



IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DO TELEGRAFISTA NO CLAWPACK UTILIZANDO MÉTODOS DE VOLUMES FINITOS

Diogo Barbosa Ferreira da Silva¹, Juliana Bertoco²

¹Universidade Federal de Lavras – UFLA, São Sebastião do Paraíso, Brasil (diogo.silva5@estudante.ufla.br)

²Universidade Federal de Lavras – UFLA, São Sebastião do Paraíso, Brasil.

Resumo: Apresenta-se a resolução numérica da equação do telegrafista, modelo utilizado na propagação de sinais elétricos e ondas com dissipação. A equação é reformulada como um sistema hiperbólico de primeira ordem, adequado para métodos de volumes finitos, e implementada no Clawpack. São obtidos os autovalores, autovetores, a decomposição característica e o solucionador de Riemann do sistema. Os resultados apresentaram excelente concordância com a solução analítica de d'Alembert, validando a implementação para o caso homogêneo da equação do telegrafista.

Palavras-chave: Clawpack; Equação do telegrafista; Volumes finitos; Sistemas hiperbólicos; Solucionador de Riemann.

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais parciais hiperbólicas desempenham papel fundamental na modelagem matemática de fenômenos associados à propagação de ondas, transporte de informação e dinâmica de sinais ao longo do espaço e do tempo. Problemas envolvendo propagação acústica, dinâmica dos fluidos, equações de Maxwell e transmissão de sinais elétricos podem frequentemente ser descritos por sistemas hiperbólicos (LeVeque, 2002).

Entre os modelos clássicos relacionados à propagação de sinais destaca-se a equação do telegrafista, originalmente desenvolvida para descrever o comportamento elétrico em linhas de transmissão. Este modelo é obtido a partir das equações diferenciais para a tensão $V(x, t)$ e corrente $I(x, t)$ em uma linha com parâmetros distribuídos: resistência em série R , indutância em série L , condutância em paralelo G e capacitância em paralelo C . Aplicando as leis de Kirchhoff, obtém-se um sistema acoplado que, ao eliminar a corrente, resulta na equação escalar (1), onde os coeficientes a e b relacionam-se com os parâmetros da linha e com as perdas do dielétrico.

A equação do telegrafista possui a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, \quad (1)$$

onde $u = u(x, t)$ representa a variável transportada, $c > 0$ corresponde à velocidade de propagação das ondas, a representa o coeficiente de amortecimento e b está associado a um termo reativo do sistema.

A presença das derivadas de segunda ordem caracteriza o comportamento ondulatório da equação. Diferentemente da equação clássica da onda, o termo proporcional a u_t incorpora dissipação de energia, permitindo modelar a atenuação de sinais durante a propagação.

Do ponto de vista numérico, a resolução de sistemas hiperbólicos exige métodos capazes de representar adequadamente a propagação de ondas e informações características. Nesse contexto, métodos de volumes finitos têm sido amplamente utilizados devido à sua capacidade de lidar com propagação de descontinuidades, conservação numérica e velocidades características do sistema (Toro, 2009).

Em muitos métodos modernos, sistemas hiperbólicos são escritos na forma conservativa

$$q_t + f(q)_x = \psi(q), \quad (2)$$

ou equivalentemente,

$$q_t + Aq_x = \psi(q), \quad (3)$$

onde q representa o vetor de variáveis de estado, A corresponde à matriz associada ao fluxo do sistema e $\psi(q)$ representa possíveis termos fonte.

A formulação conservativa é particularmente importante para utilização de solucionadores de Riemann, ferramentas fundamentais em métodos de volumes finitos aplicados a sistemas hiperbólicos. Esses solucionadores baseiam-se na decomposição da solução em ondas características propagando-se ao longo das interfaces da malha numérica associadas à parte hiperbólica do sistema.



Uma vez obtida essa formulação, torna-se possível empregar solucionadores de Riemann implementados em bibliotecas computacionais como o Clawpack (*Conservation Laws Package*), biblioteca computacional desenvolvida para resolução numérica de leis de conservação e sistemas hiperbólicos utilizando métodos de volumes finitos e solucionadores de Riemann (LEVEQUE, 2002; CLAWPACK, s.d.). O método implementado no Clawpack acompanha a propagação das ondas entre as células da malha, utilizando decomposição característica baseada nos autovalores e autovetores do sistema.

No presente trabalho, a equação do telegrafista é reformulada como um sistema hiperbólico de primeira ordem adequado para métodos de volumes finitos. Em seguida, foi realizada a implementação numérica da versão homogênea do problema no Clawpack, com o objetivo de analisar a propagação das ondas, estudar a estrutura característica do sistema e validar o solucionador de Riemann utilizado na discretização numérica. A solução numérica foi comparada com a solução analítica de d'Alembert como procedimento de validação do método.

METODOLOGIA

A equação do telegrafista (1) foi aproximada numericamente utilizando o método de volumes finitos e a estrutura computacional Clawpack.

Para utilização no Clawpack, a equação foi reformulada como um sistema de primeira ordem. Foram introduzidas as variáveis auxiliares

$$q_1 = u, \quad q_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad q_3 = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4)$$

Com essas definições, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial t} = q_2, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} = c^2 \frac{\partial q_3}{\partial x} + bq_1 - aq_2, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{\partial q_2}{\partial x}. \end{cases} \quad (5)$$

Definindo o vetor de variáveis de estado

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

o sistema pode ser escrito na forma

$$q_t + Aq_x = \psi(q), \quad (7)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

e

$$\psi(q) = \begin{pmatrix} q_2 \\ bq_1 - aq_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

A formulação adotada separa naturalmente a dinâmica hiperbólica do sistema e os termos fonte. A parte hiperbólica principal é dada por

$$\begin{cases} q_{2,t} = c^2 q_{3,x}, \\ q_{3,t} = q_{2,x}, \end{cases} \quad (10)$$

enquanto os termos fonte são tratados separadamente por meio de *operator splitting* (LEVEQUE, 2002),

$$\begin{cases} q_{1,t} = q_2, \\ q_{2,t} = bq_1 - aq_2. \end{cases} \quad (11)$$

Neste trabalho, inicialmente considera-se o caso em que $a = b = 0$, utilizado para validação numérica da propagação hiperbólica. Assim, a forma conservativa associada à parte hiperbólica pode ser escrita como

$$q_t + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = \psi(q), \quad (12)$$

com fluxo

$$f(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -c^2 q_3 \\ -q_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

e

$$\psi(q) = \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

A matriz Jacobiana do fluxo é constante e coincide com a matriz A , simplificando a construção do solucionador de Riemann (TORO, 2009).

Os autovalores do sistema são obtidos pela condição

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (15)$$

resultando em

$$\lambda_1 = -c, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = c. \quad (16)$$

Como os autovalores são reais e existe um conjunto completo de autovetores linearmente independentes, o sistema é hiperbólico.

Um conjunto de autovetores associados é dado por



$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Os vetores r_1 e r_3 estão associados às ondas propagando-se para esquerda e direita com velocidades $-c$ e c , respectivamente. O autovalor nulo está associado à variável auxiliar $q_1 = u$, não correspondendo diretamente a uma onda propagante independente do subsistema hiperbólico.

No método de volumes finitos utilizado pelo Clawpack, o domínio espacial é dividido em células da forma

$$\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad (18)$$

armazenando-se em cada célula a média aproximada da solução,

$$Q_i^n, \quad (19)$$

onde i representa a posição espacial da célula e n o instante temporal.

Em cada interface da malha existe um salto local da solução,

$$\Delta Q = Q_i - Q_{i-1}, \quad (20)$$

interpretado pelo Clawpack como um problema de Riemann. Esse salto é decomposto em combinações lineares dos autovetores do sistema,

$$\Delta Q = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3. \quad (21)$$

As ondas características são construídas na forma

$$W^p = \alpha_p r_p, \quad (22)$$

com velocidades associadas aos autovalores

$$\lambda_1 = -c, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = c. \quad (23)$$

O Clawpack separa automaticamente as ondas de acordo com o sinal das velocidades características. Ondas com velocidade negativa propagam-se para a esquerda, enquanto ondas com velocidade positiva propagam-se para a direita. Essa decomposição gera as flutuações negativas e positivas, denominadas por $amdq$ e $apdq$,

$$A^- \Delta Q = \sum_{\lambda_p < 0} \lambda_p W^p, \quad (24)$$

e

$$A^+ \Delta Q = \sum_{\lambda_p > 0} \lambda_p W^p. \quad (25)$$

A atualização temporal utilizada pelo Clawpack é dada por

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(apdq_{i-\frac{1}{2}} + amdq_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad (26)$$

obtida a partir da formulação de volumes finitos associada ao método de Euler explícito (STRAUSS, 2007). Os termos fonte foram tratados separadamente através de *operator splitting*, permitindo atualizar a variável $q_1 = u$ e incorporar posteriormente os efeitos dissipativos e reativos do modelo.

A implementação foi construída a partir da adaptação do exemplo unidimensional de acústica disponível no Clawpack, realizando modificações no número de equações, número de ondas, condição inicial e solucionador de Riemann.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os parâmetros físicos adotados nas simulações foram $c = 2$, correspondente à velocidade de propagação da onda, e $\beta = 200$, parâmetro responsável pela largura da condição inicial gaussiana. A discretização espacial foi realizada por meio do método de volumes finitos com solucionador de Riemann de Godunov, reconstrução de segunda ordem (Lax–Wendroff com limitador MC) e limitador MC configurado com parâmetros $[4, 4, 4]$, conforme implementado no Clawpack. As condições de contorno foram tratadas por extrapolação linear, permitindo que as ondas deixassem o domínio computacional sem a ocorrência de reflexões numéricas espúrias. Como condição inicial, adotou-se uma distribuição gaussiana da forma

$$u(x, 0) = e^{-\beta x^2}, \quad (27)$$

com velocidade inicial nula,

$$u_t(x, 0) = 0. \quad (28)$$

A derivada espacial inicial foi obtida analiticamente a partir da condição inicial,

$$u_x(x, 0) = -2\beta x e^{-\beta x^2}. \quad (29)$$

Para o caso homogêneo considerado neste trabalho, com $a = b = 0$, a equação do telegrafista coincide com a equação clássica da onda unidimensional,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (30)$$

Nessa situação, a solução analítica é dada pela fórmula de d'Alembert (STRAUSS, 2007),

$$u(x, t) = \frac{1}{2} g(x - ct) + \frac{1}{2} g(x + ct), \quad (31)$$

em que

$$g(x) = e^{-\beta x^2}. \quad (32)$$

Para avaliar a precisão da implementação numérica, foram realizadas simulações utilizando malhas com $N = 256, 512$ e 1024 células, considerando o domínio espacial $[-2, 2]$ e tempo final $t_f = 0.8$.

A Figura 1 apresenta a comparação entre as soluções numérica e analítica para os diferentes níveis de refinamento de malha. Observa-se excelente concordância entre ambas, evidenciando que a implementação numérica reproduz corretamente a dinâmica de propagação prevista pela solução analítica de d'Alembert. Conforme esperado para o caso homogêneo, a condição inicial gaussiana divide-se em duas ondas propagando-se em sentidos opostos com velocidades $\lambda = \pm c$, em acordo com a estrutura característica do sistema.

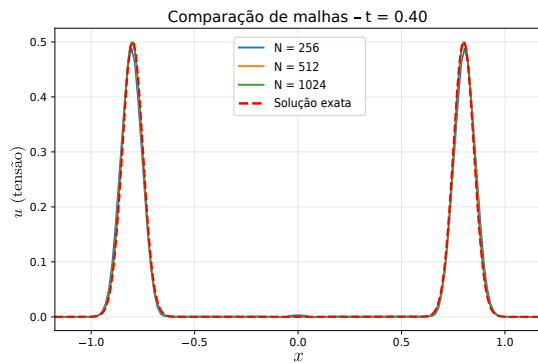


Figura 1: Comparação da solução numérica para diferentes malhas ($N = 256, 512, 1024$) com a solução analítica de d'Alembert (linha vermelha tracejada) em $t = 0.4$.

A Figura 2 apresenta uma ampliação da região correspondente ao pico da onda à esquerda, permitindo visualizar com maior clareza os efeitos do refinamento de malha.

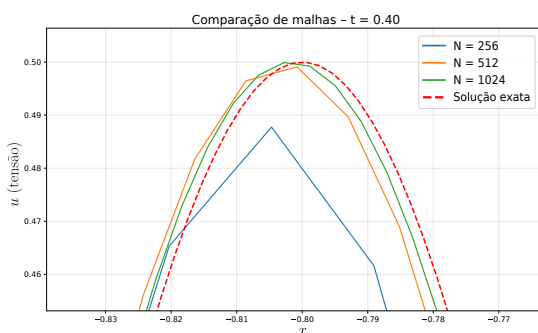


Figura 2: Zoom no pico da gaussiana que se desloca para a esquerda ($x < 0$).

Observa-se que todas as discretizações apresentam boa concordância com a solução analítica, sendo que as diferenças diminuem progressivamente à medida que o número de células aumenta. Esse comportamento

evidencia a convergência da solução numérica sob refinamento espacial e é consistente com o esquema numérico de segunda ordem empregado, cuja reconstrução espacial proporciona maior precisão à medida que a malha é refinada. Uma análise quantitativa da taxa de convergência e dos erros numéricos será realizada em trabalhos futuros.

A Figura 3 apresenta a evolução temporal da solução para os instantes $t = 0.10, t = 0.30$ e $t = 0.50$, considerando a malha mais refinada ($N = 1024$). Para a variável tensão, observa-se concordância entre a solução numérica e a solução analítica de d'Alembert (Equação 31) em todos os instantes analisados, evidenciando que a implementação reproduz corretamente a dinâmica de propagação prevista para o caso homogêneo da equação do telegrafista. Observa-se ainda que o perfil gaussiano mantém sua forma durante a propagação, comportamento esperado na ausência de mecanismos de dissipação e dispersão. Além disso, a variável correspondente à derivada temporal apresenta regiões positivas e negativas associadas ao deslocamento das frentes de onda, em concordância com a dinâmica característica de sistemas hiperbólicos.

A decomposição característica implementada no solucionador de Riemann mostrou-se adequada para representar a propagação das ondas entre as células da malha numérica. As velocidades de propagação mantiveram-se compatíveis com os autovalores do sistema, enquanto a solução numérica apresentou excelente concordância com a solução analítica ao longo de toda a simulação. Pequenas discrepâncias foram observadas apenas nas proximidades das fronteiras do domínio computacional, sendo atribuídas aos efeitos da discretização espacial e ao tratamento das condições de contorno. Esses resultados confirmam a correta implementação do solucionador de Riemann, da decomposição característica e do procedimento de *operator splitting* empregados na formulação numérica do problema.

Do ponto de vista físico, a separação da condição inicial em duas ondas propagando-se em sentidos opostos representa a propagação de um pulso de tensão em uma linha de transmissão ideal, na ausência de perdas. Nesse regime, a velocidade de fase coincide com a velocidade de grupo ($v_f = v_g = c$), caracterizando uma propagação não dispersiva e sem atenuação, em concordância com a teoria. Em linhas reais, os coeficientes a e b estão associados, respectivamente, às perdas ôhmicas nos condutores e aos efeitos reativos e dispersivos do meio, permitindo representar de forma mais realista a propagação dos sinais.

A validação numérica realizada para o caso homogêneo demonstra que a implementação desenvolvida reproduz corretamente a solução analítica de d'Alembert, constituindo uma etapa fundamental para a extensão do mo-

delo. Como continuidade deste trabalho, pretende-se incorporar os termos dissipativos e reativos da equação do telegrafista ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), possibilitando a investigação quantitativa dos efeitos de atenuação, dispersão e perdas durante a propagação das ondas.

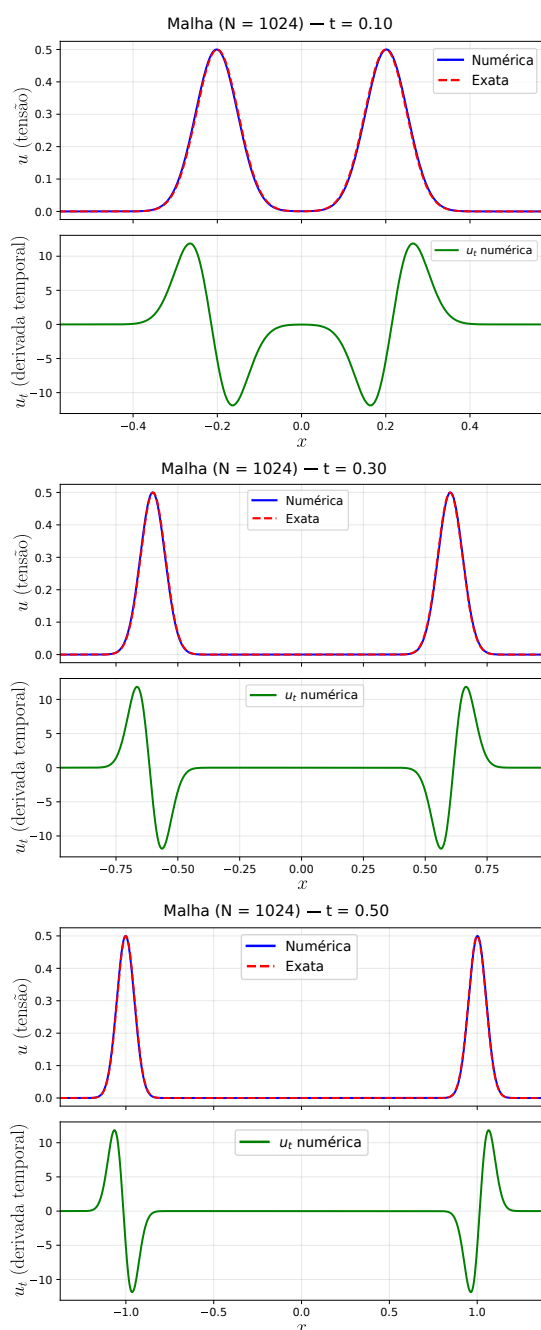


Figura 3: Evolução temporal da tensão u (linha azul) e de sua derivada temporal u_t (linha verde) para a malha com $N = 1024$, comparadas com a solução analítica (tracejado vermelho). Os três conjuntos de gráficos mostram a propagação e a separação da onda inicial em duas ondas viajantes.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, a equação do telegrafista foi reformulada como um sistema hiperbólico de primeira ordem, permitindo sua resolução no Clawpack por meio do método de volumes finitos com solucionadores de Riemann e decomposição característica.

A comparação entre as soluções numérica e analítica de d'Alembert para o caso homogêneo evidenciou excelente concordância, demonstrando que a implementação reproduz corretamente o comportamento previsto pela solução analítica. Os resultados obtidos confirmam a consistência da formulação adotada e validam a implementação do solucionador de Riemann e do procedimento de *operator splitting* empregados neste trabalho.

Como continuidade da pesquisa, pretende-se incorporar os termos dissipativos e reativos da equação do telegrafista ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), permitindo investigar numericamente os efeitos de atenuação, dispersão e perdas em linhas de transmissão, bem como realizar análises quantitativas de erro e convergência.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação - ICTIN, pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- LEVEQUE, R. J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002.
- LEVEQUE, R. J. Clawpack: Conservation Laws Package. Acesso em: 23 jun. 2026. Disponível em: <https://www.clawpack.org>.
- STRAUSS, W. Partial Differential Equations: An Introduction. John Wiley & Sons, 2007.
- TORO, E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2009.