \{E, S, P, X\}$$

onde E corresponde ao Estoque, S representa a Separação, P indica a Embalagem e X define o terminal de Expedição.

A malha interna de circulação viária é composta por cinco corredores operacionais bidirecionais, cujos acoplamentos diretos estabelecem o conjunto de arestas:

$$E = \{ES, EP, SP, SX, PX\}$$

A extração algébrica das relações de adjacência determina a seguinte distribuição topológica de graus para cada nó do armazém:

$$\begin{aligned} E : \{S, P\} &\rightarrow \delta(E) = 2 \quad (\text{Grau Par}) \\ S : \{E, P, X\} &\rightarrow \delta(S) = 3 \quad (\text{Grau Ímpar}) \\ P : \{E, S, X\} &\rightarrow \delta(P) = 3 \quad (\text{Grau Ímpar}) \\ X : \{S, P\} &\rightarrow \delta(X) = 2 \quad (\text{Grau Par}) \end{aligned}$$

4. Solução das Questões

(a) Topologia Estrutural do Grafo

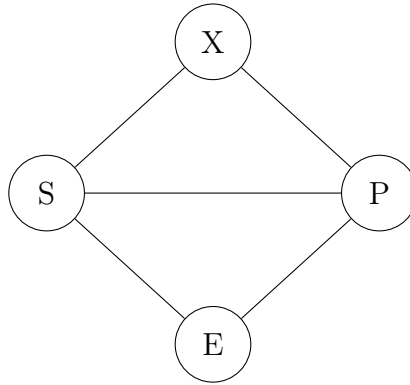


Figura 1: Topologia do armazém modelada como grafo não dirigido $G = (V, E)$.

(b) Caminhos Simples de E até X

A listagem rigorosa de todas as trajetórias possíveis que levam o robô de entrega do Estoque (E) à Expedição (X) sem gerar redundâncias ou repetições de nós resulta em exatamente quatro caminhos distintos:

- $E \rightarrow S \rightarrow X$
- $E \rightarrow P \rightarrow X$
- $E \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow X$
- $E \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow X$

(c) Menor Caminho entre E e X

Sob a métrica de custo unitário por corredor físico percorrido (menor cardinalidade de arestas), as rotas geodésicas ótimas de comprimento igual a 2 são as linhas de tráfego direto:

- $E \rightarrow P \rightarrow X$ (2 arestas)
- $E \rightarrow S \rightarrow X$ (2 arestas)

(d) Resiliência Topológica à Interdição do Corredor $S-P$

O grafo permanece conexo, contendo uma única componente conexa global. Embora a remoção do segmento central elimine o atalho direto entre as frentes de Separação e Embalagem, a rede preserva rotas viáveis alternativas através de um anel contínuo periférico no formato de um ciclo quadrático ($E \rightarrow S \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow E$). O fluxo entre todos os pontos permanece garantido; por exemplo, para transitar de S para P , o robô de entrega executará com sucesso o itinerário alternativo $S \rightarrow X \rightarrow P$, comprovando a tolerância a falhas localizadas da topologia.

(e) Desafio: Roteirização de Inspeção por Cobertura Completa

Conclusão: É perfeitamente possível estruturar uma rota em que o robô de inspeção trafegue por todos os corredores do armazém exatamente uma única vez.

Justificativa via Teorema de Euler: A validação analítica apoia-se estritamente nas leis clássicas de Euler para caminhos em redes conexas. Conforme mapeado na seção de análise estrutural, a contagem de graus da rede revela que os nós E e X possuem valência par ($\delta = 2$), ao passo que as estações centrais S e P possuem valência ímpar ($\delta = 3$).

Visto que o sistema apresenta exatamente dois vértices de grau ímpar, o Teorema de Euler atesta de forma incontestável a existência de uma trilha euleriana aberta. Adicionalmente, as propriedades desses grafos impõem uma regra operacional mandatória: a rota de varredura sem repetições deve, obrigatoriamente, iniciar em uma das estações de grau ímpar e terminar na outra remanescente.

Exemplo de roteiro euleriano perfeito (Partida em S , Término em P):

$$S \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow X \rightarrow P$$

5. Análise Algorítmica e Resolução da Questão 4(c) via BFS

5.1 Estrutura do Algoritmo

A estratégia de Busca em Largura (*Breadth-First Search* – BFS) é otimizada e matematicamente exata. O algoritmo realiza uma varredura radial e em níveis a partir de um vértice inicial, garantindo que o primeiro momento em que um nó de destino é alcançado corresponda deterministicamente à menor distância geodésica possível dentro da topologia do sistema.

Inicialização Estrutural: a queue (Fila) funciona no sistema FIFO (Primeiro a entrar, primeiro a sair). O vértice inicial entra primeiro. Ela garante que visitaremos todos os vizinhos de um nível antes de passar para o próximo nível. O conjunto **visited** (Visitados) impede o reprocessamento de nós e evita loops infinitos.

Propagação de Distâncias: o dicionário **distance** mapeia a distância cumulativa em número de arestas a partir da origem, sendo incrementado em exatamente +1 a cada nova ramificação vizinha descoberta (**distance[neighbor] = distance[node] + 1**).

Mapeamento de Predecessores: o dicionário **fathers** guarda a referência de qual nó foi o responsável por descobrir o vértice atual (**fathers[neighbor] = node**). Esse encadeamento retroativo permite reconstruir o caminho ideal exato fazendo o processo inverso (*backtracking*) a partir de qualquer ponto de chegada.

5.2 Aplicação ao Estudo de Caso

Ao aplicarmos esse algoritmo sobre o grafo do armazém definindo o Estoque ('E') como o vértice de início (**start**), o comportamento passo a passo da busca se consolida da seguinte forma:

Fila Inicial: ['E'] | distance = {'E': 0} | fathers = {'E': None}

Iteração 1: O nó 'E' é removido da fila. Seus vizinhos adjacentes são 'S' e 'P'. Ambos não foram visitados, logo entram na estrutura:

```
distance = {'E': 0, 'S': 1, 'P': 1}
fathers = {'E': None, 'S': 'E', 'P': 'E'}
Fila atualizada: ['S', 'P']
```

Iteração 2: O nó 'S' é removido da fila. Seus vizinhos são 'E' (já visitado), 'P' (já visitado) e 'X' (não visitado). O nó 'X' (Expedição) é computado:

```
distance = {'E': 0, 'S': 1, 'P': 1, 'X': 2}
fathers = {'E': None, 'S': 'E', 'P': 'E', 'X': 'S'}
Fila atualizada: ['P', 'X']
```

Resultado da Questão 4(c): Conforme determinado pelo dicionário final de distâncias, o menor caminho entre o Estoque ('E') e a Expedição ('X') possui um comprimento de 2 arestas. Utilizando o mapeamento de predecessores (`fathers['X'] = 'S'` e `fathers['S'] = 'E'`), reconstrói-se a rota ótima através do retrocesso geodésico, resultando no percurso:

$$E \rightarrow S \rightarrow X \quad (2 \text{ arestas})$$

6. Implementação do Código

```
1 from collections import deque
2
3 def BFS_distance_and_path(G, start):
4     # Inicialização das estruturas de controle de fluxo
5     queue = deque([start])
6     visited = {start}
7     distance = {start: 0}
8     fathers = {start: None}
9
10    while queue:
11        node = queue.popleft()
12        for neighbor in G[node]:
13            if neighbor not in visited:
14                visited.add(neighbor)
15                distance[neighbor] = distance[node] + 1
16                fathers[neighbor] = node
17                queue.append(neighbor)
18
19    return distance, fathers
20
21
22 graph = {
23     'E': ['S', 'P'],
24     'S': ['E', 'P', 'X'],
25     'P': ['E', 'S', 'X'],
26     'X': ['S', 'P']
27 }
28
29 dist, fathers = BFS_distance_and_path(graph, start='E')
30 print(dist)
31 print(fathers)
```

Listing 1: Busca em Largura (BFS) para distâncias mínimas e reconstrução de caminhos.

A saída produzida é:

```
{'E': 0, 'S': 1, 'P': 1, 'X': 2}  
{'E': None, 'S': 'E', 'P': 'E', 'X': 'S'}
```

A primeira impressão é o dicionário de distâncias mínimas e a segunda mostra os caminhos existentes (via predecessores) para se chegar em X .

7. Conclusão

A modelagem matemática efetuada demonstra a eficácia prática da Teoria dos Grafos em subsidiar a engenharia de tráfego de sistemas automatizados de movimentação de cargas. A rede analisada evidenciou um elevado índice de resiliência topológica, uma vez que a obstrução simulada do seu principal corredor central não comprometeu a conectividade global do armazém, mantendo todos os setores em plena comunicação por meio de caminhos redundantes. Por fim, o emprego do Teorema de Euler proporcionou uma solução elegante ao desafio de inspeção integral, garantindo a viabilidade de trajetórias com desperdício nulo de percurso, o que traduz-se diretamente na otimização de tempo e na preservação da vida útil das baterias dos robôs autônomos.

Referências

- [1] EULER, L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, v. 8, p. 128–140, 1736.
- [2] BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [3] SALLAM, M.; MAKAROVSKIKH, T. A. Designing the optimal trajectory for monitoring objects. *Vestnik YuUrGU. Seriya Vychislitel'naya Matematika i Informatika*, v. 13, n. 3, p. 32–46, 2024.
- [4] CEBALLOS, M.; MILLÁN, M. Vertex Coloring and Eulerian and Hamiltonian Paths of Delaunay Graphs Associated with Sensor Networks. *Mathematics*, v. 12, n. 1, p. 55, 2024.
- [5] BAYÓN-GUTIÉRREZ, M. et al. Minimum cost Eulerian cycles in road networks. In: *Proceedings of CISTI 2022*, IEEE, 2022.
- [6] LI et al. Cooperative Recharge Scheme Based on a Hamiltonian Path in Mobile Wireless Rechargeable Sensor Networks. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2022, p. 6955713, 2022.