

ESTUDO DO RESFRIAMENTO DE UMA PLACA METÁLICA PELA LEI DE NEWTON UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E MÉTODOS NUMÉRICOS

Bruna Ferraz de Aguiar¹, Ana Clara Campagnolo¹, Luiz Guilherme Mattei Rodrigues¹, Karen Carrilho da Silva Lira²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Toledo, Brasil.
(brunaferraz@alunos.utfpr.edu.br; anacampagnolo@alunos.utfpr.edu.br;
luizr.2007@alunos.utfpr.edu.br)

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná (COMAT - UTFPR), Campus Toledo, Brasil. (karenc@utfpr.edu.br)

Resumo: Este trabalho analisa a aplicação da Lei do Resfriamento de Newton ao resfriamento de uma placa metálica aquecida. Medições em cinco pontos foram comparadas com a solução analítica da EDO e aproximações pelo Método de Euler ($\Delta t = 10s$). Os resultados evidenciaram decaimento térmico exponencial e concordância entre modelo e experimento, com erro percentual máximo de 16,22%, validando a representação global do sistema.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Lei do Resfriamento de Newton; Cálculo Numérico; Modelagem Matemática.

INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um fenômeno físico presente em diversas situações do cotidiano e em inúmeras aplicações da engenharia, física e indústria. O estudo desse processo permite compreender o comportamento térmico de materiais e sistemas, sendo fundamental para o desenvolvimento de tecnologias relacionadas ao controle de temperatura, eficiência energética e processos industriais. Entre os modelos matemáticos utilizados para descrever a transferência de calor, destaca-se a Lei do Resfriamento de Newton, proposta por Isaac Newton. Conforme descrito por Halliday et al. (1983), essa lei estabelece que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e a sua vizinhança, desde que essa diferença não seja excessivamente grande.

A modelagem matemática de fenômenos térmicos constitui uma importante ferramenta para compreender e prever o comportamento de sistemas físicos, visto que muitas leis fundamentais são expressas em termos de taxas de variação e derivadas. Nesse contexto, a Lei do Resfriamento de Newton pode ser representada por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem, conforme formalizado por Zill e Cullen (2001). Essa formulação permite obter soluções analíticas capazes de descrever a evolução da temperatura ao longo do

tempo. Além disso, quando se deseja comparar o modelo teórico com dados experimentais ou analisar o comportamento do sistema de forma discreta, métodos numéricos, como o Método de Euler, detalhado por Chapra e Canale (2008), podem ser empregados para obter aproximações computacionais da solução.

O presente trabalho tem como objetivo analisar o processo de resfriamento de uma placa metálica aquecida por meio da Lei do Resfriamento de Newton, relacionando conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo Numérico. Para isso, foram realizadas medições de temperatura em diferentes regiões da placa durante o processo de resfriamento, permitindo a construção de um conjunto de dados experimentais para análise do comportamento térmico do sistema. A relevância deste estudo está na integração entre modelagem matemática e experimentação, possibilitando a comparação entre o comportamento previsto pelo modelo teórico e os resultados obtidos na prática, avaliando as potencialidades e limitações da Lei do Resfriamento de Newton na representação de sistemas físicos reais.

REFERENCIAL TEÓRICO



Este capítulo apresenta os principais conceitos teóricos que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, são abordados os aspectos relacionados à Lei do Resfriamento de Newton e às Equações Diferenciais Ordinárias, que constituem a base matemática do modelo estudado. Em seguida, são discutidos conceitos de Cálculo III aplicados à transferência de calor e os métodos numéricos utilizados para a resolução e simulação do problema proposto.

Lei do Resfriamento de Newton

A Lei do Resfriamento de Newton descreve o comportamento térmico de um corpo submetido a um ambiente com temperatura constante. Segundo Halliday et al. (1983), essa lei estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre sua temperatura instantânea e a temperatura do meio em que está inserido, desde que essa diferença não seja excessivamente grande.

Matematicamente, a descrição verbal desse fenômeno é traduzida na Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem expressa na Equação (1):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (1)$$

Em que T representa a temperatura do corpo, T_a corresponde à temperatura ambiente e k é uma constante positiva relacionada às características físicas do sistema. O sinal negativo indica que a temperatura do corpo tende a diminuir ao longo do tempo, aproximando-se da temperatura ambiente.

De acordo com esse modelo, quanto maior for a diferença entre a temperatura do corpo e a do ambiente, mais rapidamente ocorrerá o processo de resfriamento. À medida que essa diferença diminui, a taxa de resfriamento também reduz, fazendo com que a temperatura do corpo se aproxime gradualmente da temperatura ambiente.

Por se tratar de uma equação linear e de variáveis separáveis, sua solução pode ser obtida pelo método de separação de variáveis, resultando na função exponencial apresentada na Equação (2):

$$(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (2)$$

Em que T_0 representa a temperatura inicial do corpo. Essa solução demonstra que a temperatura varia de forma exponencial ao longo do tempo, aproximando-se assintoticamente da temperatura ambiente. A constante de resfriamento (k) depende das características físicas do sistema, como geometria, material, área de troca térmica e condições de convecção com o ambiente. Embora a solução apresentada seja exata para as hipóteses assumidas

pelo modelo, sua adequação para representar um sistema físico real depende da comparação com dados experimentais e da análise das simplificações adotadas, como a consideração de uma temperatura ambiente constante e de propriedades térmicas uniformes.

Equações Diferenciais Ordinárias

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são amplamente utilizadas para descrever fenômenos que apresentam variação ao longo do tempo. Segundo Boyce et al. (2017), uma equação diferencial relaciona uma função desconhecida com suas derivadas, permitindo modelar matematicamente diversos processos físicos, químicos e biológicos.

A Lei do Resfriamento de Newton, apresentada na Equação (1), pode ser classificada como uma EDO linear de primeira ordem. De acordo com Zill e Cullen (2001), essa classificação ocorre porque a equação envolve apenas derivadas em relação a uma única variável independente, o tempo, e a função desconhecida aparece com grau igual a um.

A solução da EDO apresentada na Equação (1) resulta em uma função exponencial que descreve a evolução da temperatura ao longo do tempo. À medida que o tempo passa, a temperatura do corpo aproxima-se gradualmente da temperatura ambiente, caracterizando o processo de equilíbrio térmico.

Dessa forma, as EDOs fornecem a base matemática necessária para compreender e prever o comportamento do sistema estudado, permitindo comparar os resultados teóricos com os dados obtidos experimentalmente.

Conceitos de Cálculo III Aplicados à Transferência de Calor

O estudo da transferência de calor está relacionado a diversos conceitos abordados em Cálculo III. Em situações reais, a temperatura de um corpo pode variar não apenas com o tempo, mas também com a posição em que a medição é realizada.

No experimento realizado, a temperatura da placa pode ser interpretada como uma função de três variáveis, $T(x, y, t)$, em que x e y representam a posição do ponto analisado na superfície da placa e t representa o tempo. Dessa forma, cada ponto da placa pode apresentar uma evolução térmica distinta durante o resfriamento, caracterizando uma distribuição espacial e temporal de temperatura.

Nesse contexto, conceitos como derivadas parciais e gradiente tornam-se importantes para descrever como a temperatura varia em diferentes regiões do sistema. Segundo Stewart (2014), o gradiente indica a direção de maior variação de uma função, sendo amplamente utilizado na análise de fenômenos físicos que envolvem distribuição de temperatura.



Embora o modelo adotado neste trabalho considere apenas a variação temporal da temperatura, os conceitos de Cálculo III auxiliam na interpretação das diferenças observadas entre os pontos medidos na placa metálica e na compreensão das limitações associadas à hipótese de temperatura uniforme do sistema.

Além disso, ferramentas estudadas em Cálculo III, como integrais múltiplas, são empregadas em problemas de engenharia para determinar valores médios em superfícies e volumes, contribuindo para uma compreensão mais ampla dos fenômenos de transferência de calor.

Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais

Embora algumas equações diferenciais possuam soluções analíticas exatas, muitos problemas encontrados na prática exigem o uso de métodos numéricos para obter aproximações. Segundo Chapra e Canale (2008), esses métodos são amplamente utilizados na engenharia e nas ciências aplicadas, permitindo resolver problemas que seriam difíceis ou inviáveis de tratar apenas por meio de técnicas analíticas.

Os métodos numéricos consistem em procedimentos matemáticos que aproximam a solução de uma equação diferencial em pontos discretos do domínio. Entre os métodos mais conhecidos destaca-se o Método de Euler, que utiliza a inclinação da curva em um determinado ponto para estimar o valor da solução no ponto seguinte. Além dele, existem métodos mais avançados, como os métodos de Runge-Kutta, que geralmente fornecem aproximações mais precisas.

A precisão das soluções numéricas está diretamente relacionada ao tamanho do passo de integração Δt . Em geral, quanto menor for o passo utilizado, mais próxima a solução numérica tende a ficar da solução exata. Entretanto, a redução do passo também aumenta a quantidade de cálculos necessários para a obtenção dos resultados.

No caso específico da Lei do Resfriamento de Newton, o Método de Euler fornece uma aproximação sucessiva da temperatura do sistema em instantes discretos de tempo, permitindo comparar os valores numéricos obtidos com a solução analítica e com os dados experimentais. Embora apresente erros de truncamento associados ao tamanho do passo de integração, o método possui grande importância didática e computacional devido à sua simplicidade de implementação.

Neste trabalho, os métodos numéricos são empregados como ferramenta complementar à solução analítica e aos dados experimentais obtidos durante o resfriamento da placa metálica. A

comparação entre os resultados teóricos, numéricos e experimentais permite avaliar a adequação do modelo matemático adotado e compreender possíveis diferenças observadas durante o experimento.

Análise Numérica e Avaliação dos Erros

Em aplicações práticas, os resultados obtidos por um modelo matemático nem sempre coincidem exatamente com os valores observados experimentalmente. Essas diferenças podem ocorrer devido às simplificações adotadas pelo modelo, às limitações dos instrumentos de medição e às condições reais do experimento. Dessa forma, a análise dos erros torna-se importante para avaliar a qualidade dos resultados obtidos.

Segundo Chapra e Canale (2008), medidas como erro absoluto, erro relativo e erro percentual são amplamente utilizadas para comparar valores teóricos e experimentais. O erro absoluto E_a corresponde ao módulo da diferença entre a temperatura medida experimentalmente T_{exp} e a temperatura calculada pelo modelo T_{ana} , conforme mostrado na Equação (3):

$$E_a = |T_{\text{exp}} - T_{\text{ana}}| \quad (3)$$

A partir do erro absoluto, podem ser calculados o erro relativo E_r e o erro percentual E_p , apresentados nas Equações (4) e (5):

$$E_r = \frac{|T_{\text{exp}} - T_{\text{ana}}|}{T_{\text{exp}}} \quad (4)$$

$$E_p = \left(\frac{|T_{\text{exp}} - T_{\text{ana}}|}{T_{\text{exp}}} \right) \times 100 \quad (5)$$

Neste trabalho, essas medidas são utilizadas para comparar os valores de temperatura obtidos experimentalmente com aqueles previstos pela Lei do Resfriamento de Newton. A análise dos erros permite verificar o quão próximo o modelo está dos dados observados e identificar possíveis diferenças causadas pelas condições reais do experimento. Além de quantificar a diferença entre os resultados teóricos e experimentais, a análise dos erros permite avaliar as limitações do modelo matemático e identificar possíveis influências de fatores físicos não contemplados pela Lei do Resfriamento de Newton, como perdas de calor não uniformes e variações espaciais de temperatura na placa metálica.

MATERIAL E MÉTODOS

Esta pesquisa caracteriza-se como um estudo experimental e quantitativo, com o objetivo de analisar o processo de resfriamento de uma placa metálica por meio da Lei do Resfriamento de

Newton, integrando conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo Numérico.

Para a realização do experimento, foram utilizados uma placa metálica, uma fonte de calor para o aquecimento inicial, um termômetro infravermelho digital GM320 para a aferição da temperatura superficial e um cronômetro para o controle dos intervalos de tempo. Adicionalmente, empregou-se o ambiente computacional R para o processamento dos dados, implementação das rotinas numéricas e elaboração das análises gráficas.

O procedimento experimental foi iniciado com o aquecimento da placa metálica até atingir aproximadamente 75°C. Após o aquecimento, foram definidos cinco pontos de medição distribuídos sobre a superfície da placa: região superior esquerda, região superior direita, região inferior esquerda, região inferior direita e região central (Ponto 5). As medições foram realizadas em ambiente com temperatura aproximada de 21°C. No instante inicial ($t = 0s$), registrou-se a temperatura da placa e, a partir desse momento, foram realizadas novas medições a cada 10 segundos, durante um período total de 60 segundos. O ponto central (Ponto 5) foi escolhido para a análise quantitativa por ser a região menos sujeita a efeitos de borda, representando mais adequadamente a temperatura média da placa.

Para a análise dos dados, utilizou-se a Lei do Resfriamento de Newton para modelar matematicamente o fenômeno por meio da equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (6)$$

em que (T) representa a temperatura do corpo, (T_a) corresponde à temperatura ambiente e (k) é a constante de resfriamento. A solução analítica da equação foi obtida pelo método de separação de variáveis, resultando em

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (7)$$

em que (T_0) representa a temperatura inicial do corpo. A constante de resfriamento ($k = 0,028, s^{-1}$) foi determinada empiricamente por meio de um ajuste iterativo. O procedimento consistiu em comparar sucessivamente os valores previstos pelo modelo analítico com os dados experimentais, adotando-se o valor de (k) que apresentou a melhor concordância global entre as curvas teórica e experimental.

Posteriormente, aplicou-se o Método de Euler para obter aproximações numéricas da solução da equação diferencial, utilizando um passo de integração de 10 segundos, correspondente ao intervalo adotado durante a coleta dos dados experimentais. Os desvios entre os valores preditos pelo modelo (T_{ana}) e os

valores experimentais (T_{exp}) foram quantificados por meio do erro absoluto (E_a) e do erro percentual (E_p), conforme descrito por Chapra e Canale (2008).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os dados obtidos durante o experimento de resfriamento da placa metálica, bem como as análises realizadas a partir da modelagem matemática e da aplicação de métodos numéricos.

A Tabela 1 apresenta as temperaturas medidas nos cinco pontos monitorados da placa ao longo de 60 segundos de resfriamento.

Tabela 1. Temperaturas medidas nos cinco pontos da placa metálica durante o resfriamento.

Tempo(s)	P1	P2	P3	P4	P5
0	75	75	67	65	75
10	55	55	52	53	60
20	49	50	49	48	53
30	45	45	42	42	48
40	41	42	39	41	45
50	38	38	36	39	41
60	36	36	34	33	37

Nota: P1(Superior Esquerdo); P2 (Superior Direito); P3 (Inferior Esquerdo); P4 (Inferior Direito); P5 (Centro)

A análise dos dados experimentais mostra que diferentes regiões da placa apresentaram temperaturas distintas ao longo do tempo. Sob a perspectiva do Cálculo III, esse comportamento indica que a temperatura não depende apenas da variável temporal, mas também da posição na superfície da placa. Assim, o campo de temperatura pode ser representado por uma função escalar $T(x, y, t)$. As diferenças observadas entre os pontos sugerem a existência de gradientes térmicos, indicando regiões em que a variação espacial da temperatura é mais intensa.

Considerando a temperatura ambiente de 21°C, foi aplicada a Lei do Resfriamento de Newton para modelar o comportamento térmico do sistema. Para demonstrar a integração entre a modelagem contínua e as aproximações discretas, o comportamento da região central da placa (Ponto 5), escolhida por estar menos sujeita aos efeitos de borda, foi avaliado sob três perspectivas: os dados experimentais medidos (T_{exp}), a solução analítica exata da EDO (T_{ana}) e a aproximação numérica pelo Método de Euler (T_{num}) com passo de integração $\Delta t = 10s$ e $k = 0,028 s^{-1}$.



A Tabela 2 apresenta essa comparação direta, evidenciando a convergência entre a teoria, o método numérico e o experimento físico.

Tabela 2. Comparação entre valores experimentais, analíticos e numéricos (Método de Euler) para o Ponto 5.

Tempo(s)	Experimental (Texp)	Analítico (Tana)	Euler (Tnum)
0	75	75,00	75,00
10	60	61,92	59,88
20	53	51,98	48,99
30	48	44,43	41,15
40	45	38,70	35,51
50	41	34,35	31,45
60	37	31,04	28,52

Os resultados mostram que o modelo baseado na Lei do Resfriamento de Newton foi capaz de representar adequadamente a tendência geral de diminuição da temperatura ao longo do tempo, reproduzindo o comportamento exponencial esperado para o processo de resfriamento. Observa-se que tanto a temperatura calculada analiticamente quanto a aproximação numérica acompanham o comportamento dos dados experimentais, aproximando-se gradualmente da temperatura ambiente, conforme previsto pela teoria.

Entretanto, diferenças entre os valores teóricos e experimentais tornam-se mais evidentes nos instantes finais do experimento. O maior erro percentual observado foi de aproximadamente 16,22% aos 50 segundos. Os valores de erro percentual apresentados neste trabalho foram calculados a partir da comparação entre os dados experimentais e a solução analítica da Lei do Resfriamento de Newton. Os resultados obtidos pelo Método de Euler são apresentados com finalidade comparativa e ilustrativa da aproximação numérica. Esse comportamento sugere que as simplificações adotadas pelo modelo, como a hipótese de temperatura uniforme e a consideração de um único parâmetro de resfriamento, tornam-se menos adequadas para representar o comportamento térmico real da placa ao longo do tempo. Além disso, pequenas diferenças podem estar associadas às incertezas inerentes ao processo experimental e às limitações das aproximações numéricas empregadas, como o erro de truncamento local do Método de Euler.

Ao analisar os dados da Tabela 1, observa-se que os diferentes pontos da placa apresentaram temperaturas

distintas ao longo do experimento. Isso indica que o calor não se distribuiu de maneira perfeitamente uniforme na superfície, situação esperada em sistemas físicos reais. Dessa forma, embora a Lei do Resfriamento de Newton seja adequada para descrever o comportamento térmico global da placa, ela não representa detalhadamente as variações espaciais de temperatura observadas durante o ensaio.

De modo geral, os resultados obtidos demonstram que o modelo adotado foi capaz de representar satisfatoriamente o processo de resfriamento da placa metálica. A apresentação conjunta dos dados experimentais, da solução analítica e das aproximações numéricas permitiu uma avaliação mais abrangente do fenômeno, evidenciando as potencialidades e limitações da Lei do Resfriamento de Newton quando aplicada a um sistema físico real.

CONCLUSÃO

Este trabalho cumpriu os objetivos propostos ao analisar o processo de resfriamento de uma placa metálica por meio da Lei do Resfriamento de Newton, integrando conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo Numérico e Cálculo III. A comparação entre os dados experimentais, a solução analítica e as aproximações obtidas pelo Método de Euler evidenciou a importância da integração entre teoria, experimentação e simulação computacional na análise de fenômenos físicos.

Os resultados mostraram que o modelo matemático adotado foi capaz de representar satisfatoriamente a tendência global de redução da temperatura e sua aproximação gradual à temperatura ambiente. O maior desvio percentual observado, de aproximadamente 16,22%, indica que as simplificações assumidas pelo modelo, como a hipótese de temperatura uniforme e a utilização de um único parâmetro de resfriamento, apresentam limitações quando aplicadas a um sistema físico real.

Além disso, a variação de temperatura observada entre os diferentes pontos da placa evidenciou que o comportamento térmico do sistema depende simultaneamente da posição e do tempo. Essa observação permitiu relacionar o estudo aos conceitos de funções de várias variáveis, derivadas parciais e gradiente, abordados em Cálculo III, contribuindo para uma compreensão mais ampla do fenômeno de transferência de calor.

Dessa forma, conclui-se que a Lei do Resfriamento de Newton constitui uma ferramenta adequada para descrever o comportamento global do processo de resfriamento analisado, embora apresente limitações na representação detalhada das variações espaciais de temperatura observadas experimentalmente.



Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a realização de experimentos com um número maior de pontos de medição e intervalos de tempo menores, bem como a utilização de modelos matemáticos mais avançados que considerem explicitamente as variações de temperatura ao longo da superfície do material.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 11. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983. v. 1.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, JR., J. W. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. 7. ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2008.
- STEWART, J. *Cálculo*. Tradução de EZ2translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 2.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. Tradução de Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.