

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA OTIMIZAÇÃO DE PROCESSOS FERMENTATIVOS EM BATELADA ALIMENTADA

Ana Paula Cordeiro Costa¹, Davi Piedade Santos², Rita Gabriela Machado De Brito³, Karen Carrilho Da Silva Lira⁴

¹Estudante do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Brasil
(anacosta.2024@alunos.utfpr.edu.br)

²Estudante do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Brasil
(davis.2017@alunos.utfpr.edu.br)

³Estudante do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Brasil
(ritabrito@alunos.utfpr.edu.br)

⁴Professora Dra. da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Brasil (karenc@utfpr.edu.br)

Resumo: A produção de etanol por meio da fermentação alcoólica representa uma atividade de grande importância para a indústria brasileira, especialmente por sua contribuição à geração de energia renovável e ao aproveitamento de matérias-primas agrícolas. Para que o processo ocorra de forma eficiente, é necessário monitorar e controlar variáveis como a concentração de substrato, o desenvolvimento da biomassa e a formação do etanol. Nesse cenário, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) destacam-se como ferramenta fundamental para a compreensão e o melhoramento desse processo, permitindo modelar matematicamente o comportamento fermentativo ao longo do tempo e acompanhar a evolução simultânea dessas variáveis de estado. Além disso, os modelos matemáticos possibilitam simulações que preveem o comportamento do sistema antes de sua aplicação em escala industrial, reduzindo custos e minimizando erros operacionais. Os estudos demonstram que a utilização das EDOs, associada a técnicas de otimização, contribui para a definição das melhores condições de operação, aumentando a produtividade e melhorando o aproveitamento da matéria-prima. Conclui-se que o uso das Equações Diferenciais Ordinárias representa uma estratégia eficaz para tornar a produção de etanol mais eficiente, econômica e sustentável, favorecendo o avanço tecnológico dos processos biotecnológicos industriais.

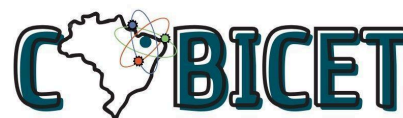
Palavras-chave: Fermentação alcoólica; Etanol; Equações Diferenciais Ordinárias; Modelagem matemática; Biotecnologia.

INTRODUÇÃO

As Equações diferenciais ordinárias desempenham um papel de grande relevância em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na física, biologia, química, medicina, economia e principalmente na engenharia, possuem um papel fundamental no entendimento de diversos fenômenos naturais e tecnológicos (SILVA, 2024), elas nos ajudam a entender o modelamento de alguns processos que envolvam mudanças de variações, como no crescimento populacional, ligações atômicas e moleculares, mistura de substâncias, resfriamento e aquecimento, desenvolvimento de microrganismos entre muito outros (AGUIAR, 2023). Desse modo,

existe um grande interesse em problemas de equações diferenciais ordinárias e nos seus métodos de solução, pois elas possuem um amplo aspecto de aplicabilidade prática e teórica.

O Brasil é o segundo maior produtor mundial de etanol, com produção estimada em 37,4 bilhões de litros na safra 2024/2025 (UNICA, 2025; CONAB, 2026). O setor movimenta mais de 1,2 mil municípios e gera cerca de 2,2 milhões de empregos, consolidando o país como referência global em energia renovável (UNICA, 2025). Apesar desse protagonismo, a produção de etanol enfrenta desafios relacionados à eficiência dos processos fermentativos, como o controle da temperatura, a



concentração de substrato e a inibição pelo etanol. Nesse contexto, a modelagem matemática por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) permite descrever a evolução temporal das variáveis de estado do processo, viabilizando simulações e a otimização de diferentes cenários operacionais antes da aplicação em escala industrial.

O presente artigo analisa como uma equação diferencial ordinária pode ser aplicada em um processo de fermentação alcoólica em batelada alimentada, tendo em vista que essa é uma área que apresenta processos com alto potencial econômico e industrial (AGUIAR, 2023). A fermentação alcoólica é um processo fermentativo bioquímico e anaeróbico, ou seja não há a presença de oxigênio no meio (ALCARDE & SILVA, 2025), desse modo microrganismos como a *Saccharomyces cerevisiae*, leveduras, que fazem a conversão do açúcar em energia, etanol e dióxido de carbono (CO_2) que são produtos essenciais para produção de bebidas e combustíveis, a importância da fermentação alcoólica não se reflete apenas na produção de bebidas, como cervejas e vinhos, mas também na geração de combustíveis e biocombustíveis, o etanol produzido através da fermentação alcoólica é utilizado como aditivo para a gasolina ou para biocombustível puro, contribuindo assim para a redução da emissão de gases de efeito estufa e promovendo a sustentabilidade ambiental (PEREIRA & HENRIQUETOS, 2024).

Todo esse processo de fermentação ocorre na indústria em larga escala, as fermentações industriais são classificadas de acordo com os tipos de alimentações e desenvolvimento das fermentações, que podem ser processos contínuos ou descontínuos (batelada) (ALCARDE & SILVA, 2025), processos descontínuos, que é o que iremos analisar no decorrer deste artigo, são denominados batelada simples ou batelada alimentada, na batelada simples a fermentação só inicia após o preenchimento do fermentador, momento em que se mistura o mosto (líquido açucarado que pode ser fermentado) com o fermento, porém isso é somente viável para quantidades pequenas de mosto, não sendo viável para indústrias, já a batelada alimentada mistura-se o mosto e o fermento conforme o biorreator vai sendo abastecido, esse é um processo mais produtivo e expõe as leveduras a menores riscos de se tornarem inativas.

Neste contexto o produto de fermentação que irá ser estudado para a otimização de seu processo por meio de equações diferenciais ordinárias no presente artigo será especificamente o etanol, segundo Aguiar (2023), a partir de 2019 a produção de etanol aumentou em aproximadamente 12,95% nos últimos 5 anos, esse aumento da produção reflete a alta demanda por etanol, além do mais por este estar

presente em uma infinidade de produtos, como por exemplo, em sua forma pura (álcool anidro) pode ser encontrado em tintas, vernizes, solventes, perfumes, ácido acético e acetaldeído, já o etanol hidratado (com 4% de água) é encontrado em bebidas, alimentos, cosméticos, aromatizantes, produtos de limpeza, medicamentos, vacinas e em diversos outros produtos.

Os processos de fermentação possuem parâmetros que influenciam no custo, na eficiência, nos riscos, e nos resultados do processo, sendo preferível que os custos e riscos sejam reduzidos e a eficiência e resultados melhorados, desse modo quanto mais barato e melhor forem os resultados, maior será a quantidade de produto gerada e o melhor será o preço ao final do produto e também de seus reagentes (AGUIAR, 2023), isto atualmente ainda é uma problemática que muitas indústrias trabalham e buscam diariamente para melhorar na sua produção.

Diante disso iremos analisar neste artigo a tese de Octavio Vieira Aguiar, a principal referência para este trabalho, onde fez um estudo acerca da otimização desses diversos processos aplicando uma otimização de sistemas por equações diferenciais ordinárias aplicada em processos fermentativos em batelada alimentada no ano de 2023, em sua tese ele realizou um estudo de caso onde foi sendo construído um algoritmo cujo o objetivo era a otimização desses processos fermentativos, e no decorrer de seu estudo evidenciou-se a necessidade de utilizar as equações diferenciais ordinárias para compreender e melhorar também esses processos, ou seja, iremos trazer neste artigo como foi utilizado as equações diferenciais ordinárias para a resolução destes problemas que envolvem todo o processo fermentativo em uma indústria e como ela foi aplicada para melhorar esses processos.

MATERIAL E MÉTODOS

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de modelagem e simulação de bioprocessos, fundamentado na estruturação de balanços de massas para um biorreator operando em regime de batelada alimentada (fed-batch). O objeto de estudo centrou-se na fermentação alcoólica utilizando a levedura *Saccharomyces cerevisiae*. A estruturação metodológica baseou-se nas diretrizes de modelagem fenomenológica propostas por Aguiar (2023) e nos perfis de produtividade industrial descritos pela Embrapa (ALCARDE; SILVA, 2025).

2.1 Modelagem matemática do biorreator.

Para descrever a dinâmica transiente do cultivo, assumiu-se a hipótese de mistura perfeita e densidade constante do caldo fermentativo. O sistema biológico foi equacionado através de um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que representam as

taxas de variação das variáveis de estado ao longo do tempo de fermentação.

O balanço de massa global, que determina a variação do volume de líquido (V) no interior do biorreator em função da vazão volumétrica de alimentação externa (F), é descrito pela Equação 1:

$$\frac{dV}{dt} = F(t) \quad (1)$$

Para contabilizar o efeito de diluição gerado pela entrada contínua de mosto, definiu-se a taxa de diluição (D) como a razão entre a vazão e o volume reacional no tempo t ($D = F/V$). O crescimento celular foi modelado pela cinética de Monod, que descreve a velocidade específica de crescimento (μ) em função da concentração de substrato disponível no meio, conforme a Equação 2:

$$\mu = \frac{\mu_{max} \cdot S}{(K_s + S)} \quad (2)$$

Onde μ_{max} representa a velocidade específica máxima de crescimento (h^{-1}) e K_s a constante de saturação do substrato (g/L). Com base nisso, o balanço de massa celular para a concentração de biomassa (X) foi formulado conforme a Equação 3:

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X - D \cdot X \quad (3)$$

A dinâmica de consumo da fonte de carbono é representada pelo balanço de substrato (S), que contabiliza a concentração de açúcar na corrente de alimentação (S_{in}) e a demanda metabólica da levedura, conforme a Equação 4:

$$\frac{dS}{dt} = D \cdot (S_{in} - S) - \frac{\mu \cdot X}{Y_{x/s}} \quad (4)$$

Sendo que $Y_{x/s}$ o coeficiente de rendimento de conversão de substrato em biomassa celular que é dado em g/g. Por fim, a formação do produto de interesse metabólico foi quantificada pelo balanço de massa do etanol (P), descrito na Equação 5:

$$\frac{dP}{dt} = q_p \cdot X - D \cdot P \quad (5)$$

Onde q_p é a velocidade específica de formação de produto que é dado em g/g.h.

Os parâmetros cinéticos e as condições operacionais adotadas para a resolução numérica do sistema acima estão consolidadas nas Tabelas 1 e 2 a seguir. Os valores cinéticos foram adaptados de Lima et al. (2001) e Andrietta et al. (2007), e a adoção destes

valores permite a simulação do comportamento metabólico da levedura *S. cerevisiae* em escala laboratorial.

Tabela 1 - Parâmetros cinéticos adotados para linhagem *S. cerevisiae*.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Velocidade específica máxima de crescimento	μ_{max}	0,4100	h^{-1}
Constante de saturação do substrato	K_s	2,5000	g/L
Rendimento biomassa/substrato	$Y_{x/s}$	0,1000	g/g
Rendimento produto/substrato	$Y_{p/s}$	0,4600	g/g

Fonte: Autores (2026), adaptado de Lima et al. (2001) e Andrietta et al. (2007).

Tabela 2 - Condições operacionais iniciais e de alimentação. Fonte: Autores (2026).

Variável de estado	Símbolo	Valor	Unidade
Concentração inicial de biomassa	X_0	10,0000	g/L
Concentração inicial de substrato	S_0	50,0000	g/L
Concentração inicial de produto	P_0	0	g/L
Volume inicial de líquido	V_0	2,0000	L
Substrato na alimentação (mosto)	S_{in}	300,0000	g/L

Fonte: Autores 2026.

2.2 Algoritmo de otimização

Após a definição do modelo fenomenológico, a segunda etapa metodológica consistiu na aplicação computacional dessas EDOs para a otimização do processo. O sistema de equações diferenciais foi utilizado para alimentar o algoritmo de controle de alimentação. O objetivo matemático estabelecido foi encontrar a trajetória ótima da vazão $F(t)$ que maximiza a concentração final de etanol (P) e a produtividade volumétrica global do biorreator, minimizando simultaneamente a inibição cinética do microorganismo (AGUIAR, 2023).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A resolução numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias (Equações 1 a 5) foi realizada pelo método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem (RK45), implementado computacionalmente com auxílio da biblioteca `scipy.integrate.solve_ivp` da linguagem Python (SANTOS et al., 2026). O horizonte de simulação adotado foi de 20 horas de fermentação, com um perfil de alimentação escalonado que contempla quatro etapas operacionais: fase de adaptação (0–4 h, $F = 0,05$ L/h), fase exponencial (4–8 h, $F = 0,10$ L/h), fase produtiva (8–14 h, $F = 0,15$ L/h) e fase final (14–20 h, $F = 0,08$ L/h), em conformidade com a estratégia de controle de alimentação descrita por Aguiar (2023).

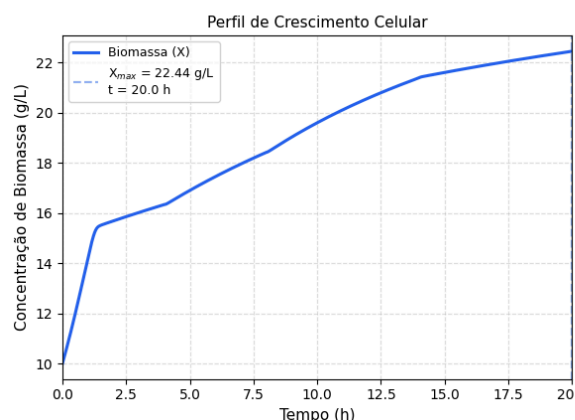
Os resultados da simulação indicaram crescimento contínuo da concentração de biomassa (X) ao longo de todo o período fermentativo, atingindo valor máximo de 22,44 g/L ao final das 20 horas. Esse comportamento é coerente com a operação em regime fed-batch, no qual a alimentação progressiva do substrato sustenta a atividade metabólica da levedura *Saccharomyces cerevisiae* sem que ocorra limitação por esgotamento da fonte de carbono, fenômeno que seria observado em processos de batelada simples (ALCARDE; SILVA, 2025).

A concentração de etanol (P) apresentou acúmulo progressivo durante toda a simulação, alcançando concentração final de 54,65 g/L, o que corresponde a uma produtividade volumétrica global de 2,73 g/L·h. A taxa de produção de etanol foi diretamente acoplada à concentração de biomassa viável presente no meio, conforme descrito pela Equação 5, na qual a velocidade específica de formação de produto ($q_p = 0,1886$ g/g·h) governa a cinética de síntese do etanol. O substrato foi consumido de forma eficiente ao longo do processo, com concentração residual de 0,18 g/L ao final das 20 horas, indicando

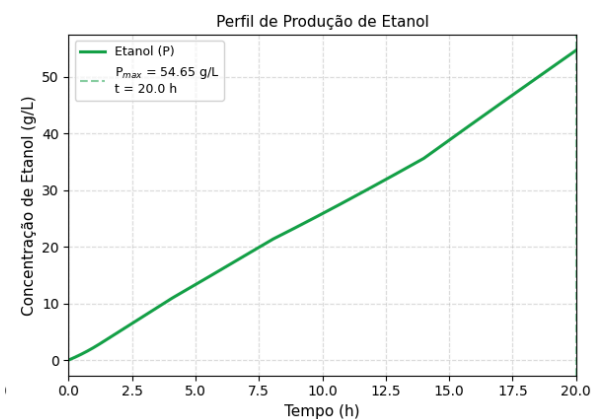
aproveitamento expressivo da fonte de carbono disponível.

Os perfis de crescimento celular e produção de etanol obtidos pela simulação estão apresentados na Figura 1. Figura 1 – Perfis de concentração de biomassa (X) e etanol (P) ao longo do tempo de fermentação em biorreator fed-batch operado com *Saccharomyces cerevisiae*.

Simulação numérica do Biorreator Fed-Batch *S. cerevisiae* - Fermentação Alcoólica

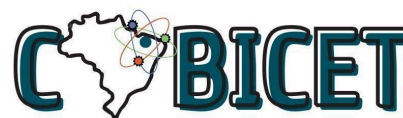


Fonte: Autores (2026).



Fonte: Autores (2026).

Os resultados obtidos corroboram os perfis de produtividade descritos por Aguiar (2023) para processos fermentativos otimizados, nos quais a operação em batelada alimentada com controle de vazão demonstrou ser uma estratégia eficaz para maximizar a produção de etanol e sustentar o crescimento celular ao longo do processo. A consistência entre os parâmetros cinéticos adotados (Tabelas 1 e 2) e os resultados simulados valida a aplicabilidade do modelo fenomenológico proposto para representar o comportamento metabólico da levedura em escala laboratorial.



CONCLUSÃO

Segundo Aguiar (2023), as qualidades que um processo têm nos diz o quanto é boa a sua eficiência, ou seja, quando apresenta o mínimo de custos e um ótimo desempenho, então para aumentarmos a eficiência e melhorar a produção de um determinado processo é possível adotar procedimentos de otimização afim de melhorar tal processo. O presente artigo trouxe como o processo e o conhecimento sobre áreas exatas do conhecimento é importante para a eficiência de um processo de batelada alimentada em uma indústria, como a aplicação de EDOs. A importância das equações diferenciais ordinárias é muito relevante para tal otimização, pois com elas é possível encontrar uma solução e melhoramento para diversos processos de produção que acontecem não somente em indústrias de bioprocessos mas também para qualquer área industrial.

Embora os resultados sejam promissores, é importante destacar que o modelo apresenta simplificações, como a hipótese de mistura perfeita e a utilização de parâmetros cinéticos obtidos da literatura, que podem não refletir exatamente as condições de uma planta industrial real. Além disso, a simulação não considerou efeitos inibitórios adicionais, como a presença de contaminantes ou variações na qualidade do mosto, que poderiam impactar o desempenho do processo em escala produtiva.

O estudo realizado por Aguiar (2023) contribuiu também na elaboração de um modelo prático de algoritmo computacional, permitindo que as equações diferenciais fossem implementadas ao processo industrial, ao final conclui-se que a metodologia utilizada e implementada na fermentação alcoólica foi vantajosa para a representação do comportamento metabólico da levedura em escala laboratorial, sendo assim uso do conjunto de EDOs provou ser uma estratégia eficiente para alimentar o algoritmo de controle, simulando com precisão os parâmetros cinéticos e as condições operacionais do biorreator.

A aplicação de equações diferenciais ordinárias na otimização da fermentação alcoólica em batelada alimentada vai além do âmbito acadêmico, pois apresenta uma resposta direta às problemáticas industriais que sempre buscam a redução de custos operacionais e o aumento do rendimento. Através do controle da alimentação do mosto, podemos diminuir os riscos de inativação das leveduras e otimizar a conversão do açúcar em biocombustível, desse modo, o presente artigo cumpre seu objetivo ao demonstrar que a integração entre a matemática aplicada e a

biotecnologia é um caminho fundamental para promover processos mais produtivos, sustentáveis e economicamente competitivos no cenário industrial atual.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a validação experimental do modelo em biorreatores de bancada, a fim de comparar os resultados simulados com dados reais de fermentação. Além disso, o modelo pode ser estendido para incluir outros fenômenos relevantes, como a inibição pelo etanol e a variação da viabilidade celular ao longo do tempo. Por fim, a aplicação de diferentes algoritmos de otimização poderia ser investigada para a obtenção de perfis de alimentação ainda mais eficientes.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à professora Dra. Karen Carrilho Da Silva Lira por nos ajudar neste trabalho e dar todo e qualquer suporte, agradecemos a UTFPR.

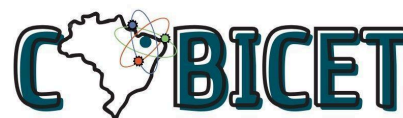
REFERÊNCIAS

AGUIAR, Octavio Vieira de. **Algoritmo de otimização de sistemas modelados por equações diferenciais ordinárias aplicado a processos de fermentação em batelada alimentada**. 2023. 340 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2023. Disponível em: <http://www.bdttd.uerj.br/handle/1/20339>. Acesso em: 26 de abril de 2026.

ALCARDE, André Ricardo; SILVA, Fábio Cesar da. **Fermentação**. 2025. Embrapa. Disponível em: <https://www.embrapa.br/agencia-de-informacao-tecnologica/cultivos/cana-de-acucar/pos-producao/procesamento-da-cana-de-acucar/tratamento-do-caldo/fermentacao>. Acesso em: 26 de abril de 2026.

ANDRIETTA, S. R. *et al.* Otimização de processos fermentativos para a produção de etanol. **Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia**, v. 12, n. 2, p. 45-58, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/15105/1/Patricia.pdf>. Acesso em: 14 maio 2026.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO (CONAB). **Produção de cana-de-açúcar chega a 673,2 milhões de toneladas na safra 2025/26**. 2026. Disponível em: <https://www.gov.br/conab/pt-br/assuntos/noticias/producao-de-cana-de-acucar-chega-a-673-2-milhoes-de-toneladas-na-safra-2025-26>. Acesso em: 29 jun. 2026.



LIMA, U. A. *et al.* **Biotecnologia Industrial: Processos Fermentativos e Enzimáticos**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/643076289/Processos-Fermentativos-e-Enzimaticos-PDFDrive-1-pdf>. Acesso em: 14 maio 2026.

PEREIRA, Marcos; HENRIQUETOS, Tafarel Gonçalves. **FERMENTAÇÃO ALCOÓLICA: PROCESSO DE INÍCIO DE MULTIPLICAÇÃO DO FERMENTO**. 2024. Disponível em: [https://ric.cps.sp.gov.br/bitstream/123456789/28468/2/biocombustiveis_2024_2_Marcos%20Pereira%20e%20Tafarel%20Gon%C3%A7alves%20Henriquetos_fermentacao%20alcoolica%20processo%20de%20i](https://ric.cps.sp.gov.br/bitstream/123456789/28468/2/biocombustiveis_2024_2_Marcos%20Pereira%20e%20Tafarel%20Gon%C3%A7alves%20Henriquetos_fermentacao%20alcoolica%20processo%20de%20inicio%20%281%29.pdf)
[nicio%20%281%29.pdf](https://ric.cps.sp.gov.br/bitstream/123456789/28468/2/biocombustiveis_2024_2_Marcos%20Pereira%20e%20Tafarel%20Gon%C3%A7alves%20Henriquetos_fermentacao%20alcoolica%20processo%20de%20i). Acesso em: 26 de abril de 2026.

SILVA, Elliton Gabriel da. **Introdução as Equações diferenciais ordinárias: História, Fundamentos e Aplicações**. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/jspui/retrieve/138a8dd4-a688-4201-844f-9bb52ef7177a/19688.pdf>. Acesso em: 26 de abril de 2026.

SANTOS, Davi Piedade et al. **Simulação numérica do biorreator fed-batch — fermentação alcoólica com *Saccharomyces cerevisiae***. 2026. Google Colaboratory. Disponível em: https://colab.research.google.com/drive/1AueGu7_4kC3Mnbf1GIq5vjvh6vUzLzNU. Acesso em: 7 jun. 2026.

UNIÃO DA INDÚSTRIA DE CANA-DE-AÇÚCAR E BIOENERGIA (UNICA). **Etanol consolida o Brasil como referência global de descarbonização**. 2025. Disponível em: <http://www.sindicombustiveis.com.br/etanol-consolid-a-o-brasil-como-referencia-global-de-descarbonizacao/>. Acesso em: 29 jun. 2026.