

MODELAGEM DINÂMICA DE CIRCUITOS ELÉTRICOS BASEADA EM ELEMENTOS R, L E C

Leonardo Castelli Rister¹, Murilo Henrique Lima de Souza¹, Gabriel Victor de O. Blanco¹, Mara Lúcia Martins Lopes Souza¹

¹Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, SP, Brasil (e-mails: leonardo.rister@unesp.br, murilo.l.souza@unesp.br, g.blanco@unesp.br, mara.lopes@unesp.br)

Resumo: Este trabalho apresenta uma abordagem sistemática para a modelagem dinâmica de circuitos elétricos lineares a partir das relações constitutivas dos elementos resistivo, capacitivo e indutivo e das Leis de Kirchhoff. A formulação conduz naturalmente a equações diferenciais ordinárias e à representação em espaço de estados, fornecendo uma base conceitual unificada para análises no domínio do tempo e aplicações computacionais. São apresentadas deduções detalhadas para indutores e capacitores, bem como uma discussão aprofundada da modelagem em espaço de estados, incluindo formulação matricial, métodos de solução e discretização.

Palavras-chave: Circuitos Elétricos; Modelagem Dinâmica; Equações Diferenciais; Circuitos RLC; Espaço de Estados.

INTRODUÇÃO

A análise de circuitos elétricos é, tradicionalmente, introduzida por circuitos puramente resistivos, cujo comportamento é descrito por equações algébricas lineares. Contudo, essa abordagem torna-se insuficiente quando o circuito contém elementos armazenadores de energia (capacitores e indutores), pois sua presença introduz dependência temporal nas grandezas elétricas (Alexander; Sadiku, 2016). Capacitores e indutores armazenam energia nos campos elétrico e magnético, respectivamente, impondo restrições à variação temporal de tensões e correntes. Como consequência, a descrição matemática de circuitos contendo tais elementos conduz a equações diferenciais ordinárias obtidas a partir das Leis de Kirchhoff associadas às relações constitutivas dos elementos básicos (Nilsson; Riedel, 2019). Esse caráter dinâmico distingue os circuitos RLC dos puramente resistivos, exigindo ferramentas matemáticas mais gerais para sua análise.

A formulação por equação diferencial ordinária (EDO) fornece uma descrição precisa do comportamento temporal e permite interpretar condições iniciais e mecanismos de transferência de energia (Ogata, 2010). Nesse contexto, surge a representação em espaço de estados, na qual tensões em capacitores e correntes em indutores são escolhidas como variáveis de estado, resultando em equações diferenciais de primeira ordem que descrevem a dinâmica do sistema (Chen, 2013; Kailath, 1980). Essa representação é particularmente ade-

quada para análise computacional, controle e sistemas de grande porte (Franklin et al., 2015). As equações de estado possibilitam a aplicação de métodos numéricos robustos, como os de Runge-Kutta, e facilitam análises de estabilidade e extensão a sistemas de maior porte (Burden; Faires, 2016).

A modelagem em espaço de estados também é fundamental em sistemas de controle e automação, onde o projeto de controladores — como PID, LQR ou controladores preditivos — baseia-se diretamente nas matrizes de estado e nas respostas temporais do sistema (Dorf; Bishop, 2016). Em malhas fechadas, a realimentação de estados permite modificar a dinâmica original, alterando polos e zeros do sistema para atender a especificações de desempenho, como tempo de acomodação e sobressinal. Essa versatilidade torna a representação em espaço de estados uma ferramenta indispensável não apenas para análise, mas também para síntese de sistemas de controle em aplicações industriais e robóticas.

Além disso, a crescente complexidade dos sistemas elétricos modernos, que integram múltiplas fontes de energia, redes de comunicação e dispositivos eletrônicos de potência, exige modelos capazes de representar interações dinâmicas em diferentes escalas de tempo. A abordagem por espaço de estados se presta naturalmente à simulação de sistemas híbridos (contínuos e discretos), sendo adotada em ferramentas como Simulink e em plataformas de simulação em tempo real (Matar; Karimi, 2021). Essa capacidade de integração multidisciplinar coloca a modelagem dinâmica como pilar central da en-

genharia de sistemas eletroenergéticos contemporâneos e de controle.

Além dos circuitos lineares, muitos sistemas práticos apresentam não linearidades, como saturação de indutores, chaveamentos em conversores ou diodos. Nesses casos, as equações de estado permanecem válidas, mas a solução analítica cede lugar a métodos numéricos adaptativos, que tratam a rigidez e a variabilidade temporal do sistema (Kundert, 2006). A modelagem em espaço de estados, portanto, serve como base para simulações de circuitos não lineares, sendo amplamente empregada em ferramentas como SPICE e em ambientes de simulação de sistemas elétricos de potência.

Em sistemas elétricos de potência, essa modelagem é essencial para estudos de estabilidade transitória, onde a dinâmica de geradores, cargas e linhas de transmissão é representada por sistemas de EDOs acopladas (Kundur, 1994). Da mesma forma, em eletrônica de potência, conversores estáticos e acionamentos de máquinas são descritos por modelos em espaço de estados, permitindo o projeto de controladores e a análise de regimes permanentes e transitórios (Erickson; Maksimović, 2001). A crescente inserção de fontes renováveis e a digitalização dos sistemas elétricos têm impulsionado o uso de modelagem dinâmica em tempo real, exigindo algoritmos eficientes e implementação em hardware dedicado (Matar; Karimi, 2021). A modelagem em espaço de estados também é amplamente empregada em análises no domínio do tempo para descrever circuitos equivalentes de linhas de transmissão e dispositivos de chaveamento (Rister; Kurokawa, 2022).

Atualmente, a integração de sistemas de armazenamento de energia, veículos elétricos e redes inteligentes (smart grids) impõe novos desafios à modelagem dinâmica, uma vez que esses elementos introduzem dinâmicas rápidas e acoplamentos complexos entre os subsistemas. A representação em espaço de estados, combinada com técnicas de redução de ordem e identificação de sistemas, tem se mostrado eficaz para lidar com essa complexidade, permitindo simulações em tempo real e otimização de operação. Nesse cenário, a modelagem dinâmica deixa de ser apenas uma ferramenta de análise e passa a integrar sistemas de controle preditivo e algoritmos de machine learning para tomada de decisão em tempo real.

Ao longo deste trabalho, essa formulação será explorada desde a obtenção das equações diferenciais de circuitos de primeira e segunda ordens até sua representação em espaço de estados, com ênfase nas deduções físicas e matemáticas, culminando em exemplos com implementação computacional. Espera-se que o leitor adquira uma visão unificada da modelagem dinâmica, capaz de transpor os exemplos clássicos para aplicações mais avançadas.

MODELAGEM DOS ELEMENTOS RESISTIVO, INDUTIVO E CAPACITIVO

A modelagem de circuitos elétricos baseia-se nas relações constitutivas dos elementos resistência, indutância e capacitância, as quais estabelecem a relação entre tensão e corrente em cada componente. Estas relações decorrem de princípios físicos fundamentais e conduzem naturalmente a equações algébricas, diferenciais e integrais no domínio do tempo (Alexander; Sadiku, 2016; Boylestad, 2015).

Elemento Resistivo

O resistor ideal é um elemento puramente dissipativo, não associado ao armazenamento de energia. Sua relação constitutiva é descrita pela lei de Ohm, expressa no domínio do tempo por (Alexander; Sadiku, 2016):

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad (1)$$

Onde, de (1), $v_R(t)$ é a tensão nos terminais do resistor, $i_R(t)$ a corrente elétrica e R a resistência (em ohms).

A equação (1) é estritamente algébrica, implicando que o resistor não introduz dinâmica própria ao sistema; a tensão e a corrente são instantaneamente proporcionais.

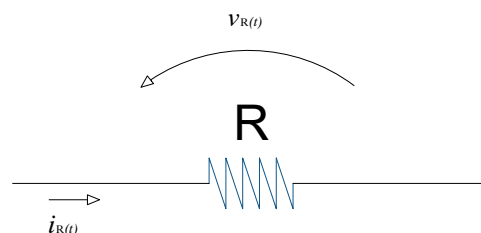


Figura 1: Representação do resistor com tensão $v_R(t)$ e corrente $i_R(t)$.

Elemento Indutivo

O indutor ideal é um elemento que armazena energia magnética. Seu comportamento é governado pela lei de Faraday da indução eletromagnética, que estabelece que a força eletromotriz (tensão) induzida em uma bobina é igual à taxa de variação temporal do fluxo magnético concatenado $\lambda(t)$:

$$v_L(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad (2)$$

Para um indutor linear, o fluxo concatenado é proporcional à corrente que o produz:

$$\lambda(t) = L i_L(t) \quad (3)$$

De (3), a indutância é representada por L , uma constante que depende da geometria da bobina e do número de espiras. Derivando a expressão do fluxo e substituindo na

lei de Faraday, obtém-se a relação constitutiva do indutor:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4)$$

A equação (4) mostra que a tensão no indutor é proporcional à derivada da corrente. Uma consequência importante é que a corrente não pode variar instantaneamente (caso contrário, a tensão seria infinita). Integrando ambos os lados de (4) de t_0 a t , obtém-se a forma integral:

$$\int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau = L \int_{t_0}^t \frac{di_L}{d\tau} d\tau = L[i_L(t) - i_L(t_0)] \quad (5)$$

Trabalhando a integral obtida em (5), obtém-se a seguinte relação entre tensão e corrente:

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau \quad (6)$$

A expressão (6) evidencia que a corrente no indutor é a soma de um valor inicial (condição inicial) com a integral da tensão, caracterizando a memória do elemento. Essa propriedade é fundamental para a dinâmica dos circuitos.

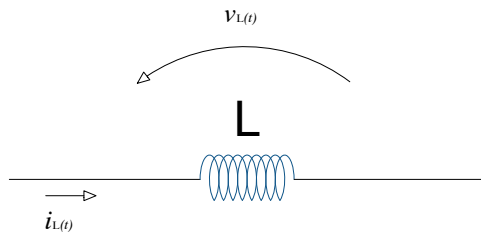


Figura 2: Representação do indutor com tensão $v_L(t)$ e corrente $i_L(t)$.

Elemento Capacitivo

Considerando um capacitor ideal que armazena energia no campo elétrico. A relação entre a carga $q(t)$ armazenada em suas placas e a tensão $v_C(t)$ aplicada é linear para um capacitor linear:

$$q(t) = C v_C(t), \quad (7)$$

De (7), o capacitor é representado por C . A corrente elétrica é descrita abaixo como a taxa de variação da carga:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (8)$$

Derivando a equação (7) e substituindo, obtém-se a relação constitutiva do capacitor:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (9)$$

Esta equação indica que a corrente no capacitor é proporcional à derivada da tensão. Consequentemente, a tensão no capacitor não pode variar instantaneamente (pois isso implicaria uma corrente infinita). Integrando (9) de t_0 a t :

$$\int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau = C \int_{t_0}^t \frac{dv_C}{d\tau} d\tau = C[v_C(t) - v_C(t_0)] \quad (10)$$

Trabalhando a integral obtida em (10), obtém-se a seguinte relação:

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau \quad (11)$$

A equação (11) mostra que a tensão no capacitor depende de seu valor inicial e do histórico da corrente, caracterizando também um elemento com memória. As condições iniciais $i_L(t_0)$ e $v_C(t_0)$ representam a energia armazenada no instante inicial e são essenciais para a unicidade da solução das equações diferenciais do circuito.

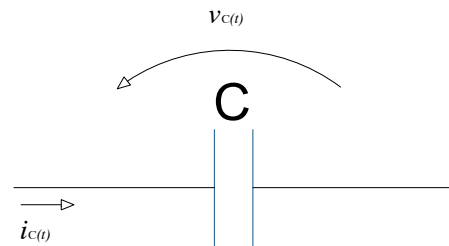


Figura 3: Representação do capacitor com tensão $v_C(t)$ e corrente $i_C(t)$.

MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS

A representação em espaço de estados é uma abordagem sistemática e poderosa para modelagem de sistemas dinâmicos, amplamente empregada em circuitos com elementos armazenadores de energia. Tal abordagem descreve a dinâmica por meio de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, permitindo análise compacta, projeto de controle e implementação computacional eficiente (Ogata, 2010; Chen, 2013; Dorf; Bishop, 2016).

No contexto de circuitos elétricos lineares invariantes no tempo, a modelagem em espaço de estados decorre diretamente das equações constitutivas dos elementos indutivos e capacitivos em conjunto com a aplicação das Leis de Kirchhoff.

As variáveis de estado são escolhidas como as grandezas associadas ao armazenamento de energia, garantindo uma descrição completa do comportamento dinâmico (Antsaklis; Michel, 2007; Ogata, 2010; Franklin et al., 2015).

Definição das Variáveis de Estado

Para um circuito com n elementos armazenadores independentes (capacitores e indutores), define-se o vetor de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

De (12), cada $x_i(t)$ corresponde à corrente em um indutor ou à tensão em um capacitor. A escolha dessas variáveis é natural porque suas derivadas primeiras aparecem diretamente nas relações constitutivas.

Para o indutor, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L \quad (13)$$

Para o capacitor, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C \quad (14)$$

Além disso, a energia total armazenada no circuito é uma função quadrática dessas variáveis:

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum L_k i_{Lk}^2(t) + \frac{1}{2} \sum C_k v_{Ck}^2(t) \quad (15)$$

Essa propriedade as torna candidatas naturais para descrever o estado energético do sistema.

Obtenção das Equações de Estado

A partir das Leis de Kirchhoff (tensões e correntes) e das relações constitutivas, escrevem-se as equações que relacionam as derivadas das variáveis de estado às próprias variáveis de estado e às entradas (fontes independentes). Para circuitos lineares invariantes no tempo, obtém-se um sistema linear da forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (16)$$

onde:

- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas (fontes de tensão ou corrente);
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado (ou matriz de sistema);
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada.

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são determinadas unicamente pelos parâmetros do circuito (resistências, indutâncias, capacitâncias) e pela topologia.

Equações de Saída

As grandezas de interesse (tensões em certos elementos, correntes em ramos específicos) são expressas como combinações lineares das variáveis de estado e das entradas:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (17)$$

De (17), o vetor de saídas é dado por $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é a matriz de transmissão direta (geralmente nula em circuitos sem passagem direta entrada-saída). As equações (16) e (17) constituem o modelo completo em espaço de estados.

Solução das Equações de Estado

A solução da equação diferencial linear (16) para $t \geq t_0$ é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (18)$$

De (18), $e^{\mathbf{A}t}$ é a matriz exponencial, definida pela série de potências:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (19)$$

Essa solução separa a resposta devida às condições iniciais (termo homogêneo) da resposta forçada (integral de convolução). Para sistemas de pequena ordem, a matriz exponencial pode ser calculada analiticamente via autovalores e autovetores. Para sistemas maiores, métodos numéricos são empregados.

Discretização para Simulação Computacional

Para implementação em computadores digitais, o modelo contínuo é discretizado com passo de integração T_s . Uma aproximação comum é a discretização exata para entradas constantes por partes:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k] \end{cases} \quad (20)$$

onde:

- $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_s}$;
- $\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T_s} - \mathbf{I})\mathbf{B}$ (quando $\mathbf{A}$ é invertível);
- $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$;
- $\mathbf{D}_d = \mathbf{D}$.

Condições Iniciais

A solução do sistema depende criticamente das condições iniciais $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, que refletem a energia previamente armazenada nos indutores e capacitores. Fisicamente, $i_L(t_0)$ e $v_C(t_0)$ não podem ser escolhidas arbitrariamente; elas devem satisfazer as leis de Kirchhoff no instante inicial, a menos que haja chaveamentos ou fontes impulsivas.

CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM

Circuitos de primeira ordem possuem apenas um elemento armazenador de energia (um indutor ou um capacitor) e são descritos por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. A constante de tempo τ caracteriza a velocidade de resposta do circuito.

Circuito RL Série

Considere um circuito *RL* série alimentado por uma fonte de tensão $v_s(t)$. Aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK):

$$v_L(t) + v_R(t) = v_s(t) \quad (21)$$

De (21) e sabendo que:

$$\begin{cases} v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ v_R(t) = Ri(t) \end{cases} \quad (22)$$

A partir de (22), obtém-se:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v_s(t) \quad (23)$$

Dividindo ambos os lados de (23) por L e escolhendo a corrente $i(t)$ como variável de estado $x(t)$, temos o modelo de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}v_s(t) \quad (24)$$

A constante de tempo é $\tau = L/R$. Quanto maior o valor de L ou menor o valor de R , mais lenta será a resposta do circuito.

Para a representação em espaço de estados do circuito *RL*, define-se:

- Variável de estado: $x_1(t) = i(t)$
- Entrada: $u(t) = v_s(t)$
- Equação de estado: $\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}u$
- Saída (corrente): $y = x_1$

- Saída (tensão no resistor): $y = Rx_1$

O modelo em espaço de estados do circuito *RL* na forma matricial é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (25)$$

De (25), os vetores são dados por:

$$\mathbf{x}(t) = [i(t)], \quad \mathbf{u}(t) = [v_s(t)], \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Circuito RC Série

Para um circuito *RC* série com fonte $v_s(t)$, a LTK fornece:

$$v_R(t) + v_C(t) = v_s(t) \quad (27)$$

De (27) e sabendo que:

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \quad (28)$$

A partir de (28), obtém-se:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t) \quad (29)$$

Definindo $x(t) = v_C(t)$ (tensão no capacitor) como variável de estado:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}v_s(t) \quad (30)$$

A constante de tempo é $\tau = RC$. O produto RC determina a rapidez com que o capacitor carrega ou descarrega.

Para a representação em espaço de estados do circuito *RC*, define-se:

- Variável de estado: $x_1(t) = v_C(t)$
- Entrada: $u(t) = v_s(t)$
- Equação de estado: $\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}u$
- Saída (tensão no capacitor): $y = x_1$
- Saída (tensão no resistor): como $v_R = v_s - v_C$, tem-se $y = u - x_1$

O modelo em espaço de estados do circuito RC na forma matricial é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (31)$$

De (31), os vetores são dados por:

$$\mathbf{x}(t) = [v_C(t)], \quad \mathbf{u}(t) = [v_s(t)], \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

CIRCUITOS DE SEGUNDA ORDEM

Circuitos de segunda ordem possuem dois elementos armazenadores de energia independentes (normalmente um indutor L e um capacitor C), resultando em duas variáveis dinâmicas e uma equação diferencial de segunda ordem. Esses circuitos podem apresentar respostas superamortecida, criticamente amortecida ou subamortecida (oscilatória), dependendo dos valores dos componentes.

Essas diferentes respostas decorrem da interação entre o indutor e o capacitor, que trocam energia entre si quando a resistência é baixa, gerando oscilações. No caso superamortecido, a resistência dissipa a energia rapidamente, impedindo oscilações, enquanto no subamortecido ocorre troca ressonante de energia entre os campos magnético e elétrico. O amortecimento crítico é o ponto de transição entre esses comportamentos.

Circuito RLC Série

Considere um circuito RLC série alimentado por uma fonte de tensão $v_s(t)$. Pela LTK:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_s(t) \quad (33)$$

De (33) e sabendo que:

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) \\ v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \quad (34)$$

A partir de (34), expressa-se as tensões em função da corrente $i(t)$ ou diretamente da tensão no capacitor $v_C(t)$:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t) \quad (35)$$

Sabe-se que:

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di}{dt} = C \frac{d^2v_C}{dt^2} \end{cases} \quad (36)$$

A partir de (36), obtém-se a EDO de segunda ordem:

$$LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t) \quad (37)$$

Dividindo (37) por LC :

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = \frac{1}{LC} v_s(t) \quad (38)$$

Define-se:

- O coeficiente de amortecimento: $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$;
- A frequência natural não amortecida: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Além disso, o comportamento do circuito é determinado por ζ :

- $\zeta > 1$: resposta superamortecida (dois pólos reais negativos);
- $\zeta = 1$: resposta criticamente amortecida (pólo duplo real);
- $\zeta < 1$: resposta subamortecida (pólos complexos conjugados com parte real negativa), gerando oscilações amortecidas.

Representação em Espaço de Estados do Circuito RLC

Para a representação em espaço de estados do circuito RLC, define-se:

- Variáveis de estado: $x_1(t) = v_C(t)$ e $x_2(t) = i(t)$
- Entrada: $u(t) = v_s(t)$
- Saídas de interesse: tensão no capacitor $v_C(t)$, tensão no resistor $v_R(t)$ e tensão no indutor $v_L(t)$

A partir das equações constitutivas e da lei das malhas, obtém-se o sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{cases} \quad (39)$$

O modelo em espaço de estados do circuito RLC na forma matricial é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \\ -1 & -R \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (40)$$

De onde se tem:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = [v_s(t)], \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ v_R(t) \\ v_L(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Essa representação é útil para análise de sistemas de controle e simulação computacional.

APLICAÇÃO DO MODELO DINÂMICO

Nesta seção são apresentados exemplos de aplicação dos modelos dinâmicos desenvolvidos. Considera-se o circuito RLC série, descrito pela equação (38), e sua representação em espaço de estados, descritas pelas equações (40) e (41). Ambos os modelos possuem a mesma origem física e matemática, diferindo apenas na forma de representação.

Considera-se uma fonte de tensão senoidal $v_s(t) = V_m \sin(\omega t)$ com $V_m = 10$ V, $f = 60$ Hz ($\omega = 2\pi f$). Os parâmetros do circuito: $R = 1$ Ω , $L = 10$ mH, $C = 10$ μ F. As simulações foram realizadas com o método de Runge-Kutta, partindo de condições iniciais nulas.

A modelagem em espaço de estados é particularmente útil em conversores estáticos, como os conversores CC-CC (buck, boost, buck-boost) e inversores. Nesses dispositivos, a presença de chaves semicondutoras impõe uma dinâmica híbrida, com modos de operação distintos ao longo do período de chaveamento. Ao escolher as correntes nos indutores e as tensões nos capacitores como variáveis de estado, é possível obter modelos médios e modelos comutados, que servem de base para o projeto de controladores de corrente e tensão, além de análises de estabilidade e rendimento (Rashid, 2014).

Em sistemas de potência, a representação em espaço de estados é utilizada para estudar a estabilidade transitória e de pequenos sinais, considerando o acoplamento entre máquinas síncronas, excitatrizes, reguladores de velocidade e cargas dinâmicas. A linearização do sistema em torno de um ponto de operação resulta em uma matriz de estado cujos autovalores indicam a margem de estabilidade e os modos de oscilação do sistema (Kundur,

1994). Essa abordagem é extensivamente empregada em estudos de planejamento e operação de redes elétricas, especialmente na análise de contingências e na coordenação de sistemas de proteção.

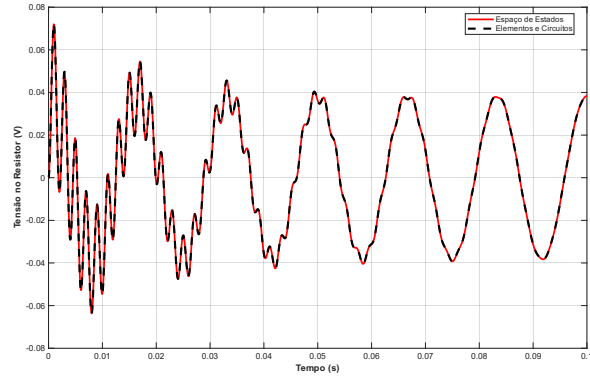


Figura 4: Tensão no resistor de 1 Ω .

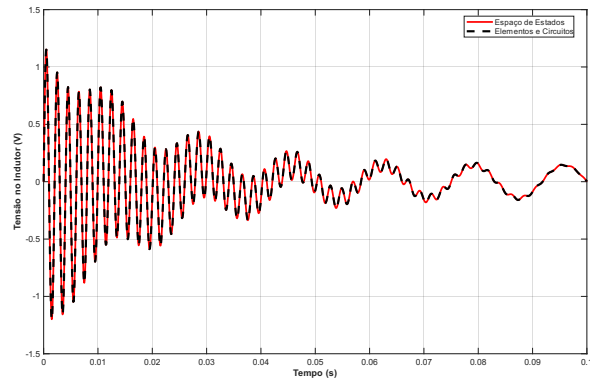


Figura 5: Tensão no indutor $L = 1 \times 10^{-2}$ H.

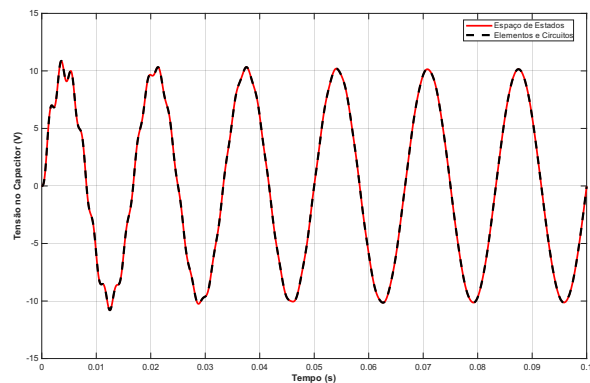


Figura 6: Tensão no capacitor $C = 1 \times 10^{-5}$ F.

As Figuras 4, 5 e 6 apresentam as tensões no resistor, indutor e capacitor, respectivamente. Em todos os casos, observa-se concordância entre os resultados obtidos por ambos modelos, validando o equacionamento proposto. A sobreposição das curvas confirma tal equivalência.

Além da análise offline, a modelagem em espaço de estados é amplamente empregada em simulações em tempo real, onde os modelos são executados em hardware dedicado (como dSPACE ou FPGA) para testar algoritmos de controle antes da implementação física. Essa prática, conhecida como "hardware-in-the-loop" (HIL), reduz custos e riscos, permitindo a validação de controladores em condições operacionais próximas da realidade (Matar; Karimi, 2021). Os exemplos apresentados neste trabalho, embora simples, ilustram a base sobre a qual essas aplicações mais avançadas são construídas.

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma abordagem sistemática para a modelagem dinâmica de circuitos elétricos lineares a partir das relações constitutivas dos elementos resistivo, indutivo e capacitivo e das Leis de Kirchhoff. Foram deduzidas detalhadamente as equações diferenciais e integrais para indutores e capacitores, destacando a origem física e as condições iniciais.

A representação em espaço de estados foi desenvolvida com rigor, incluindo a definição das variáveis de estado, obtenção das matrizes **A**, **B**, **C**, **D**, solução analítica via matriz exponencial e discretização para simulação computacional. Foram apresentados os modelos em espaço de estados para os circuitos de primeira ordem *RL* e *RC*, bem como para o circuito de segunda ordem *RLC* série, sempre na forma matricial compacta.

Os exemplos de simulação do circuito *RLC* série com fonte senoidal evidenciaram a consistência da modelagem, com perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo modelo em espaço de estados e pela solução direta da equação diferencial de segunda ordem, confirmando a validade e equivalência das abordagens.

A formulação em espaço de estados mostrou-se vantajosa para implementação computacional em ferramentas como MATLAB/Simulink, constituindo ponto de partida para extensões futuras: circuitos de maior complexidade, elementos não lineares, sistemas de potência e análise de controle. Sua capacidade de ser facilmente adaptada a diferentes topologias e de fornecer informações sobre a dinâmica interna do sistema torna-a uma ferramenta indispensável tanto para a análise quanto para o projeto de sistemas elétricos modernos.

A crescente demanda por sistemas mais eficientes e confiáveis, aliada à digitalização e à automação, aponta para a necessidade de modelos dinâmicos cada vez mais precisos e computacionalmente eficientes. Nesse contexto, a integração da modelagem em espaço de estados com técnicas de inteligência artificial, como redes neurais e aprendizado por reforço, abre novas fronteiras para o controle preditivo e a otimização de sistemas elétricos em tempo real. Espera-se que os conceitos desenvolvi-

dos neste trabalho sirvam de base para a compreensão e o avanço dessas tecnologias emergentes.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentals of Electric Circuits**. 6. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2016.
- ANTSAKLIS, P. J.; MICHEL, A. N. **A Linear Systems Primer**. Boston: Birkhäuser, 2007.
- BOYLESTAD, R. L. **Introductory Circuit Analysis**. 13. ed. London: Pearson, 2015.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 10. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.
- CHEN, C. T. **Linear System Theory and Design**. 4. ed. New York: Oxford University Press, 2013.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. 13. ed. London: Pearson, 2016.
- ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIĆ, D. **Fundamentals of Power Electronics**. 2. ed. New York: Springer, 2001.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 7. ed. London: Pearson, 2015.
- KAILATH, T. **Linear Systems**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980.
- KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. New York: McGraw-Hill, 1994.
- KUNDERT, K. S. **The Designer's Guide to SPICE and Spectre**. Boston: Kluwer Academic, 2006.
- MATAR, M.; KARIMI, H. Real-time simulation of electrical systems: challenges and solutions. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 68, n. 7, p. 5678-5688, 2021.
- NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Electric Circuits**. 11. ed. London: Pearson, 2019.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010.
- RASHID, M. H. **Power Electronics: Circuits, Devices and Applications**. 4. ed. London: Pearson, 2014.
- RISTER, L. C.; KUROKAWA, S. Dynamic modeling of transmission lines using state-space representation. **Electric Power Systems Research**, v. 210, p. 108-115, 2022. doi: 10.1016/j.epsr.2022.108115.