

Aplicação do Modelo Logístico de Verhulst ao Crescimento Populacional de Toledo (PR) e Potenciais Aplicações em Simulações Computacionais

Caio Augusto Kraus Cercal¹, Karen Carrilho da Silva Lira²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, Brasil
(caiocercal@alunos.utfpr.edu.br)

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, Brasil

Resumo: Este trabalho investiga o potencial do modelo logístico de Verhulst como base matemática para simular o crescimento populacional de cidades virtuais em jogos de estratégia. Utilizaram-se dados censitários de Toledo/PR (IBGE) para definir empiricamente os parâmetros $r=0,03$ e $K=180.000$ por ajuste manual, buscando aproximar a curva logística dos dados históricos. A implementação foi realizada em Python e os resultados comparados com a série histórica por meio do erro relativo. O modelo apresentou boa aproximação entre 1970 e 1991, enquanto os maiores desvios ocorreram nos anos mais recentes, evidenciando as limitações de uma capacidade de suporte constante. No contexto de jogos de estratégia, como futura extensão do presente trabalho, discute-se a adoção de uma capacidade de suporte variável dependente das decisões do jogador.

Palavras-chave: Modelo Logístico de Verhulst; Crescimento Populacional; Simulação Computacional.

INTRODUÇÃO

O estudo do crescimento populacional constitui um importante campo de investigação da Matemática Aplicada, com aplicações em demografia, ecologia, epidemiologia e planejamento urbano. Entre os modelos clássicos utilizados para descrever esse fenômeno, destaca-se o modelo exponencial de Malthus, que assume que a taxa de crescimento da população é proporcional ao número de indivíduos existentes (MALTHUS, 1798). Embora essa hipótese seja adequada para descrever períodos iniciais de crescimento, ela desconsidera as limitações impostas pelos recursos disponíveis, conduzindo a previsões de crescimento ilimitado. Verhulst (1838) aperfeiçoou esse modelo ao introduzir um fator de freio proporcional à ocupação do ambiente. A equação resultante,

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (1)$$

onde P representa a população em um dado instante, r é a taxa intrínseca de crescimento e K é a capacidade de suporte do ambiente, isto é, o limite máximo sustentável de indivíduos. Essa equação, aparentemente simples, captura com notável elegância a transição entre o crescimento acelerado nos estágios iniciais e a estabilização progressiva à medida que a população se aproxima de K ,

descrevendo uma curva em forma de "S" conhecida como curva sigmoide. Devido à sua simplicidade e à capacidade de representar processos de saturação, o modelo logístico tem sido amplamente empregado na descrição de fenômenos biológicos, ecológicos e demográficos (MURRAY, 2002; BOYCE; DIPRIMA, 2017). Entretanto, sua aplicação em dados populacionais específicos também permite avaliar suas potencialidades e limitações na representação do crescimento de municípios ao longo do tempo.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo aplicar o modelo logístico de Verhulst à evolução populacional do município de Toledo, Paraná, utilizando dados disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os parâmetros do modelo foram definidos empiricamente por ajuste manual e a implementação computacional foi realizada em Python, permitindo comparar as estimativas obtidas com os dados históricos do município. Além de analisar o desempenho do modelo na representação da dinâmica populacional de Toledo, este trabalho discute como, em pesquisas futuras, o modelo poderá servir de base para simulações computacionais, como



jogos de estratégia, nos quais a capacidade de suporte poderá ser tratada como uma variável dependente das decisões do usuário.

MATERIAL E MÉTODOS

O modelo logístico de Verhulst parte de um princípio simples: a taxa de crescimento per capita não é constante, mas decresce linearmente à medida que a população $P(t)$ se aproxima da capacidade de suporte K (BOYCE; DIPRIMA, 2017). A dedução passo a passo para se chegar à solução analítica parte da separação de variáveis da equação diferencial ordinária de Verhulst:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Reescrevendo o termo entre parênteses para obter um denominador comum:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{K-P}{K}\right)$$

Isolando as variáveis P do lado esquerdo e t do lado direito:

$$\frac{dP}{P(K-P)} = \frac{r}{K} dt$$

Para integrar o lado esquerdo, aplica-se a decomposição em frações parciais do integrando:

$$\frac{1}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$$

Multiplicando ambos os lados por $P(K - P)$, obtemos a identidade $1 = A(K - P) + BP$

Para determinar as constantes A e B :

$$P = 0: 1 = A(K - 0) \Rightarrow A = \frac{1}{K}$$

$$P = K: 1 = 0 + B(K) \Rightarrow B = \frac{1}{K}$$

Substituindo as constantes de volta na integral da equação diferencial:

$$\int \frac{1}{K} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \right) dP = \int \frac{r}{K} dt$$

Multiplicando toda a equação por K para simplificar os denominadores e realizando a integração de cada termo, obtemos:

$$\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K-P} dP = \int r dt$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = rt + c$$

Utilizando a propriedade de subtração dos logaritmos ($\ln a - \ln b = \ln(a/b)$):

$$\ln\left|\frac{P}{K-P}\right| = rt + C$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados para eliminar o logaritmo natural:

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt+c} = e^c \cdot e^{rt} = c_1 \cdot e^{rt}$$

Considerando a condição populacional inicial no instante de partida $t = 0$, onde a população é $P(0) = P_0$:

$$\frac{P_0}{K-P_0} = c_1 \cdot e^0$$

Substituindo o valor da constante c_1 de volta na equação:

$$\frac{P}{K-P} = \frac{P_0}{K-P_0} e^{rt}$$

Invertendo as frações de ambos os lados para facilitar o isolamento da variável populacional P :

$$\begin{aligned} \frac{K-P}{P} &= \frac{K-P_0}{P_0} e^{-rt} \\ \frac{K}{P} - 1 &= \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt} \\ \frac{K}{P} &= 1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt} \end{aligned}$$

Isolando finalmente $P(t)$, chega-se à solução analítica do modelo logístico apresentada na Equação (15):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt}} \quad (15)$$

Para a definição dos parâmetros do modelo, foram utilizados os dados populacionais do município de Toledo/PR, obtidos junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA, 2025), referentes aos anos de 1970, 1980, 1991, 2000, 2010, 2022 e 2025. Os valores de r e K foram determinados por meio de um procedimento empírico de ajuste manual, no qual diferentes combinações de parâmetros foram testadas até que a curva logística

apresentasse uma aproximação visual satisfatória em relação à evolução histórica da população do município. Não foi empregado nenhum método formal de estimação de parâmetros, como ajuste por mínimos quadrados ou técnicas de otimização numérica, pois o objetivo foi ilustrar a aplicação do modelo, e não realizar estimação estatística rigorosa dos parâmetros. Assim, os erros relativos apresentados possuem caráter ilustrativo, uma vez que os parâmetros não foram obtidos por um procedimento formal de otimização, não devendo ser interpretados como resultado de um procedimento formal de calibração.

A implementação computacional foi feita em Python, utilizando as bibliotecas NumPy para operações numéricas (PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2026). O erro relativo entre o valor estimado pelo modelo e o valor real foi calculado:

$$Er = \frac{|X - \hat{X}|}{|X|}$$

onde $\hat{X}$ representa o valor estimado pelo modelo logístico e X o valor obtido a partir dos dados do IBGE.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A adequação do modelo logístico foi avaliada por meio da comparação entre as estimativas populacionais obtidas e os dados históricos do município de Toledo/PR disponibilizados pelo IBGE, referentes ao período de 1970 a 2025. Os parâmetros $r=0,03$ e $K=180.000$ foram definidos empiricamente por ajuste manual, buscando representar de forma satisfatória a evolução da população ao longo do período analisado. Os resultados dessa comparação são apresentados na Tabela 1, que reúne os valores observados, as estimativas produzidas pelo modelo e os respectivos erros relativos.

Tabela 1. População real e estimada pelo Modelo de Verhulst — Toledo/PR.

Ano	Pop. Real	Pop. Verhulst	Erro Relativo (%)
1970	68.885	68885	0.00%
1980	81.282	82005	0.89%
1991	94.879	96821	2.05%
2000	98.200	108708	10.70%

Ano	Pop. Real	Pop. Verhulst	Erro Relativo (%)
2010	119.313	121143	1.53%
2022	150.470	134433	10.66%
2025	160.701	137427	14.48%

Os dados apresentados na Tabela 1 indicam que o modelo reproduz adequadamente a tendência inicial de crescimento populacional. Entre 1970 e 1991, a margem de erro manteve-se estritamente abaixo do limiar de 2,1%, o que evidencia que a taxa intrínseca de crescimento ($r = 0,03$) modela com fidelidade a fase inicial de expansão urbana acelerada de Toledo. Entretanto, observa-se aumento do erro relativo em alguns períodos, indicando limitações do modelo logístico para representar fatores externos que influenciam o crescimento populacional.

À medida que a população se aproxima da capacidade de suporte estimada K , o modelo prevê uma desaceleração progressiva do crescimento. Essa desaceleração é compatível com a hipótese de capacidade de suporte constante adotada pelo modelo. Entretanto, o desvio observado em 2025 sugere que fatores não contemplados pelo modelo, como variações nas taxas de migração ou políticas públicas de habitação, podem ter influenciado o crescimento populacional do município.

A Figura 1 apresenta a comparação entre a população observada do município de Toledo e os valores estimados pelo modelo logístico de Verhulst. Observa-se que, nas primeiras décadas analisadas, as curvas apresentam comportamento bastante semelhante, indicando que o modelo reproduz satisfatoriamente a tendência inicial de crescimento populacional. A partir dos anos 2000, entretanto, nota-se um afastamento progressivo entre os valores observados e os estimados, tornando-se mais evidente nos anos de 2022 e 2025. Esse comportamento sugere que a hipótese de uma capacidade de suporte constante pode não ser suficiente para representar a dinâmica demográfica do município ao longo de um período extenso, uma vez que fatores econômicos, sociais e migratórios podem alterar o padrão de crescimento da população. Além disso, também percebe-se que o modelo superestima a população em 1991 e 2000 e, em seguida, subestima a partir de 2022. Esse comportamento sugere que o valor adotado para K pode não representar adequadamente toda a série histórica.

Embora o modelo apresente limitações para representar integralmente a evolução demográfica observada, sua simplicidade matemática e seu comportamento qualitativo tornam-no uma ferramenta interessante para aplicações didáticas e computacionais. Em trabalhos futuros, a adoção de uma capacidade de suporte variável poderá reduzir

esses desvios e ampliar as possibilidades de utilização do modelo em sistemas de simulação.

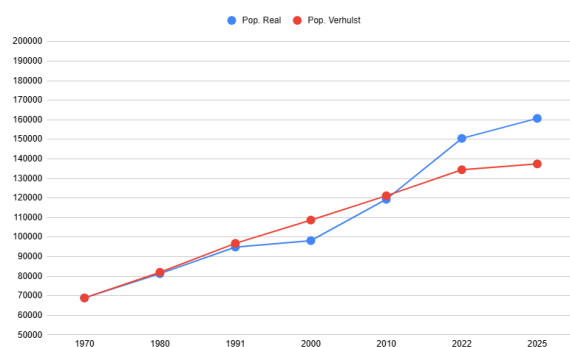


Figura 1 - Evolução da população observada de Toledo/PR e da população estimada pelo modelo logístico de Verhulst para os anos de 1970 a 2025.

Para a execução das simulações numéricas, cálculo das projeções de Verhulst e determinação dos erros relativos percentuais plotados nos resultados, foi desenvolvido e utilizado o seguinte algoritmo em linguagem Python:

```
import numpy as np

# Parâmetros do modelo
P0 = 68885
K = 180000
r = 0.03

# Dados reais disponíveis
dados_reais = {
    1970: 68885,
    1980: 81282,
    1991: 94879,
    2000: 98200,
    2010: 119313,
    2022: 150470,
    2025: 160701
}

def verhulst(t):
    return K / (1 + ((K - P0) / P0) * np.exp(-r * t))

print(f"{'Ano':<6}{'Real':>12}{'Verhulst':>15}{'Erro Relativo (%)':>22}")
print("-"*55)

for ano, real in dados_reais.items():
    t = ano - 1970
    estimado = verhulst(t)

    erro_rel = abs(real - estimado) / abs(real) * 100

    print(
        f"{'ano':<6}"
        f"{'real':>12,.0f}"
        f"{'estimado':>15.0f}"
        f"{'erro_rel':>21.2f}%"
    )
```

Embora o presente trabalho tenha sido desenvolvido utilizando dados demográficos do município de Toledo, o modelo logístico de Verhulst apresenta potencial para aplicações em sistemas computacionais de simulação. Em jogos de estratégia, por exemplo, a capacidade de suporte (K) pode ser associada a elementos como infraestrutura urbana, disponibilidade de habitações, produção de alimentos e ocupação territorial. Dessa forma,

alterações promovidas pelo jogador poderiam modificar dinamicamente o valor de K, influenciando diretamente a evolução da população virtual. Essa abordagem permitiria representar matematicamente a relação entre crescimento populacional e disponibilidade de recursos, constituindo uma perspectiva interessante para trabalhos futuros.

CONCLUSÃO

A análise realizada demonstra que o Modelo Logístico de Verhulst foi capaz de representar satisfatoriamente a tendência geral de crescimento populacional do município de Toledo/PR, especialmente nas primeiras décadas analisadas. Em comparação ao modelo exponencial de Malthus, o modelo logístico incorpora a capacidade de suporte do ambiente, permitindo representar a desaceleração do crescimento populacional à medida que a população se aproxima desse limite. Entretanto, os desvios observados nos anos mais recentes evidenciam as limitações de assumir uma capacidade de suporte constante para descrever a dinâmica populacional ao longo de períodos extensos, uma vez que fatores como migração, mudanças econômicas e políticas públicas não são contemplados pela formulação clássica do modelo.

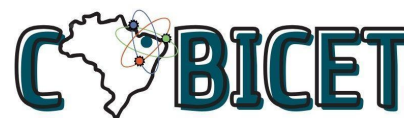
Embora o modelo apresente limitações para representar integralmente a evolução demográfica observada, sua simplicidade matemática e seu comportamento qualitativo tornam-no uma ferramenta interessante para aplicações didáticas. Como perspectiva de trabalhos futuros, o modelo poderá servir de base para simulações computacionais, nas quais uma capacidade de suporte variável poderá reduzir esses desvios e representar de forma mais realista a evolução populacional. Essa abordagem amplia as possibilidades de aplicação do modelo, mantendo seus fundamentos matemáticos e incorporando maior flexibilidade para representar sistemas dinâmicos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 11. ed. Wiley, 2017.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Toledo (PR). Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/pr/toledo.html>. Acesso em: 11 jun. 2026.

MALTHUS, T. R. An Essay on the Principle of Population. London: J. Johnson, 1798.



MURRAY, J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. 3. ed. New York: Springer, 2002.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. Python Language Reference. Disponível em: <https://www.python.org>

VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, v. 10, p. 113–121, 1838.