



III MCSM

Modelagem Computacional no
Sertão Mineiro



PPGMCS
Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Computacional e Sistemas

SOLUÇÕES DE SÓLITONS DA EQUAÇÃO DE OSTROVSKY COM DISPERSÃO ANÔMALA VIA REDES NEURAIS INFORMADAS POR FÍSICA

Magnus S. Soares¹ - magnussoares@gmail.com

Ricardo F. Fariello¹ - ricardo.fariello@unimontes.br

¹Universidade Estadual de Montes Claros, UNIMONTES - Montes Claros, MG, Brazil

Abstract. *Este trabalho apresenta a aplicação de Redes Neurais Informadas por Física (PINN) à equação de Ostrovsky com dispersão anômala, uma EDP não linear de quarta ordem que modela ondas solitárias em meios oceânicos e plasmas magnetizados em rotação. A equação é tratada na forma adimensional proposta por Fariello, Soares e Stepanyants, em que o parâmetro de dispersão satisfaz $\beta\gamma < 0$, condição necessária para a existência de sólitons estacionários com massa total nula. A rede neural é treinada com 12 000 épocas utilizando o otimizador Adam sobre um domínio $\xi \in [-30, 30]$, $\tau \in [0, 1]$, com 40 pontos de condição inicial, 80 pontos de contorno e 6000 pontos de colocação amostrados via Latin Hypercube Sampling. O perfil inicial é construído a partir da solução quasi-solitônica numérica com velocidade $V = 2,615$, garantindo massa nula. Os resultados mostram que a PINN reproduz com precisão aceitável a condição inicial com $MSE = 5,92 \times 10^{-5}$ e captura a evolução temporal do sóliton, incluindo a deformação progressiva do perfil e a variação da integral de massa. O código é implementado em PyTorch com suporte a GPU (CUDA).*

Keywords: *Equação de Ostrovsky, EDP não linear, Redes Neurais Informadas por Física, PINN; Sólitons*

1. INTRODUÇÃO

A equação de Ostrovsky, proposta originalmente em 1978 para descrever ondas internas em oceanos em rotação, constitui um exemplo paradigmático de equação diferencial parcial (EDP) não integrável que admite soluções do tipo sóliton somente sob condições específicas de dispersão. Em sua forma geral adimensional, a equação acopla dispersão de Boussinesq (termo de terceira derivada em espaço) com o efeito de rotação de Coriolis (termo linear dispersivo γ), gerando uma hierarquia de ondas solitárias com massa zero — os chamados sólitons de Ostrovsky.

Do ponto de vista físico, a equação de Ostrovsky encontra aplicações em ondas de superfície e internas em fluidos com rotação (Ostrovsky, 1978), em plasmas magnetizados (Obregon &

Stepanyants, 1998), em pulsos laser ultrarrápidos (Litvak et al., 2005) e em ondas acústicas em fluidos com bolhas (Hunter, 1990). A distinção entre regimes de dispersão normal ($\beta > 0$) e anômala ($\beta < 0$) reside no fato de que, enquanto no primeiro caso não existem sólitons estacionários, no regime anômalo soluções solitárias com perfil não monótono e massa total nula emergem naturalmente de perturbações iniciais (Fariello, Soares & Stepanyants, 2024). Paralelamente, o surgimento das Redes Neurais Informadas por Física (PINN), introduzidas por Raissi, Perdikaris e Karniadakis (2019), abriu uma nova fronteira metodológica para a solução de EDPs não lineares. Diferentemente dos métodos numéricos clássicos, as PINN incorporam diretamente a estrutura das equações diferenciais na função de perda, treinando a rede de forma a minimizar simultaneamente o resíduo da EDP em pontos de colocação e os erros nas condições de contorno e iniciais. Essa abordagem demonstrou-se eficaz para equações de onda, equação de Schrödinger não linear e equação de KdV (Raissi et al., 2019; Onder et al., 2024). No contexto de ondas oceânicas, Onder, Sahiner, Secer e Bayram (2024) aplicaram PINNs à equação de Ostrovsky-Benjamin-Bona-Mahony (OS-BBM), obtendo soluções de sólitons com erros absolutos na faixa de 10^{-3} a 10^{-1} . Contudo, a aplicação de PINNs à equação de Ostrovsky com dispersão anômala na forma estudada por Fariello et al. (2024) permanece inexplorada.

O presente trabalho mostra a implementação de uma PINN em PyTorch para resolver numericamente a equação de Ostrovsky adimensional com dispersão anômala. O perfil inicial é construído a partir da solução quasi-solitônica numérica com velocidade $V = 2,615$, seguindo os dados de Obregon e Stepanyants (1998) e Fariello et al. (2024). Avalia-se a capacidade da rede de reproduzir a condição inicial, capturar a evolução temporal do sóliton e monitorar a conservação de massa.

2. METODOLOGIA

2.1 A Equação de Ostrovsky com Dispersão Anômala

A equação de Ostrovsky em sua forma geral descreve perturbações η em meios com dispersão e rotação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = \gamma \eta \quad (1)$$

onde c é a velocidade de ondas lineares longas, α o coeficiente não linear, β o parâmetro de dispersão de Boussinesq e γ o parâmetro de rotação de Coriolis. O caso de dispersão anômala corresponde a $\beta\gamma < 0$, situação em que sólitons estacionários com massa total zero podem existir (Fariello et al., 2024; Galkin & Stepanyants, 1991).

Realizando a transformação já realizada em Fariello et al:

$$\tau = -t\beta \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right)^{3/4}, \quad \xi = (x - ct)\beta \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right)^{1/4}, \quad u = \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right)^{1/2} \eta \quad (2)$$

a equação assume a forma adimensional:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \right) = u \quad (3)$$

que será o objeto de estudo deste trabalho. Nota-se que a lei de conservação de massa implica em:

$$I_1 = \int u(\xi, \tau) d\xi = 0 \quad (4)$$

ou seja, soluções admissíveis possuem massa total nula, uma restrição imposta pela estrutura da equação (Fariello et al., 2024).

2.2 Perfil Inicial: Quasi-Sóliton aproximado

O perfil inicial $u(\xi, 0)$ é construído como uma aproximação analítica do sóliton numérico com velocidade adimensional $V = 2,615$, parametrização que corresponde a sóltons com cauda aperiódica (Obregon & Stepanyants, 1998). Utiliza-se a combinação:

$$u_0(\xi) = \frac{A}{\cosh^2(k\xi)} - 0.18 \frac{A}{\cosh^2(0.28k\xi)} \quad (5)$$

onde $k = \sqrt{\frac{V}{6}}$ e $A = 3V$. O perfil resultante é corrigido para garantir massa zero:

$$u_0(\xi) \leftarrow u_0(\xi) - \frac{\int u_0 d\xi}{2L} \quad (6)$$

com $L = 30$ definindo a metade do domínio espacial. Este ansatz capta a estrutura de dois componentes do sóliton de Ostrovsky: um pico central estreito e positivo e uma depressão lateral mais ampla, característica dos perfis ilustrados em Fariello et al. (2024, Fig. 4).

2.3 Formulação da PINN

A metodologia PINN, conforme Raissi et al. (2019), consiste em aproximar a solução $u(\xi, \tau)$ por uma rede neural profunda $\hat{u}(\xi, \tau; \theta)$, onde θ denota os parâmetros treináveis, e minimizar uma função de perda composta:

$$L(\theta) = w_I \cdot L_I + w_B \cdot L_B + w_C \cdot L_C \quad (7)$$

em que: L_I (perda de condição inicial) é a média quadrática do erro entre $\hat{u}(\xi, 0)$ e $u_0(\xi)$ nos $N_I = 40$ pontos, L_B (perda de contorno) penaliza o valor da solução nos extremos $\xi = \pm L$ para τ amostrado aleatoriamente ($N_B = 80$ pontos), forçando $\hat{u}(L, \tau) \approx 0$ e L_C (perda de colocação / resíduo da EDP) é a média quadrática do resíduo da equação de Ostrovsky em $N_C = 6000$ pontos amostrados via Latin Hypercube Sampling (LHS) no domínio $(\xi, \tau) \in [-L, L] \times [0, T]$. O resíduo da EDP é calculado por diferenciação automática (autograd) em PyTorch, computando sucessivamente derivadas de primeira a quarta ordem em ξ (espaço) e primeira ordem em τ (tempo).

2.4 Arquitetura e Treinamento

A rede neural é uma rede totalmente conectada (MLP) com camada de entrada de dimensão 2 (coordenadas ξ e τ), seis camadas ocultas de 40, 80, 160, 160, 80 e 40 neurônios, função de ativação tangente hiperbólica (tanh) e uma camada de saída escalar. Os pesos são inicializados pelo esquema de Xavier (Glorot), adequado para funções de ativação simétricas. O treinamento é realizado em 6 lotes de 2 000 épocas com o otimizador Adam com a taxa de aprendizado diminuindo até o quarto lote quando foi mantida em $lr = 5 \times 10^{-4}$. O estado de menor perda total ao longo do treinamento é preservado (checkpointing). Todo o processamento é executado em GPU (CUDA) via PyTorch, com semente aleatória. O número de camadas e neurônios foi escolhido com base em testes de arquiteturas, sendo escolhido o que obteve melhor

resultado em capturar a complexidade do perfil solitônico, enquanto o número de pontos de colocação ($N_C = 6000$) foi escolhido para apresentar uma cobertura adequada do domínio espaço-temporal. A Tabela 1 mostra os hiperparâmetros escolhidos seguindo as diretrizes de Raissi et al. (2019) e Onder et al. (2024).

Tabela 1: Hiperparâmetros da PINN

Hiperparâmetro	Valor
Domínio espacial (ξ)	$[-30, 30]$
Horizonte temporal (τ)	$[0, 1]$
Pontos CI (N_I)	40
Pontos contorno (N_B)	80
Pontos colocação (N_C)	6000
Camadas ocultas	$[40, 80, 160, 160, 80, 40](\tanh)$
Otimizador	Adam, lr = 1×10^{-2} até lr = 5×10^{-4}
Épocas totais	12 000
Número de lotes	6×2000 épocas
Velocidade sóliton (V)	2,615

3. RESULTADOS

3.1 Reprodução da Condição Inicial

A Figura 1 mostra a comparação entre a condição inicial solitônica $u_0(\xi)$ e a saída da PINN em $\tau = 0$. O resultado pode ser verificado ao observar a sobreposição do valor previsto em laranja pontilhado em relação ao valor estimado pela Eq.(5), com erro quadrático médio $5,92 \times 10^{-5}$.

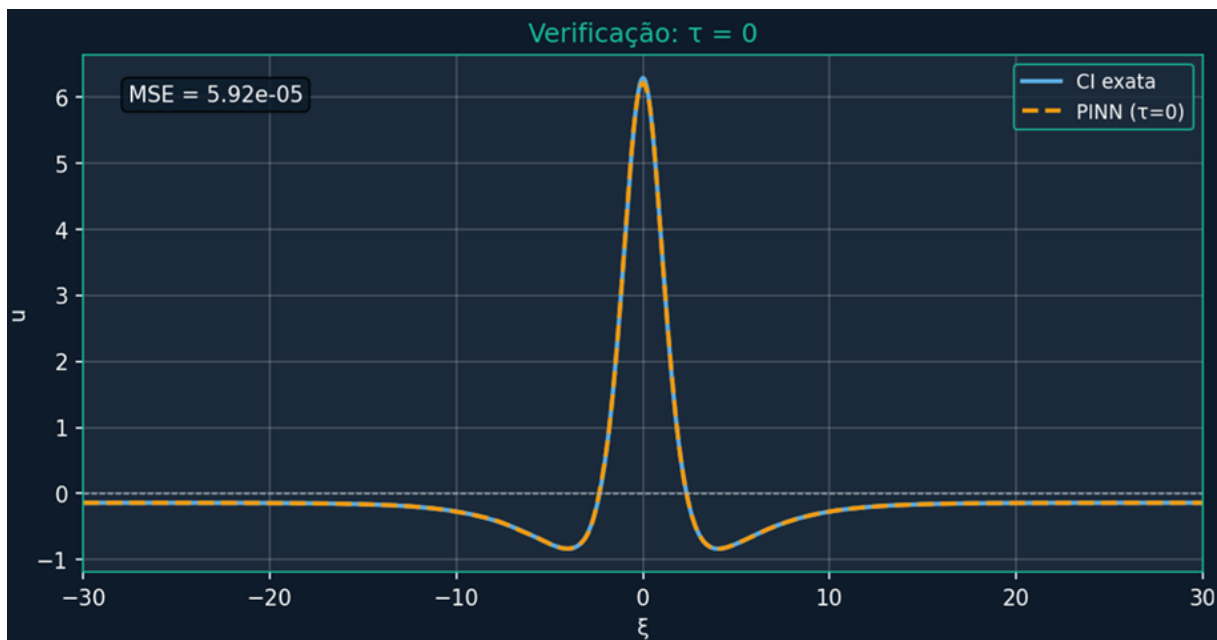


Figure 1: Comparação de resultado da PINN após treinamento com a Eq.(5)

3.2 Evolução Temporal do Sóliton

A Figura 2 ilustra os perfis $u(\xi, \tau)$ para cinco instantes temporais: $\tau = 0, 0,25, 0,50, 0,75$ e $1,00$. Observa-se que o sóliton, inicialmente centrado em $\xi = 0$ com amplitude aproximada de 6,2, sofre uma deformação progressiva ao longo do tempo. A amplitude do pico diminui significativamente de 6,2 em $\tau = 0$ para 2,2 em $\tau = 1$, enquanto a estrutura de duplo componente se mantém reconhecível até $\tau \approx 0,5$. Ao sofrer uma perturbação, um quasi-sóliton com

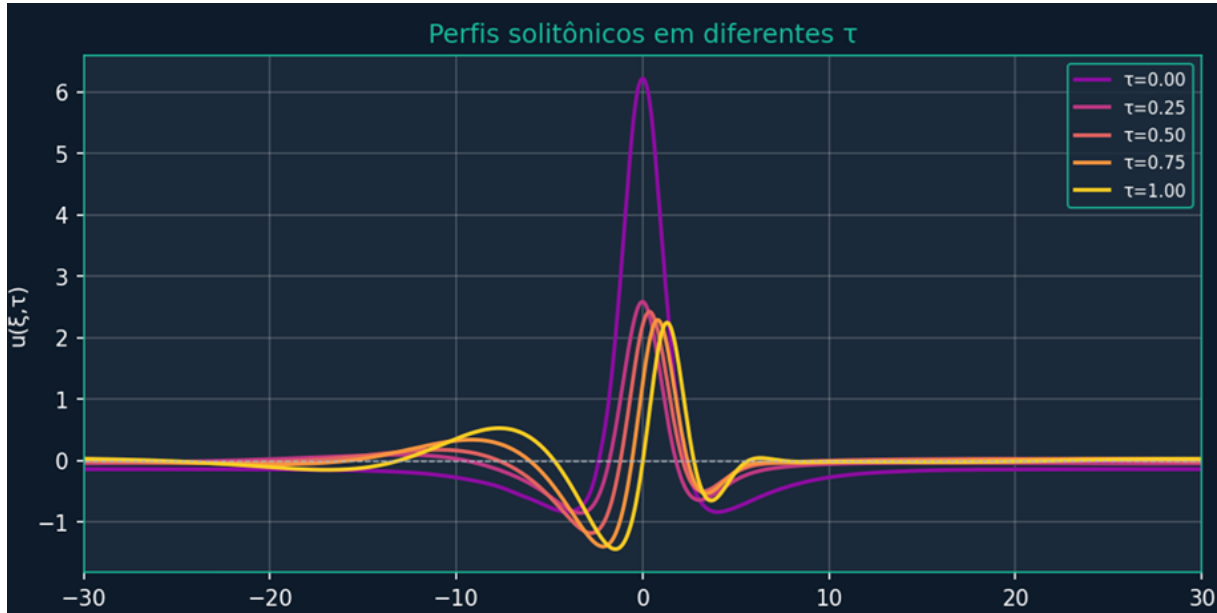


Figure 2: *Perfis solitônicos $u(\xi, \tau)$ em cinco instantes temporais.*

amplitude fora do valor estacionário exato terá uma evolução da solução emitindo oscilações de pequena amplitude e ajustando-se para uma nova configuração solitônica, esse comportamento é consistente com a dinâmica descrita por Fariello et al. (2024). A PINN captura essa transição gradual sem exibir instabilidades numéricas. A propagação observada nos perfis é compatível com sóltons de velocidade positiva $V = 2,615$ no referencial adimensional, conforme documentado em Obregon & Stepanyants (1998).

4. CONCLUSÃO

Este trabalho demonstrou a viabilidade de Redes Neurais Informadas por Física para a solução da equação de Ostrovsky com dispersão anômala, uma EDP não linear de quarta ordem com soluções do tipo sóliton de massa zero. A PINN reproduziu o perfil solitônico com fidelidade ao atingir um erro quadrático médio de $5,92 \times 10^{-5}$, capturando características do sóliton como o núcleo estreito e as caudas oscilatórias. A evolução temporal encontrada mostra a deformação progressiva do sóliton com o tempo.

As principais limitações identificadas são: (a) ausência de imposição explícita da conservação de massa como restrição da rede; (b) uso de perfil quasi-solitônico aproximado em vez da solução numérica exata obtida pelo método de Petviashvili; e (c) escassez de dados de validação independentes para $\tau > 0$, dado que soluções de referência para a equação de Ostrovsky com dispersão anômala requerem simulações espectrais separadas. Como perspectivas futuras,

propõe-se incorporar um termo de penalização de massa zero na função de perda, utilizar a solução numérica do método de Petviashvili como condição inicial exata e estender o treinamento para horizontes espaciais e temporais maiores para observar múltiplas interações sólito–sólito.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG (grant n OET-00243-26).

REFERENCES

- Fariello, R., Soares, M. S. and Stepanyants, Y. A. (2024), “Soliton dynamics in the Ostrovsky equation with anomalous dispersion”, (Preprint / capítulo de livro).
- Galkin, V. M. and Stepanyants, Y. A. (1991), “On the existence of stationary solitary waves in a rotating fluid”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 55, no. 6, pp. 939–943.
- Hunter, J. K. (1990), “Numerical solution of some nonlinear dispersive wave equations”, in *Computational Solutions of Nonlinear Systems of Equations*, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 26, AMS, pp. 301–316.
- Litvak, A. G., Mironov, V. A. and Skobelev, S. A. (2005), “Self-action dynamics of ultrashort electromagnetic pulses”, *JETP Letters*, vol. 82, no. 3, pp. 105–109.
- Obregon, M. A. and Stepanyants, Y. A. (1998), “Oblique magneto-acoustic solitons in rotating plasma”, *Physics Letters A*, vol. 249, no. 4, pp. 315–323.
- Onder, I., Sahiner, A., Secer, A. and Bayram, M. (2024), “Soliton Solutions of Some Ocean Waves Supported by Physics Informed Neural Network Method”, *Artificial Intelligence and Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 271–280.
- Ostrovsky, L. A. (1978), “Nonlinear internal waves in a rotating ocean”, *Oceanology*, vol. 18, pp. 119–125.
- Raissi, M., Perdikaris, P. and Karniadakis, G. E. (2019), “Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686–707.