

Conjuntos de Nível de Funções Vetoriais: uma abordagem analítica e numérica

Izabella Fiori S.¹, André V. M. Spada¹, João P. S. Moura¹, Dione I. C. Milani¹, Gustavo H. Dalposso¹

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Brasil
(izabellaflori25@gmail.com)

Resumo: Este trabalho analisou os conjuntos de nível de uma função vetorial bidimensional, buscando determinar os pontos do plano em que um campo vetorial assume um valor previamente estabelecido. Para isso, realizou-se uma interpretação geométrica por meio da interseção entre curvas e aplicou-se o método de Newton-Raphson multivariável. Os resultados mostraram concordância entre as abordagens analítica e numérica, evidenciando a eficiência do método empregado.

Palavras-chave: Cálculo Vetorial; Campos Vetoriais; Conjuntos de nível; Cálculo Numérico; Newton-Raphson.

INTRODUÇÃO

O Cálculo Vetorial constitui um importante ramo da Matemática, dedicado ao estudo de funções do tipo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, as quais associam a cada ponto do domínio um vetor de saída. Tais funções desempenham papel fundamental na modelagem de diversos fenômenos físicos e de engenharia, sendo empregadas na descrição de campos gravitacionais, elétricos e magnéticos, bem como em problemas relacionados ao escoamento de fluidos e à dinâmica de sistemas (Stewart, 2022). Em um campo vetorial, cada ponto do espaço está associado a um vetor que representa grandezas como intensidade, direção e sentido de determinado fenômeno.

Nesse contexto, um problema de grande relevância consiste em determinar os pontos do domínio nos quais uma função vetorial assume um valor previamente estabelecido. Do ponto de vista matemático, esse problema corresponde à determinação do conjunto de nível de uma função vetorial, definido por:

$$F^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n: F(x) = a\} \quad (1)$$

onde $F^{-1}(a)$ é a imagem inversa (ou conjunto de nível) da função associada ao vetor a ; x é o vetor de variáveis pertencente ao domínio $\mathbb{R}^n$; $F(x)$ representa a lei da função vetorial; e a é o vetor constante que define o nível desejado. (Guidorizzi, 2018).

Em geral, a obtenção desses conjuntos de nível conduz à resolução de sistemas de equações não lineares, cuja interpretação geométrica está associada à interseção

de curvas ou superfícies definidas pelas componentes da função considerada.

Embora, no presente trabalho, seja estudado um caso particular que admite solução analítica, a maioria dos problemas envolvendo funções vetoriais e sistemas não lineares de interesse prático não apresenta soluções em forma fechada. Nessas situações, torna-se indispensável a utilização de métodos numéricos iterativos capazes de fornecer aproximações satisfatórias para as soluções procuradas.

Segundo Chapra e Canale (2016), o método de Newton-Raphson multivariável consiste em um procedimento iterativo baseado na linearização local de um sistema não linear por meio da matriz Jacobiana, gerando sucessivas aproximações para as raízes do sistema até que seja atingido um critério de convergência previamente estabelecido. Dessa forma, o método constitui uma ferramenta de grande relevância na resolução de problemas não lineares.

Diante desse cenário, o presente trabalho tem por objetivo analisar os conjuntos de nível de funções vetoriais sob uma abordagem analítica e numérica, interpretando-os como campos vetoriais e identificando os pontos do plano nos quais o campo assume um valor específico.

Para tanto, a investigação fundamenta-se no Exemplo 20.1 da apostila Cálculo III • Vol. 2, proposta por Silva e Cardim (2009), que considera a função vetorial $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:



$$F(x, y) = (x^2 + 4y^2, y - x^2) \quad (2)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; a expressão algébrica $(x^2 + 4y^2, y - x^2)$ determina a regra de transformação do operador vetorial.

O exemplo propõe a determinação de todos os pontos (x, y) cujas imagens pela função correspondem ao vetor $(4, -1)$, isto é, a determinação do conjunto de nível $F^{-1}(4, -1)$. Uma vez que o domínio e o contradomínio possuem a mesma dimensão, F pode ser interpretada como um campo vetorial, associado a cada ponto (x, y) do plano um vetor em $\mathbb{R}^2$.

Embora não represente necessariamente uma grandeza física específica, serve como modelo matemático para ilustrar o problema de encontrar os pontos do espaço onde o campo assume um valor prescrito.

Este estudo de caso é ideal para a discussão proposta, pois sua resolução analítica revela que o conjunto de nível procurado, isto é, os pontos do espaço onde o campo vetorial assume o valor $(4, -1)$, provém da interseção geométrica entre uma elipse e uma parábola.

A partir da análise desse sistema não linear, aplica-se o método de Newton-Raphson multivariável como alternativa para a determinação numérica desses pontos. Esse exemplo demonstra, de forma prática, a complementaridade entre os conceitos de funções vetoriais e cálculo vetorial e as técnicas de cálculo numérico, evidenciando a transição natural entre essas duas áreas do conhecimento.

MATERIAL E MÉTODOS

Inicialmente, foi necessário avaliar a melhor abordagem para a resolução do sistema obtido, haja vista que as funções que compõem o campo vetorial representam uma elipse e uma parábola, dadas por:

$$P(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4 \quad (3)$$

$$Q(x, y) = y - x^2 = -1 \quad (4)$$

onde $P(x, y)$ denota a equação associada a uma elipse no plano cartesiano, $Q(x, y)$ define a expressão algébrica correspondente a uma parábola.

As curvas associadas a essas funções foram então representadas no software GeoGebra (GEOGEBRA, 2026), o que possibilitou a visualização gráfica de seus pontos de interseção e, conseqüentemente, a estimativa das aproximações iniciais utilizadas no método numérico. Dessa forma, optou-se pela aplicação do método de Newton-Raphson multivariável para obtenção das raízes do sistema. Assim, a fim de encontrar os valores de x e y que satisfazem o vetor $(4, -1)$, foi pertinente escrever o sistema não linear na seguinte configuração:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

onde (5) é o sistema de equações não linear associado a elipse e a parábola, respectivamente.

Após isso, o sistema foi resolvido de maneira numérica no *software* R (R Core Team, 2026) através do Método de Newton Raphson (NR) multivariável, conforme apresentado na Figura 1.

Primeiramente o pacote *nleqslv* (Hasselman e Carnell, 2026) foi requerido, a fim de que a função *nleqslv* pudesse ser utilizada, após isso as funções que compõem o sistema foram definidas. A ferramenta *nleqslv* solicita que uma aproximação inicial para a raiz seja fornecida (*xstart*), a fim de que iterações sejam realizadas até que se chegue numa aproximação da raiz que atenda o nível de precisão solicitado, o que também foi adicionado ao código.

A aproximação inicial foi estimada a partir da plotagem de $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, onde foi possível visualizar a existência de três raízes e o intervalo em que elas se encontravam.

```
require(nleqslv)           #carregando o pacote
sistema <- function(x){ #define as funções
do
y <- numeric(2)          #sistema
y[1] <- x[1]^2+4*x[2]^2-4
y[2] <- x[2]-x[1]^2+1
y}
#primeira raiz
xstart <- c(1,4) #define 1ª aproximação
nleqslv(xstart,sistema,method =
c("Newton"),control=list(xtol = 1e-15, ftol
= 1e-15)) #resolvendo a primeira raiz
#segunda raiz
xstart <- c(-1,4) #define 1ª aproximação
nleqslv(xstart,sistema,method =
c("Newton"),control=list(xtol = 1e-15, ftol
= 1e-15)) #resolvendo a segunda raiz
#terceira raiz
xstart <- c(0.1,-0.5) #define 1ª aproximação
nleqslv(xstart,sistema,method =
c("Newton"),control=list(xtol = 1e-15, ftol
= 1e-15)) #resolvendo a terceira raiz
```

Figura 1: Script de Resolução Numérica via Método de NR multivariável.

Ademais, foi passado em *nleqslv* o sistema que deve ser resolvido, que foi definido inicialmente como “sistema”, assim como o método aplicado em *method*. Por fim, foram estabelecidos os critérios de parada do método em *control*, onde *xtol* mede a variação nas aproximações da raiz e *ftol* mede o erro residual do sistema. Então, o comando *nleqslv* foi utilizado três vezes, com o objetivo de se encontrar as três raízes reais do sistema não linear.

A resolução analítica de um sistema não linear pelo Método de NR sugere o desenvolvimento da matriz

Jacobiana segundo Ruggiero e Lopes (1997), dada por:

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde $J(X)$ representa a matriz Jacobiana associada ao sistema de funções; X corresponde ao vetor de variáveis independentes do sistema; $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ denotam as funções componentes que integram o campo vetorial; $x_1, x_2, \dots, x_n$, indicam as variáveis em relação às quais as funções são derivadas; e os termos da forma $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ constituem as derivadas parciais de primeira ordem de cada função componente i avaliada em relação a cada variável j , definindo a taxa de variação local do sistema.

Portanto, as linhas dessa matriz, quando olhamos para o cálculo vetorial, correspondem ao gradiente de cada uma das funções coordenadas do campo vetorial. O gradiente de uma função diz respeito ao vetor normal à sua curva de nível naquele ponto, indicando a direção de máximo crescimento da função. Dessa forma, utilizando a função fornecida pelo exemplo de Silva e Cardim (2009), a equação (5), o jacobiano pode ser interpretado geometricamente como uma matriz formada pelos vetores normais às curvas de nível de $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, as funções coordenadas que compõem o campo vetorial F .

$$J_{F(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 8y \\ -2x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x, y) \\ \nabla f_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde $J_{F(x,y)}$ representa a matriz Jacobiana da função vetorial F no ponto (x, y) ; as variáveis x e y são as coordenadas de entrada da função; as funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ são as componentes que formam o vetor $F(x, y)$; $\nabla f_1(x, y)$ e $\nabla f_2(x, y)$ são os gradientes de cada uma dessas componentes, isto é, os vetores formados por suas derivadas parciais em relação a x e a y ; os termos $2x$, $8y$, $-2x$ e 1 são os valores numéricos dessas derivadas parciais para o exemplo apresentado, ocupando as posições correspondentes na matriz.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia empregada possibilitou a resolução do sistema não linear, as aproximações iniciais escolhidas foram: $(1; 4)$, $(-1; 4)$ e $(0,1; -0,5)$. Dessa forma, o método convergiu para as respectivas soluções: $(1,322875656; 0,75)$, $(-1,322875656; 0,75)$ e $(2,848170623 \times 10^{-8}; -1)$.

O método de Newton-Raphson para sistemas não lineares exige uma aproximação inicial a partir da qual novas estimativas são calculadas iterativamente, aproximando-se progressivamente da solução até que um critério de parada, definido por um valor de erro pré-estabelecido, seja satisfeito.

Para o presente trabalho foi utilizado um valor de erro de 1×10^{-15} . A primeira e a segunda raízes foram obtidas após 7 iterações, enquanto a terceira raiz demandou 20 iterações até que o critério de erro fosse atendido.

Essa diferença no número de iterações está relacionada à curvatura local das curvas que compõem o sistema na região da aproximação inicial escolhida. O método de Newton-Raphson aproxima o comportamento do sistema não-linear por meio de um plano tangente, construído a partir da matriz Jacobiana, e avança em direção à raiz com base nessa aproximação linear local. Quando a estimativa inicial está situada em uma região onde a elipse e a parábola variam suavemente, essa aproximação linear é mais fiel ao comportamento real das curvas, permitindo que o método convirja em poucas iterações.

Por outro lado, quando a aproximação inicial se encontra em uma região de maior curvatura, a linearização proporcionada pelo Jacobiano representa menos precisamente a geometria das curvas naquele ponto, exigindo correções sucessivas e, conseqüentemente, um número maior de iterações até que o critério de erro estabelecido seja satisfeito, esse comportamento pode ser observado na terceira raiz, que exigiu um número significativamente maior de iterações para atingir a precisão estabelecida. A Figura 2 ilustra o processo de convergência de cada trajetória, desde a aproximação inicial até a solução final.

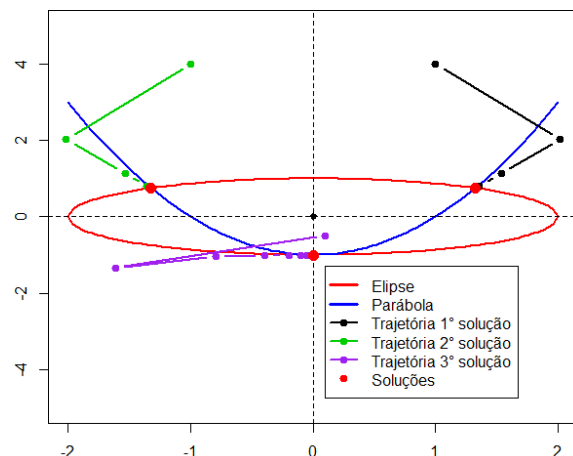


Figura 2: Trajetória de convergência do método de Newton-Raphson para as aproximações iniciais.

Como o Método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas não lineares traz uma aproximação da solução do sistema, tal resultado estará sujeito a um determinado erro. Essa discrepância pode ser obtida através do Erro Relativo (ER) entre os valores exatos que resolvem o sistema e os valores que o método convergiu, sendo os valores exatos os apresentados por Silva e Cardim (2009) de maneira analítica. Os

resultados que os autores obtiveram foram: $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e $(0; -1)$.

Tabela 1: Erro Relativo das soluções encontradas.

A.I.	S.O.	S.E.	E.R.(%)
(1;4)	(1,322876; 0,75)	$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4}\right)$	$3,54 \times 10^{-8}$
(-1;4)	(-1,322876; 0,75)	$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4}\right)$	$3,54 \times 10^{-8}$
(0,1;-0,5)	$(2,848171 \times 10^{-8}; -1)$	$(0; -1)$	$2,85 \times 10^{-8}$ *

A.I.: Aproximação Inicial; S.O.: Soluções Obtidas; S.E.: Soluções Exatas; E.R.: Erro Relativo.

*Para a terceira solução foi utilizado o erro absoluto na primeira coordenada, uma vez que o erro relativo é indefinido para valor exato nulo;

O Erro Relativo apresentado na Tabela 1 é referente à média entre os erros associados à cada componente x e y , porém como a única componente que apresenta certa discrepância é a componente x , podemos afirmar que o erro é referente à abscissa.

Quando se fez o estudo individual de cada uma das funções, foi possível observar sua forma a fim de entender como poderia vir a ser a sua contribuição para o vetor resultante.

Embora a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possa ser interpretada como um campo vetorial no plano, suas componentes podem ser analisadas individualmente como superfícies em $\mathbb{R}^3$, dadas por:

$$z = x^2 + 4y^2 \quad (8)$$

$$z = y - x^2 \quad (9)$$

onde (8) é a superfície no $\mathbb{R}^3$ associada à elipse, e (9) é a superfície em $\mathbb{R}^3$ associada à parábola.

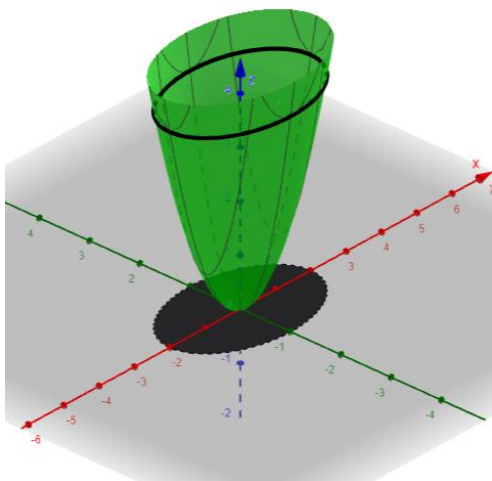


Figura 3: Representação da curva $x^2 + 4y^2$.

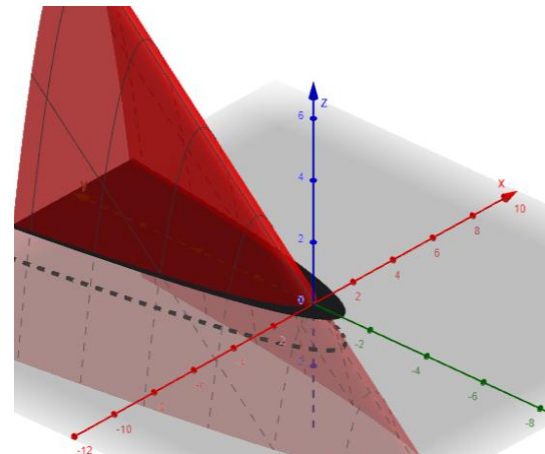


Figura 4: Representação da curva $y - x^2$.

Essa representação proporciona uma interpretação geométrica adicional dos conjuntos de nível, uma vez que as curvas de nível $x^2 + 4y^2 = 4$ e $y - x^2 = -1$ podem ser obtidas pelas interseções dessas superfícies com os planos horizontais $z = 4$ e $z = -1$, respectivamente.

Na Figura 3 e 4, foram apresentados a primeira e segunda curva respectivamente e também a planificação no plano xy de seus conjuntos de níveis, sendo nível (4) para a primeira e (-1) para a segunda:

Após a observação da origem das curvas em $\mathbb{R}^2$, foi possível encontrar os resultados esperados para a solução do problema através dos pontos de interseção das mesmas, que pode ser observado na Figura 5:

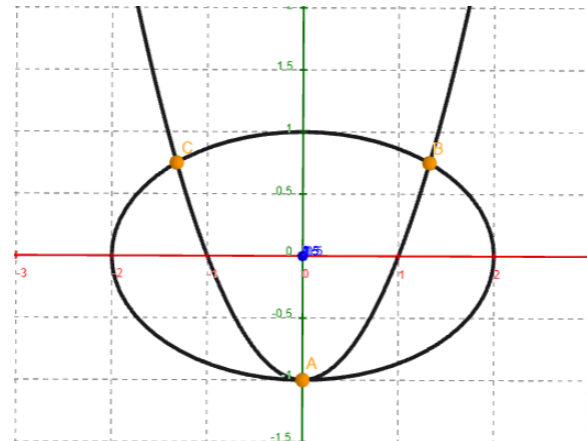


Figura 5: Pontos de interseção.

Além disso, pelo fato de o Jacobiano gerar uma função gradiente, todos os vetores sobre as curvas serão normais às mesmas e exatamente nos pontos de interseção teremos os dois vetores normais a cada uma das funções, tal característica pode ser observada pelos vetores vermelhos que são normais à elipse e os em azul escuro, normais à parábola, na Figura 6:

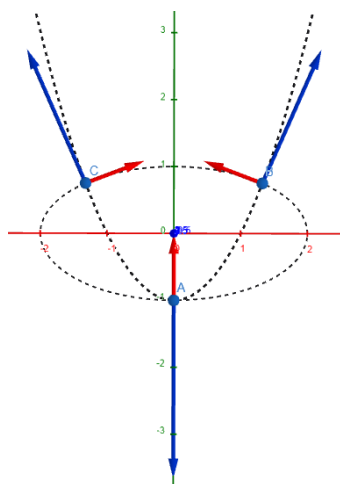


Figura 6: Representação dos vetores normais às curvas nos pontos solução.

Com isso, é possível concretizar a ligação geométrica entre, a solução do sistema não linear pelos métodos numéricos de Newton-Raphson, com o estudo das funções de várias variáveis interpretadas em funções vetoriais.

Devido ao estudo de funções em um determinado conjunto de níveis estar sendo interpretado para uma análise de campos vetoriais no plano - já que apresentam domínio e contradomínio em $\mathbb{R}^2$ - em cada ponto (x, y) do plano, existirão vetores associados cuja origem é o próprio ponto e as componentes serão dadas pela equação (2).

De maneira particular, nos pontos que correspondem ao conjunto de nível $(4, -1)$, ou melhor, pontos de intersecção das curvas, o campo assumirá o mesmo valor e produzirá três vetores com a mesma magnitude, direção e sentido. Porém, com pontos iniciais distintos. Tal comportamento pode ser observado pelos vetores em cor lilás na Figura 7:

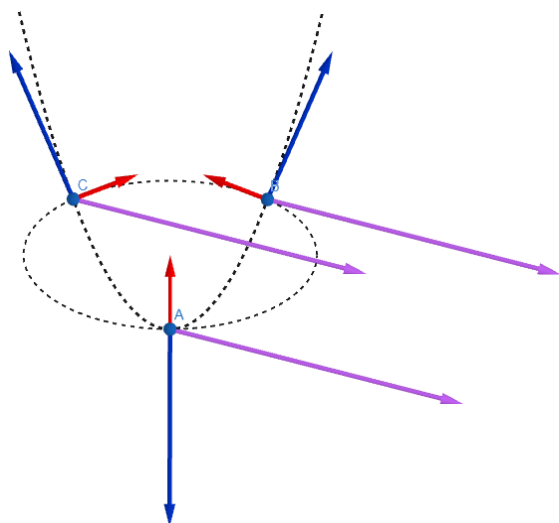


Figura 7: Vetores do campo vetorial nos pontos solução.

Por fim, utilizando também os recursos do *software* GeoGebra, as funções foram inseridas em uma ferramenta de campo vetorial já implementada no programa. Embora a visualização resultante apresente caráter mais ilustrativo do que analítico, é possível observar de forma geral o comportamento do campo vetorial, conforme representado na Figura 8:

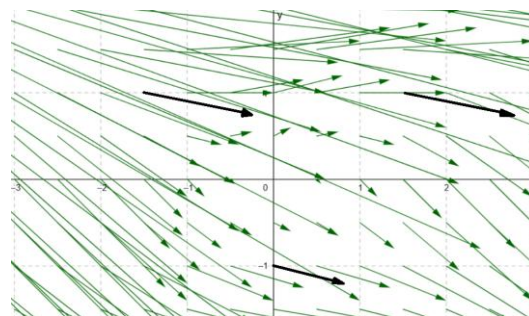


Figura 8: Campo vetorial com vetores solução selecionados.

Os três vetores em preto são destacados porque correspondem exatamente aos pontos da solução encontrada: $(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4})$, $(\frac{-\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{4})$ e $(0; -1)$. Nesses pontos específicos, o vetor do campo $F(x, y) = (4, -1)$, ou seja, são os únicos pontos do plano onde o campo vetorial assume exatamente o valor procurado, o conjunto de nível $(4, -1)$.

Dessa forma, é possível compreender o comportamento do campo vetorial formado pela função $F(x, y)$ e confirmar que os vetores nos pontos de solução do sistema são equivalentes.

CONCLUSÃO

Conclui-se, portanto, que com a interpretação gráfica da construção da solução, juntamente com a análise computacional do sistema por métodos iterativos, foi possível observar a ligação entre o cálculo vetorial nas definições vetoriais e os métodos computacionais do cálculo numérico para a solução do sistema não linear de várias variáveis.

E também, como proposições futuras, o presente estudo pode ser estendido para o âmbito da análise de sistemas não lineares de dimensões superiores, permitindo o estudo não só de curvas de níveis que representam o plano $\mathbb{R}^2$, mas também de superfícies de nível que representarão o espaço $\mathbb{R}^3$. Entretanto, quanto mais se eleva a dimensão a ser trabalhada, menos se consegue uma representação visual de suas funções, se limitando aos métodos computacionais.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de direcionar nossos agradecimentos aos professores responsáveis pelas disciplinas de Cálculo



Diferencial e Integral III e Cálculo Numérico, Dione I. C. Milani e Gustavo H. Dalposso. Agradecemos a disposição e a atenção depositada na construção do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

CHAPRA, Steven C; CANALE, Raymond P. Métodos numéricos para engenharia. 7. Porto Alegre: AMGH, 2016. 1 recurso online. ISBN 9788580555691.

GEOGEBRA. GeoGebra Clássico 6.0. Linz: International GeoGebra Institute, 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 22 jun. 2026.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, v. 3. 6. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 1 recurso online. ISBN 9788521635918.

HASSELMAN, B.; CARNELL, R. *nleqslv: Solve Systems of Nonlinear Equations*. Versão 3.3.7. Viena: CRAN, 2026. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=nleqslv>. Acesso em: 17 jun. 2026. DOI: <https://doi.org/10.32614/CRAN.package.nleqslv>.

R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Viena: R Foundation for Statistical Computing, 2026. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 17 jun. 2026.

RUGGIERO, Márcia Aparecida Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997.

SILVA, Mario Olivero da; CARDIM, Nancy de Souza. Cálculo III. Volume 2 – Módulo 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ / Consórcio Cederj, 2009. ISBN 978-85-7648-574-2. Disponível em: <https://canal.cecierj.edu.br/recurso/6490>

STEWART, James; CLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. Cálculo, v. 2. 6. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2022. 1 recurso online. ISBN 9786555584103.