



UM CONVITE À GEOMETRIA LORENTZIANA

Rodrigo Silva dos Santos¹, Marcus Levy Cerqueira Barbosa Santos²

¹*Instituto de Humanidades, Artes e Ciências do Campus Jorge Amado da Universidade Federal do Sul da Bahia, Itabuna, Brasil (rodrigo.silva@ufsb.edu.br)*

²*Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil*

Resumo: Este trabalho apresenta uma abordagem direta sobre a Geometria Diferencial de curvas e superfícies no espaço Lorentziano. O foco principal é destacar as diferenças marcantes que esses objetos apresentam quando comparados ao contexto Euclidiano.

Palavras-chave: Ambiente Euclidiano; Ambiente Lorentziano; Espaço de Lorentz-Minkowski; Causalidade; Curvas e Superfícies.

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial clássica utiliza ferramentas de cálculo diferencial e integral para analisar as características geométricas de curvas, superfícies e das chamadas variedades diferenciáveis. De forma geral, o foco da geometria diferencial tradicional são os aspectos locais de curvas e superfícies. (Carmo, 2012).

Por outro lado, a Geometria Diferencial Lorentziana, além do apelo geométrico e analítico, tem uma forte ligação com a Física moderna. Ela serve como base matemática para a Teoria da Relatividade Geral.

No texto que se segue, nosso principal objetivo é mostrar ao leitor, de maneira direta, as diferenças entre as propriedades desses objetos. Vamos dar atenção especial às superfícies e à causalidade oriunda do ambiente Lorentziano.

Também queremos destacar a excelente obra de (Lymberopoulos e Couto, 2018). Usamos o livro deles como o principal guia para nossas pesquisas e o indicamos para quem deseja se aprofundar no assunto. A maior parte das ilustrações na presente exposição foi tirada de lá.

MATERIAL E MÉTODOS

Para construir este trabalho, realizamos leituras e debates com base nos materiais bibliográficos listados, destacando a obra de (Lymberopoulos e Couto, 2018).

No início, nos dedicamos ao estudo minucioso de curvas e superfícies no espaço Euclidiano. Essa etapa foi essencial para firmar a base teórica necessária para o passo seguinte.

Na fase posterior da pesquisa, investigamos as características e o comportamento desses mesmos elementos, mas sob a perspectiva do espaço Lorentziano. Isso nos permitiu comparar e apontar as diferenças e os resultados específicos que surgem quando curvas e superfícies são analisadas nesse contexto físico-matemático.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O espaço de Lorentz-Minkowski, denotado por $\mathbb{R}_1^3 \doteq \mathbb{L}^3$, é o $\mathbb{R}^3$ com suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar, munido de uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\langle x, y \rangle_L \doteq x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \quad (1)$$

É habitual na literatura $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ ser definida com o sinal negativo na primeira parcela, correspondendo a uma simples troca de eixos. Além disso, denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ o produto interno Euclidiano e Lorentziano (ou métrica de Minkowski), respectivamente.

A norma Lorentziana é a aplicação $\| \cdot \|_L : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|v\|_L \doteq \sqrt{|\langle v, v \rangle_L|}$. Dizemos que v é unitário se $\|v\|_L = 1$.

Veja que há um abuso de linguagem ao chamarmos essa aplicação de norma, visto que $\|v\|_L$ não é de fato uma norma. Nota-se que há a existência de vetores

não-nulos tais que a norma Lorentziana é zero e a desigualdade triangular não é satisfeita, como por exemplo:

$$\|(1, 0, -1)\|_L = 0 \quad \text{e}$$

$$\|(1, 1, -2)\|_L = \sqrt{2} \geq 0 = \|(1, 0, -1)\|_L + \|(0, 1, -1)\|_L$$

Apesar dos contrastes, a norma Lorentziana ainda satisfaz $\|\lambda v\|_L = |\lambda| \|v\|_L, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Doravante, podemos dar a um vetor um caráter ou tipo causal. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{L}^3$ é de:

- (i) tipo espaço, se $\langle v, v \rangle_L > 0$, ou $v = \vec{0}$;
- (ii) tipo tempo, se $\langle v, v \rangle_L < 0$;
- (iii) tipo luz, se $\langle v, v \rangle_L = 0$, mas $v \neq \vec{0}$.

Se $v \neq \vec{0}$ não é um vetor de tipo luz, definimos o indicador de v por $\epsilon_v = 1$ se v for de tipo espaço ou $\epsilon_v = -1$ caso v seja de tipo tempo, como sendo o sinal de $\langle v, v \rangle_L$.

Alterar o sinal de qualquer coordenada de um vetor não irá alterar o seu caráter causal. Além do mais, v e λv possuem o mesmo caráter causal, $\forall v \in \mathbb{L}^3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por exemplo:

- (1) $(4, -1, 0)$ é tipo espaço;
- (2) $(1, 2, 3)$ é tipo tempo;
- (3) $(3, 4, 5)$ é tipo luz.

De posse destes conceitos podemos apresentar a definição de curvas parametrizadas no ambiente Lorentziano.

Uma curva parametrizada é uma aplicação suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$. A imagem $\alpha(I)$ é dita o traço de α . Para cada $t \in I$, a derivada $\alpha'(t)$ é chamada de vetor tangente ou velocidade de α em t .

O termo “suave” é utilizado como sinônimo de “infinitamente derivável” ou “de classe C^∞ ”.

Motivados a estender a noção de causalidade para curvas em $\mathbb{L}^3$, temos a seguinte identificação:

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva e $t_0 \in I$ um parâmetro fixado. Dizemos que α é de:

- (i) tipo espaço em t_0 , se $\alpha'(t_0)$ for um vetor de tipo espaço;
- (ii) tipo tempo em t_0 , se $\alpha'(t_0)$ for um vetor de tipo tempo;

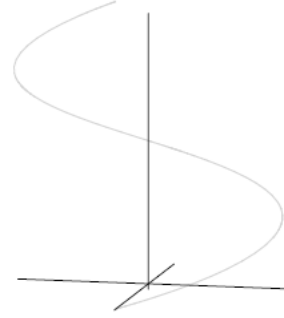


Figura 1: Uma hélice Euclideana de tipo luz no $\mathbb{L}^3$.
Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

- (iii) tipo luz em t_0 , se $\alpha'(t_0)$ for um vetor de tipo luz.

Caso $\alpha'(t), \forall t \in I$, possuir o mesmo tipo causal, atribuímos este tipo causal à curva α em si. De forma análoga para o caso de vetores, se α não for uma curva de tipo luz, podemos definir o indicador de α como $\epsilon_\alpha \doteq \epsilon_{\alpha'(t)}$.

Se α é de tipo espaço ou tempo em t_0 , então α também possui o mesmo tipo causal para todo t em algum intervalo aberto em torno de t_0 . Informalmente, o tipo causal de uma curva não dá saltos entre espaço e tempo.

Exemplos:

- (1) *Pontos*: seja $p \in \mathbb{L}^3$ e considere $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = p$. Então, $\alpha'(t) = 0, \forall t \in I$. Portanto, α é de tipo espaço.
- (2) *Retas*: a reta que passa por $p \in \mathbb{L}^3$ com direção $v \in \mathbb{L}^3$ pode ser parametrizada por $\alpha(t) = p + tv$, com $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\alpha'(t) = v$, e α tem o mesmo caráter causal de v .
- (3) *Hipérbole*: uma hipérbole com centro $p \in \mathbb{L}^3$ e raio $r > 0$. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = p + (0, r \cosh t, r \sinh t)$. Temos que $\alpha'(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$, e assim $\langle \alpha'(t) \alpha'(t) \rangle_L = -r^2 < 0$, donde α é tipo tempo.
- (4) *Hélice Euclideana*: considere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$, dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, onde $a, b > 0$. Vamos analisar o caráter causal de hélice em função de a e b .

Temos $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, e então $\langle \alpha'(t) \alpha'(t) \rangle_L = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Logo, concluímos que α é de:

- tipo espaço se $a > b$;
- tipo tempo se $a < b$;

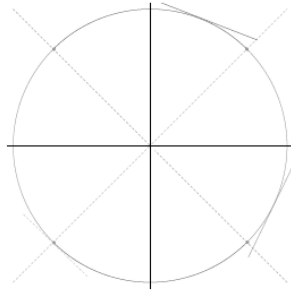


Figura 2: O círculo Euclidiano unitário dentro de $\mathbb{L}^2$.
Fonte: (Lymeropoulos e Couto, 2018).

– tipo luz se $a = b$.

(5) Círculo Euclidiano: considere $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$, dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Geometricamente vemos que α é de:

- tipo espaço para $t \in (\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi)$;
- tipo tempo para $t \in (-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$;
- tipo luz para $t = \pi/4 + k\pi/2$.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Dizemos que α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Se existe $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) = 0$ diremos que t_0 é um ponto singular desta parametrização.

Para o estudo local das curvas é necessário a existência de uma reta tangente à curva em cada ponto do seu traço, ou seja, é suficiente que o vetor tangente à curva seja não-nulo para todo parâmetro. Por conta disso, iremos considerar apenas as curvas que satisfazem a condição de regularidade (Tenenblat, 2008).

O comprimento de arco de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ entre $a, b \in I$ é definido por

$$L_a^b[\alpha] \doteq \int_a^b \|\alpha'(t)\|_L dt \quad (2)$$

Caso α seja de tipo tempo em $\mathbb{L}^3$, dizemos que α é *futuro-dirigida* ou *passado-dirigida* conforme os vetores velocidade $\alpha'(t)$ o forem. Um vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ de tipo tempo é futuro-dirigido (passado-dirigido) se $v_3 > 0$ ($v_3 < 0$).

Quando α é de tipo tempo e futuro-dirigida em $\mathbb{L}^3$, seu comprimento de arco é chamado tempo próprio e denotado por $t_a^b[\alpha]$.

O tempo próprio de uma curva parametrizada de tipo tempo e futuro-dirigida é interpretado como o tempo medido pelo relógio carregado por um observador que

percorre a trajetória descrita pela curva.

Vejamos o comprimento de uma mesma curva quando tratada nos ambientes Euclidiano e Lorentziano.

Considere $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Assim,

$$L_0^{2\pi}[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

Agora considere $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada pela mesma expressão acima. No ambiente Lorentziano o seu comprimento vale:

$$L_0^{2\pi}[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 - b^2}$$

Suponha agora uma curva $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$. Então,

$$L_0^1[\beta] = \int_0^1 e^{-t} \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

De maneira análoga à curva anterior, considere agora $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada pela mesma expressão acima. Então temos:

$$L_0^1[\beta] = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}$$

Duas curvas distintas podem possuir o mesmo traço. Movidos a isso, temos a seguinte definição:

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Uma *reparametrização* de α é uma curva parametrizada da forma $\beta = \alpha \circ h$, onde $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo entre os intervalos abertos J e I . A função h é chamada *mudança de parâmetro*. Além disso, se α é regular e não é de tipo luz, então α admite uma reparametrização com velocidade unitária. Mais precisamente, existe um intervalo aberto J e um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ tal que $\tilde{\alpha} \doteq \alpha \circ h$ tem velocidade unitária.

Objetos intrínsecos ao traço da curva são de grande interesse para a Geometria Diferencial. Como consequência, note que o comprimento de uma curva parametrizada é invariante por reparametrização, visto que estamos falando do mesmo traço.

Para cada ponto de uma curva podemos associar uma base ortonormal e positiva, onde o traço desta curva no espaço está diretamente relacionado à maneira como essa base varia ao longo da curva. Essa base é chamada de *referencial de Frenet-Serret*.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Diremos que α é *admissível* se:

- (i) α é bi-regular, ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente independente para todo $t \in I$.
- (ii) Ambos $\alpha'(t)$ e $\text{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ não são de tipo luz, qualquer que seja $t \in I$.

Além disso, se α possui velocidade unitária, o vetor tangente à α em s é $T_\alpha(s) \doteq \alpha'(s)$. A *curvatura* de α em s é $k_\alpha(s) \doteq \|T'_\alpha(s)\|$.

Visto que $k_\alpha(s) > 0$, $\forall s \in I$, o vetor unitário que aponta na mesma direção de $T'_\alpha(s)$ é chamado de vetor *normal* a α e é dado pela relação $T'_\alpha(s) = k_\alpha(s)N_\alpha(s)$. Nestas condições, o *co-indicador* de α é definido por $\eta_\alpha \doteq \epsilon_{N_\alpha(s)}$.

Para curvas no espaço, podemos representar o vetor *binormal* na forma $B_\alpha(s) \doteq -\epsilon_\alpha \eta_\alpha T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)$.

A *torção* de α em s , denotada por $\tau_\alpha(s)$, é a componente de $N'_\alpha(s)$ na direção de $B_\alpha(s)$.

Considerando as condições onde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ é uma curva admissível e com velocidade unitária, vale que

$$\begin{pmatrix} T'_\alpha(s) \\ N'_\alpha(s) \\ B'_\alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha(s) & 0 \\ -\epsilon_\alpha \eta_\alpha k_\alpha(s) & 0 & \tau_\alpha(s) \\ 0 & \epsilon_\alpha \tau_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_\alpha(s) \\ N_\alpha(s) \\ B_\alpha(s) \end{pmatrix}$$

Introduzindo alguns conceitos sobre curvas no ambiente Lorentziano, voltaremos a nossa atenção para às superfícies, objetos de maior interesse dos nossos estudos.

Uma *superfície regular* em $\mathbb{L}^3$ é um subconjunto $M \subseteq \mathbb{L}^3$ tal que para todo ponto $p \in M$ existem abertos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $p \in V \subseteq M$, além de uma aplicação $x : U \rightarrow V$ tais que:

- (i) x é suave;
- (ii) x é um homeomorfismo;
- (iii) $Dx(u, v)$ tem posto máximo para todo $(u, v) \in U$.

Nestas condições, dizemos que, em torno de p , x é uma parametrização de M , (u, v) são coordenadas locais e $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ é uma carta.

Além disso, $x : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ é dita uma superfície parametrizada regular se $Dx(u, v)$ tiver posto máximo para todo $(u, v) \in U$.

Uma superfície parametrizada regular não precisa ser necessariamente injetora, de modo que sua imagem no espaço pode admitir auto-interseções.

Exemplos:

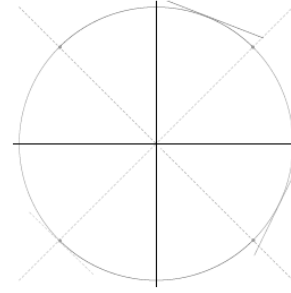


Figura 3: Ilustração da definição acima. Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

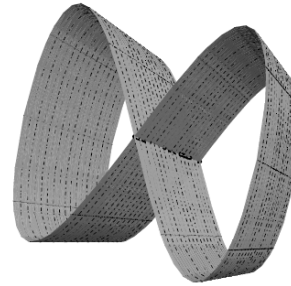


Figura 4: Uma parametrização regular com auto-interseção. Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

- (1) Planos: sejam $p, w_1, w_2 \in \mathbb{L}^3$ tais que $\{w_1, w_2\}$ seja linearmente independente. Então, $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $x(u, v) = p + uw_1 + vw_2$ é uma superfície parametrizada regular e injetora. Assim, o plano Π passando por p gerado por w_1 e w_2 é uma superfície regular. Como todo plano no espaço é desta forma para uma certa escolha de p, w_1 e w_2 nestas condições, vemos que todos os planos são superfícies regulares.
- (2) Gráficos: se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então o seu gráfico $gr(f) \doteq \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{L}^3 \mid (u, v) \in U\}$ é uma superfície regular. Com efeito, a aplicação $x : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular e injetora cuja imagem é precisamente $gr(f)$. Uma parametrização x desta forma é chamada uma *parametrização de Monge*.
- (3) O helicóide: considere uma hélice circular reta cujo eixo seja o eixo z , e ligue seus pontos ao eixo z , por retas horizontais. Uma parametrização possível para o conjunto obtido é $x : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$, definida por $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Claramente, x é suave e temos que:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 0)$$

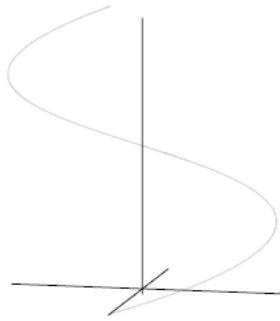


Figura 5: O helicoid. Fonte: commons.wikimedia.org/wiki/File:Helicoide.png

e

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

donde x é uma superfície parametrizada regular. Além disto, note que x é injetora, donde o helicóide $x((0, 1) \times \mathbb{R})$ é uma superfície regular.

Sejam M uma superfície regular e um ponto $p \in M$. O plano tangente à M em p é definido por

$$T_p M \doteq Dx(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2) \quad (3)$$

ou seja,

$$T_p M = \text{span} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$$

onde $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ é qualquer parametrização de M em torno de p tal que $x(u_0, v_0) = p$.

Superfícies parametrizadas regulares podem, em geral, ter auto-interseções e, em tais pontos, o plano tangente (como acima) não está bem definido. Se $p = x(u_0, v_0) = x(u_1, v_1)$ não podemos garantir que $Dx(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2) = Dx(u_1, v_1)(\mathbb{R}^2)$. Neste caso definimos o plano tangente à parametrização x em (u_0, v_0) como $T_{(u_0, v_0)} x \doteq Dx(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2)$.

A noção de caráter causal vista até então para vetores e curvas pode ser generalizada para superfícies. Motivados a isso temos que:

Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular e uma parametrização $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ tal que $x(u_0, v_0) = p \in M$. Então:

- (i) $T_p M$ é de tipo espaço se e somente se $x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0)$ é de tipo tempo;
- (ii) $T_p M$ é de tipo tempo se e somente se $x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0)$ é de tipo espaço;

- (iii) $T_p M$ é de tipo luz se e somente se $x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0)$ é de tipo luz.

Seja $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular, dizemos que:

- (i) M é de tipo espaço, se para todo $p \in M$, $T_p M$ for um plano de tipo espaço;
- (ii) M é de tipo tempo, se para todo $p \in M$, $T_p M$ for um plano de tipo tempo;
- (iii) M é de tipo luz, se para todo $p \in M$, $T_p M$ for um plano de tipo luz.

Se M não possuir nenhum ponto p para o qual $T_p M$ é de tipo luz, diremos apenas que M é não-degenerada. Ainda mais, se $x : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ for uma superfície parametrizada regular e injetora, abusaremos da nomenclatura e atribuiremos o tipo causal da superfície regular $x(U)$ à própria aplicação x . Caso x não seja injetora, pode-se definir o tipo causal de x de modo análogo ao feito acima, considerando os planos tangente à própria x , $T_{(u,v)} x$.

Seja $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular não-degenerada e $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ uma parametrização de M . Os indicadores parciais de x são definidos como os indicadores das derivadas parciais de $x : \epsilon_u \doteq \epsilon_{x_u(u,v)}$ e $\epsilon_v \doteq \epsilon_{x_v(u,v)}$. Caso alguma das derivadas seja de tipo luz, assumiremos o valor 0.

Seja $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular. Então:

- (i) Se M é de tipo espaço ou luz, então M é localmente o gráfico de uma função suave cujo domínio é um subconjunto do plano $z = 0$;
- (ii) Se M é de tipo tempo, então M é localmente o gráfico de uma função suave cujo domínio é um subconjunto do plano $x = 0$ ou do plano $y = 0$.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{L}^3$ um aberto de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $q \in \mathbb{L}^3$ é *regular* se $Df(q)$ é sobrejetora ($Df(q) \neq \vec{0}$), e *crítico* se $Df(q)$ não o for. Além disto, um número $a \in \mathbb{R}$ diz-se um *valor regular* se $f^{-1}(\{a\})$ é não-vazio e consiste apenas de pontos regulares. Além disso, se a é um valor regular de f , então $f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície regular em $\mathbb{L}^3$.

O próximo resultado nos permite determinar o tipo causal de algumas superfícies sem apelar para parametrizações:

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{L}^3$ um aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular para f . Se $M = f^{-1}(\{a\})$, então:



- (i) M é de tipo espaço se, e somente se, $\nabla f(p)$ é sempre de tipo tempo;
- (ii) M é de tipo tempo se, e somente se, $\nabla f(p)$ é sempre de tipo espaço;
- (iii) M é de tipo luz se, e somente se, $\nabla f(p)$ é sempre de tipo luz.

Exemplo: (Tipo causal das esferas em $\mathbb{L}^3$) Se $P \in \mathbb{L}^3$ e $r > 0$ são fixados e $f : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(q) = \langle q - p, q - p \rangle_L$, então temos $Df(q) = 2\langle q - p \rangle_L$. Isto nos diz que $\nabla_L f(q) = 2(q - p)$ e assim, se $q \in \mathbb{S}_1^2(p, r)$, então

$$\langle \nabla_L f(q), \nabla_L f(q) \rangle_L = 4r^2 > 0,$$

E assim, concluímos que $\mathbb{S}_1^2(p, r)$ é uma superfície de tipo tempo. Do mesmo modo, se $q \in \mathbb{H}_\pm^2(p, r)$, temos

$$\langle \nabla_L f(q), \nabla_L f(q) \rangle_L = -4r^2 < 0,$$

donde $\mathbb{H}_\pm^2(p, r)$ é uma superfície de tipo espaço.

Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular e $p \in M$. A Primeira Forma Fundamental de M em p é a aplicação bilinear $I_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(v, w) \doteq \langle v, w \rangle \quad (4)$$

também chamada, em $\mathbb{L}^3$, de Primeira Forma Fundamental de Minkowski.

A Primeira Forma Fundamental nos permite fazer medidas sobre a superfície (comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões) sem fazer menção ao espaço ambiente onde está a superfície.

Considere agora uma parametrização $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ onde M é uma superfície regular. As componentes da Primeira Forma Fundamental em relação a x são definidas por

$$E(u, v) \doteq I_{x(u, v)} \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right), \quad (5)$$

$$F(u, v) \doteq I_{x(u, v)} \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right), \quad (6)$$

$$G(u, v) \doteq I_{x(u, v)} \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right), \quad (7)$$

onde representamos por $g_{11} \doteq E$, $g_{12} = g_{21} \doteq F$ e $g_{22} \doteq G$ como sendo as entradas da matriz $(g_{ij}(u, v))_{1 \leq i, j \leq 2}$ da Primeira Forma Fundamental $I_{x(u, v)}$ na base de $T_p M$ associada à parametrização x , $\mathcal{B}_x \doteq \{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)\}$.

Outro modo de representar a Primeira Forma Fundamental é em coordenadas, usando a notação diferencial:

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \quad (8)$$

Se $x : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ é uma superfície parametrizada regular, então o tipo causal de x pode ser determinado pelo determinante da sua matriz da Primeira Forma Fundamental:

- (i) x é de tipo espaço se, e somente se, $\det(g_{ij}(u, v))_{1 \leq i, j \leq 2} > 0$;
- (ii) x é de tipo tempo se, e somente se, $\det(g_{ij}(u, v))_{1 \leq i, j \leq 2} < 0$;
- (iii) x é de tipo luz se, e somente se, $\det(g_{ij}(u, v))_{1 \leq i, j \leq 2} = 0$.

Exemplos (Conceitos Intrínsecos): Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular, $p \in M$, $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ uma parametrização de M e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva em M .

- (1) Se M é de tipo espaço, o ângulo entre dois vetores $u, v \in T_p M \setminus \{0\}$ é o número θ determinado pela relação

$$\cos \theta = \frac{I_p(u, v)}{\sqrt{I_p(u)}\sqrt{I_p(v)}} \quad (9)$$

- (2) Se M é de tipo tempo em $\mathbb{L}^3$, o ângulo hiperbólico entre dois vetores $u, v \in T_p M$ de tipo tempo, ambos futuro-dirigidos ou passado-dirigidos, é o número φ determinado pela relação

$$\cos \varphi = -\frac{I_p(u, v)}{\sqrt{-I_p(u)}\sqrt{-I_p(v)}} \quad (10)$$

- (3) O comprimento de arco de α fica expresso apenas como

$$L[\alpha] = \int_I \sqrt{|I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))|} dt \quad (11)$$

Vejamos alguns exemplos da Primeira Forma Fundamental vista nas superfícies:

- (1) Planos: todo plano é imagem de alguma superfície parametrizada regular (e injetora) da forma $x(u, v) = p + uw_1 + vw_2$, onde $p, w_1, w_2 \in \mathbb{L}^3$ são dados e $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Se o plano não é de tipo luz, não há perda de generalidade em assumir w_1 e w_2 ortogonais e unitários. Observe que $\epsilon_u = \epsilon_{w_1}$ e $\epsilon_v = \epsilon_{w_2}$. Deste modo, temos que a Primeira Forma Fundamental do plano nestas coordenadas é dada por $ds^2 = \epsilon_{w_1} du^2 + \epsilon_{w_2} dv^2$.

No caso em que o plano é de tipo luz, se w_1 é unitário e w_2 é de tipo luz, tem-se apenas $ds^2 = du^2$.

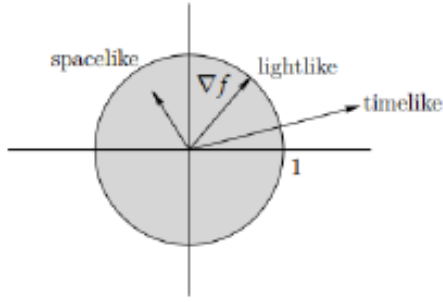


Figura 6: Ilustrando o critério de classificação para gráficos sobre o plano $z = 0$. Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

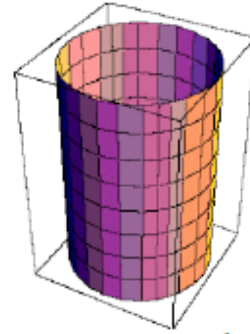


Figura 7: O cilindro $S^1(r) \times \mathbb{R}$ Fonte: Geometria Analítica: Superfícies quádricas (matematica-ga.blogspot.com).

- (2) Gráficos : Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, vimos que a parametrização de Monge $x : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular e injetora, de modo que $gr(f) = x(U)$ é uma superfície regular. Temos em $\mathbb{L}^3$ que

$$(g_{ij,L})_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 - f_u^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1 - f_v^2 \end{pmatrix}$$

e assim $\det((g_{ij,L})_{1 \leq i,j \leq 2}) = 1 - \|\nabla f\|_E^2$, onde essa norma Euclideana é tomada em $\mathbb{R}^2$, claramente. Assim, concluímos que:

- $gr(f)$ é de tipo espaço se, e só se, $\|\nabla f\|_E^2 < 1$;
- $gr(f)$ é de tipo tempo se, e só se, $\|\nabla f\|_E^2 > 1$;
- $gr(f)$ é de tipo luz se, e só se, $\|\nabla f\|_E^2 = 1$.

- (3) O cilindro de raio $r > 0$

$$S^1(r) \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Pode ser parametrizado pela aplicação $x : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, cuja imagem exclui apenas um meridiano. Sua Primeira Forma Fundamental é dada por $ds^2 = r^2 du^2 - dv^2$. Vê-se que o cilindro é de tipo espaço em $\mathbb{R}^3$ e de tipo tempo em $\mathbb{L}^3$.

Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ superfícies regulares.

- (i) Um difeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ é dito ser uma *isometria* se dados $p \in M_1$ e $v_1, v_2 \in T_p M_1$, vale que

$$I_p(v_1, v_2) = I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2)) \quad (12)$$

- (ii) Uma aplicação suave $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ é dita ser uma *isometria local* se para todo $p \in M_1$ existe U aberto de M_1 contendo p tal que a restrição $\phi|_U : U \rightarrow \phi(U)$ seja uma isometria.

- (iii) Diremos que M_1 e M_2 são *isométricas* (resp. *localmente isométricas*) se existir uma isometria (resp. isometria local) entre M_1 e M_2 .

Uma *transformação de Poincaré* em $\mathbb{L}^3$ é uma aplicação $F : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ tal que

$$\langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_L = \langle x - y, x - y \rangle_L \quad (13)$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{L}^3$. O conjunto de todas as transformações de Poincaré em $\mathbb{L}^3$ é denotado por $E_1(3, \mathbb{R})$ ou por $P(3, \mathbb{R})$.

Uma transformação linear $\Lambda : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ é dita ser uma *transformação de Lorentz* se

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_L = \langle x, y \rangle_L \quad (14)$$

Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{L}^3$. O conjunto de todas as transformações de Lorentz em $\mathbb{L}^3$ é denotado por $O_1(3, \mathbb{R})$.

Além disso, existem e são únicos $a \in \mathbb{L}^3$ e $\Lambda \in O_1(3, \mathbb{R})$ tais que $F = T_a \circ \Lambda$, onde T_a é uma translação no ponto a .

Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ superfícies regulares e uma isometria local $\phi : M_1 \rightarrow M_2$. Se $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M_1$ é uma parametrização de M_1 e $\phi \circ x : U \rightarrow \phi(x(U)) \subseteq M_2$ é a correspondente parametrização de M_2 , vale que

$$g_{ij}(u, v) = \tilde{g}_{ij}(u, v)$$

para todos os $(u, v) \in U$ e $1 \leq i, j \leq 2$, onde os $\tilde{g}_{ij}$ denotam os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de M_2 na parametrização $\phi \circ x$. Ou seja:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \tilde{E}(u, v); \\ F(u, v) &= \tilde{F}(u, v); \\ G(u, v) &= \tilde{G}(u, v). \end{aligned}$$

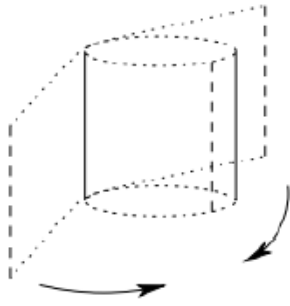


Figura 8: Isometria local entre o plano e o cilindro. Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

Consequentemente: isometrias preservam comprimentos e áreas:

Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ superfícies regulares e uma isometria $\phi : M_1 \rightarrow M_2$. Valem:

- (i) se $\alpha : I \rightarrow M_1$ é uma curva em M_1 , então $\phi \circ \alpha$ é uma curva em M_2 de mesmo tipo causal que α , satisfazendo $L[\alpha] = L[\phi \circ \alpha]$;
- (ii) se R é um aberto de M_1 com $\bar{R}$ compacto, então $A(R) = A(\phi(R))$.

Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ duas superfícies regulares não-degeneradas, e $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação suave. Se $d\phi_p$ preserva Primeira Forma Fundamental para todo $p \in M_1$, então ϕ é uma isometria local.

Exemplos:

- (1) O plano $\mathbb{R}^2$ é localmente isométrico ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ visto em $\mathbb{R}^3$. A isometria local é $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por $F(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$. Considerando a identidade como parametrização de $\mathbb{R}^2$ e a parametrização de revolução usual do cilindro $\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\cos \tilde{v}, \sin \tilde{v}, \tilde{u})$, vemos que a expressão local de F é precisamente a identidade (de fato, vale que $F(id_{\mathbb{R}^2}(u, v)) = \tilde{x}(u, v)$), cuja derivada é não-singular e, portanto, F é um difeomorfismo local (mas não global, pois não é injetor). Que F é uma isometria local segue do fato que a Primeira Forma Fundamental da parametrização do cilindro é $d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2 = du^2 + dv^2$.
- (2) A superfície de revolução tendo como geratriz a catenária $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é chamada catenóide, que pode ser parametrizada (excluindo-se um meridiano) por $x : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $x(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$, cuja Primeira Forma Fundamental é $\cosh^2 u (du^2 + dv^2)$. Considere novamente o helicóide, desta vez com a parametrização $\tilde{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{x}((0, 2\pi) \times \mathbb{R}) \subseteq$

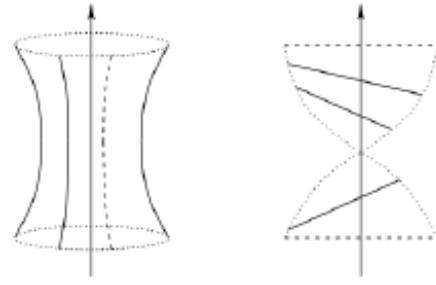


Figura 9: Isometria entre partes do catenóide e do helicóide. Fonte: (Lymberopoulos e Couto, 2018).

$\mathbb{R}^3$, dada por $\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, \tilde{u})$, com a Primeira Forma Fundamental $(1 + \tilde{v}^2)d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$.

Defina $F : x(\mathbb{R} \times (0, 2\pi)) \rightarrow \tilde{x}((0, 2\pi) \times \mathbb{R})$ por $F(x(u, v)) = \tilde{x}(v, \sinh u)$. Vejamos que F é uma isometria. Com efeito, a aplicação

$$\mathbb{R} \times (0, 2\pi) \ni (u, v) \rightarrow (v, \sinh u) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

é um difeomorfismo e, portanto, F também o é. Para verificar que F preserva a Primeira Forma Fundamental, chame $\tilde{u} = v$ e $\tilde{v} = \sinh u$, de modo que $d\tilde{u} = dv$ e $d\tilde{v} = du$. Portanto,

$$\begin{aligned} (1 + \tilde{v}^2)d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2 &= (1 + \sinh^2 u)dv^2 + \cosh^2 u du^2 \\ &= \cosh^2 u (du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

Veja que F leva, respectivamente, os meridianos e paralelos do catenóide nas retas e hélices do helicóide.

Seja $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular e não-degenerada. Uma *aplicação (normal) de Gauss* para M é um campo suave $N : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ de vetores unitários e normais à M , ou seja, $N(p) \in (T_p M)^\perp$, para todo $p \in M$.

Denotaremos por ϵ_M o indicador da direção normal à M , ou seja, $\epsilon_M = 1$ se M for de tipo tempo, e $\epsilon_M = -1$ se M for de tipo espaço.

O contradomínio da aplicação de Gauss é estabelecido assim:

- se $M \subseteq \mathbb{R}^3$, temos $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$;
- se $M \subseteq \mathbb{L}^3$ é de tipo espaço, temos $N : M \rightarrow \mathbb{H}_\pm^2$;
- se $M \subseteq \mathbb{L}^3$ é de tipo tempo, temos $N : M \rightarrow \mathbb{S}_1^1$.

Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular não-degenerada, e N uma aplicação de Gauss para M . O *mapa de Weingarten* (também conhecido como operador forma) de M em p é a diferencial

$$-dN_p : T_p M \rightarrow T_p M.$$



Nas mesmas condições, para cada $p \in M$, o mapa de Weingarten $-dN_p$ é auto-adjunto em relação à Primeira Forma Fundamental I_p .

Se o mapa de Weingarten $-dN_p$ for diagonalizável, os seus dois autovalores $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são chamados as *curvaturas principais* de M em p . Os autovetores (ortogonais) associados são chamados as *direções principais* de M em p .

Se M for uma superfície de tipo espaço, então a Primeira Forma Fundamental é positiva-definida, e portanto $-dN_p$ é diagonalizável, pelo Teorema Espectral Real. Se M for de tipo tempo, não temos mais a garantia de que isto ocorre.

A forma quadrática II_p , definida em T_pM por

$$II_p(v) \doteq -\langle dN_p(v), v \rangle \quad (15)$$

é chamada a *Segunda Forma Fundamental* de M em p . Em $\mathbb{L}^3$, II_p também é chamada a Segunda Forma Fundamental de Minkowski de M em p .

Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular, N uma aplicação de Gauss para M , e $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ uma parametrização de M . De maneira análoga à Primeira Forma Fundamental, as componentes da Segunda Forma Fundamental em relação à M são definidas por

$$e(u, v) \doteq \langle x_{uu}(u, v), N(x(u, v)) \rangle, \quad (16)$$

$$f(u, v) \doteq \langle x_{uv}(u, v), N(x(u, v)) \rangle \quad \text{e} \quad (17)$$

$$g(u, v) = \langle x_{vv}(u, v), N(x(u, v)) \rangle. \quad (18)$$

A matriz associada a II_p é a matriz $(h_{ij}(u, v))_{1 \leq i, j \leq 2}$ onde $h_{11} = e$, $h_{12} = h_{21} = f$ e $h_{22} = g$.

Sejam $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular não-degenerada, N uma aplicação de Gauss para M e $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ uma parametrização de M . Identificando os índices $u \leftrightarrow 1$ e $v \leftrightarrow 2$ e omitindo pontos de aplicação, vale que se $(h_j^i)_{1 \leq i, j \leq 2} \doteq [-dN]_{\mathcal{B}_x}$, então $h_j^i = \sum_{k=1}^2 g^{ik} h_{kj}$, ou seja:

$$[-dN]_{\mathcal{B}_x} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{bmatrix}$$

Considere $\tilde{II}_p(v, w) \doteq \langle II_p(v, w), N(p) \rangle$, podendo então definir o traço e o determinante de uma forma bilinear em relação ao produto escalar do ambiente. Isso motiva o seguinte resultado:

Seja $M \subseteq \mathbb{L}^3$ uma superfície regular não-degenerada, N uma aplicação de Gauss para M . Considere também $x : U \rightarrow x(U) \subseteq M$ uma parametrização de M compatível com N . O *vetor curvatura média* e a *curvatura Gaussiana* de M em p são definidos por:

$$\mathbf{H}(p) \doteq \frac{1}{2} \text{tr}_{I_p}(II_p) = \frac{1}{2}(\epsilon_{v_1} II_p(v_1) + \epsilon_{v_2} II_p(v_2)) \quad \text{e}$$

$$K(p) \doteq -\det \tilde{II}_p = -\det(\tilde{II}_p(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq 2}$$

onde $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal qualquer de T_pM . Além disso, a curvatura média de M em p é o número $H(p)$ determinado pela igualdade $\mathbf{H}(p) = H(p)N(p)$. Ademais, valem:

$$H \circ x = \frac{\epsilon_M}{2} \text{tr}(-dN) = \frac{\epsilon_M}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \quad \text{e}$$

$$K \circ x = \epsilon_M \det(-dN) = \epsilon_M \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Exemplos:

(1) Considere um plano $\Pi \subseteq \mathbb{L}^3$, não-degenerado, passando por um certo ponto $p_0 \in \mathbb{L}^3$ e tendo um vetor $n \in \mathbb{L}^3$ unitário como direção normal. Uma aplicação de Gauss neste caso é simplesmente $N : \Pi \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $N(p) = n$. Deste modo dN_p é o operador nulo para todo $p \in \Pi$, donde concluímos que $K = H \equiv 0$.

(2) Para as “esferas” $\mathbb{S}^2(r)$, $\mathbb{S}_1^2(r)$ e $\mathbb{H}^2(r)$ de raio $r > 0$, uma aplicação de Gauss é simplesmente N dada por $N(p) = p/r$. Diretamente, temos $dN_p(v) = v/r$, para todo vetor v tangente em p , e assim

$$-dN_p = -\frac{1}{r} id_{T_p \mathbb{S}^2(r)} \implies \det(-dN_p) = \frac{1}{r^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p) = -\frac{1}{r}$$

Portanto, ambos $\mathbb{S}^2(r)$ e $\mathbb{S}_1^2(r)$ possuem curvatura Gaussiana positiva e constante $1/r^2$, e curvatura média também constante, dada por $-1/r$. Já o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(r)$ possui curvatura Gaussiana negativa $-1/r^2$, e curvatura média igual a $1/r$.

(3) Considerando agora um cilindro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}$ de raio $r > 0$, e a projeção $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ nas duas primeiras coordenadas, vê-se que uma aplicação de Gauss é $N : \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$ dada por $N(p) = \pi(p)/r$. Segue disto que $dN_p(v) = \pi(v)/r$ para todo $v \in T_p(\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R})$, já que N é a composta da restrição de aplicações lineares. Fixado $p \in \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}$, pode-se considerar a base ortonormal de $T_p(\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R})$ formada pelo vetor u_1 tangente ao cilindro e horizontal (qualquer um dos dois vetores possíveis serve), e o vetor $u_2 = (0, 0, 1)$. Na base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$, vemos então que

$$[-dN_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou seja,}$$



$$K(p) = 0 \quad \text{e} \quad H(p) = -\frac{1}{2r}$$

independentemente do ambiente.

- (4) Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, e considere $x : U \rightarrow gr(f)$ a parametrização de Monge usual, $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Suponha que o gráfico de f seja não-degenerado. Denotando as curvaturas com índices de acordo com o ambiente, abreviando as derivadas parciais de f e omitindo os pontos de aplicação, temos no $\mathbb{R}^3$, que:

$$K_E \circ x = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} \quad \text{e}$$

$$H_E \circ x = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

Já no $\mathbb{L}^3$:

$$K_L \circ x = \frac{f_{uv}^2 - f_{uu}f_{vv}}{(-1 + f_u^2 + f_v^2)^2} \quad \text{e}$$

$$H_L \circ x = \frac{f_{uu}(-1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_{uv} + f_{vv}(-1 + f_u^2)}{2|-1 + f_u^2 + f_v^2|^{3/2}}$$

- (5) Suponha que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ seja uma curva suave, regular, não degenerada e injetora da forma $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, para certas funções f e g suaves tais que $f(u) > 0$ para todo $u \in I$. Deste modo, podemos considerar a superfície de revolução em torno do eixo z gerada por α que será não-degenerada. Parametrizando com $x : I \times (0, 2\pi) \rightarrow x(I \times (0, 2\pi)) \subseteq \mathbb{L}^3$ dada por $x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, como no exemplo anterior, temos, para o $\mathbb{R}^3$:

$$K_E \circ x = \frac{g'(-f''g' + f'g'')}{f \langle \alpha', \alpha' \rangle_E^2} \quad \text{e}$$

$$H_E \circ x = \frac{g'(\langle \alpha', \alpha' \rangle_E - ff'') + ff'g''}{2f \langle \alpha', \alpha' \rangle_E^{3/2}}$$

Para o $\mathbb{L}^3$:

$$K_L \circ x = \frac{g'(f''g' - f'g'')}{f \langle \alpha', \alpha' \rangle_L^2} \quad \text{e}$$

$$H_L \circ x = \frac{g'(-\langle \alpha', \alpha' \rangle_L + ff'') - ff'g''}{2f|\langle \alpha', \alpha' \rangle_L|^{3/2}}$$

Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ superfícies regulares e não-degeneradas tais que exista $F \in E_1(3, \mathbb{R})$ tal que $M_2 = F(M_1)$. Então, se K_1, K_2, H_1 e H_2 denotam as curvaturas Gaussiana e média de M_1 e M_2 , vale que

$$K_1(p) = K_2(F(p)) \quad \text{e} \quad H_1(p) = H_2(F(p))$$

para todo $p \in M_1$.

O Teorema Egregium de Gauss nos mostrará que a curvatura Gaussiana de uma superfície é invariante por isometrias locais. Podemos notar que a curvatura média não é um conceito intrínseco à superfície, como por exemplo, o plano e o cilindro. Essas duas superfícies são localmente isométricas porém possuem curvaturas médias distintas. Nos resta saber o que acontece com a curvatura Gaussiana.

Teorema Egregium de Gauss: Sejam $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{L}^3$ superfícies regulares e não-degeneradas. Se $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma isometria local, e K_1 e K_2 denotam as curvaturas Gaussianas de M_1 e M_2 , respectivamente, então $K_1(p) = K_2(\phi(p))$, para todo $p \in M_1$. Em outras palavras, a curvatura Gaussiana de uma superfície é intrínseca a ela.

CONCLUSÃO

A partir da apresentação desses conceitos da Geometria Lorentziana, torna-se clara a distinção entre o estudo de curvas e superfícies e a abordagem feita no espaço Euclidiano. Evidencia-se, sobretudo, o forte impacto do aspecto causal e da introdução dos índices nos resultados obtidos para esses elementos geométricos.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Sul da Bahia.

REFERÊNCIAS

- CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. (5ª edição). SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- LYMBERPOULOS, Alexandre; COUTO, Ivo Terek. Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies. (1ª edição). SBM, Rio de Janeiro, 2018.
- PICADO, Jorge. Apontamentos de Geometria Diferencial, Universidade de Coimbra, 2006.
- TENENBLAT, Ket. Introdução à Geometria Diferencial. (2ª edição revisada). Blucher, São Paulo, 2008.