



Influência de florestas de árvores folhosas na concentração de CO₂ utilizando de modelagem matemática

Juliano Zimmermann Ferreira¹, Gustavo Alexandre de Sousa², Gabrielli Pietralla², Antonio Marcos Batista³

¹*Departamento de Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil.*

julianozif@gmail.com

²*Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física ou Ensino de Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil.*

³*Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil.*

Resumo: O aumento da concentração de dióxido de carbono na atmosfera gerou diversos desbalanços ambientais. Com o agravamento do problema, diversos modelos surgiram para entender a sua dinâmica. Nesse trabalho comparamos dois modelos matemáticos que emulam a interação do CO₂ na atmosfera, um contendo 3 e outro 4 equações diferenciais. O primeiro modelo considera a população humana, a biomassa florestal e a concentração de CO₂, já o segundo insere o termo de árvores folhosas. Investigando os modelos verificamos que a inclusão da quarta equação influencia a dinâmica, reduzindo o CO₂ do sistema.

Palavras-chave: Dióxido de carbono; modelo matemático; atmosfera.

INTRODUÇÃO

Gases do efeito estufa, como o dióxido de carbono, são extremamente necessários para o bom funcionamento do meio ambiente, com suas principais funções a regulação da temperatura e processos biológicos como o da fotossíntese (Climate.gov, [s.d.]). Atividades antropogênicas no decorrer dos séculos trouxeram significativas mudanças para o sistema atmosférico, saturando a concentração de CO₂ (Casper, 2009). No período pré-industrial a concentração de CO₂ atmosférico era de 280 ppm (partes por milhão), tendo atingido em 2025 o valor de 429 ppm, com um aumento de mais de 50% em dois séculos (Misra; Jha, 2023).

O aumento da concentração de CO₂ acarreta em prejuízos ambientais e a sociedade humana. Diversos modelos matemáticos foram criados no decorrer dos anos para tentar emular a dinâmica do dióxido de carbono na atmosfera.

Neste trabalho utilizamos dois modelos matemáticos que descrevem a emissão de CO₂ atmosférico (Misra; Jha, 2023; Misra; Verma, 2013). Ambos os modelos desenvolvidos por Misra, tem uma base similar, podendo ser comparados entre si de maneira direta. Um dos modelos considera apenas 3 equações diferenciais: a concentração de CO₂, a população humana e a biomassa florestal. Enquanto o segundo modelo adiciona uma quarta equação para árvores folhosas, que são encontradas em larga escala

principalmente em florestas tropicais. O objetivo desse trabalho é verificar qual a influência que a adição da quarta equação traz para dinâmica de CO₂. Solucionamos os modelos variando os valores relacionados a taxa de emissão de CO₂ devido a atividades humanas. Observamos que ambos os modelos tem dinâmicas parecidas, mas apresentando diferenças na concentração de CO₂ atmosférico. Mostramos que o modelo que contempla as árvores folhosas tem seu equilíbrio em valores mais baixos de dióxido de carbono.

MATERIAL E MÉTODOS

Utilizamos nesse trabalho o integrador Runge-kutta de quarta ordem em linguagem C, apresentando os resultados graficamente utilizando o software xmgrace. Os sistemas de equação foram obtidos na literatura (Misra; Jha, 2023; Misra; Verma, 2013).

Os modelos são descritos por meio de equações diferenciais ordinárias (EDO's), onde as variáveis são, para o modelo de 3 EDO's, X para a concentração de dióxido de carbono atmosférico, A para a população humana e N para a biomassa florestal. Já para o modelo de 4 equações é apresentado também a variável P_l que representa as florestas de árvores folhosas. Os sistemas de equações são:

Primeiro modelo:

$$\frac{dx}{dt} = Q_0 + \lambda A - \alpha X - \lambda_1 XN, \quad (1)$$

$$\frac{dA}{dt} = sA \left(1 - \frac{A}{L}\right) - \theta XA + \rho \phi AN, \quad (2)$$

$$\frac{dN}{dt} = uN \left(1 - \frac{N}{M}\right) - \phi AN + \gamma \lambda_1 XN \quad (3)$$

Segundo modelo:

$$\frac{dX}{dt} = Q_0 + \lambda A - \alpha X - \lambda_1 XN - \lambda_2 X P_l, \quad (4)$$

$$\frac{dA}{dt} = sA \left(1 - \frac{A}{L}\right) - \theta XA + \rho \phi AN, \quad (5)$$

$$\frac{dN}{dt} = uN \left(1 - \frac{N}{M}\right) - \phi AN - \phi_1 AN^2, \quad (6)$$

$$\frac{dP_l}{dt} = r P_l \left(1 - \frac{P_l}{M_l}\right) + \pi_1 \phi_1 AN P_l + \pi_2 \lambda_2 X P_l \quad (7)$$

Os parâmetros estão descritos na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do modelo.

Parâmetros	Descrição
Q_0	Taxa de emissões de CO ₂ por fontes naturais
α	Taxa de depleção natural de CO ₂ atmosférico
λ	Taxa de emissões de CO ₂ devido às atividades humanas
λ_1	Taxa de absorção de CO ₂ pela floresta
λ_2	Taxa de absorção de CO ₂ pelas árvores folhosas
s	Taxa de crescimento intrínseco da população humana
L	Capacidade de suporte da população humana por unidade de área
θ	Taxa de mortalidade da população humana devido aos impactos adversos do CO ₂
ϕ	Taxa de desmatamento da floresta pela população humana
π	Constante de proporcionalidade para o crescimento da população humana devido ao desmatamento
u	Taxa de crescimento intrínseco da floresta
M	Capacidade de suporte das florestas por unidade de área
ϕ_1	Taxa de desmatamento devido à demanda da população por terras florestais
r	Taxa de crescimento intrínseco de

árvores folhosas

M_l Capacidade de suporte de árvores folhosas por unidade de área

π_1 Proporção de terra desmatada usada para plantação de árvores folhosas

π_2 Taxa de crescimento de árvores folhosas devido ao CO₂ atmosférico

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Analisando o comportamento dinâmico do sistema, variamos o valor da taxa de emissão de CO₂ devido às atividades humanas (λ). A variação foi para os valores de 0,02, 0,04 e 0,06. Assim, foi gerado gráficos com as soluções numéricas dos modelos, onde comparamos cada variável do modelo de 3 equações (identificado nas letras (a) das figuras) com o modelo de 4 equações (identificado nas letras (b) das figuras).

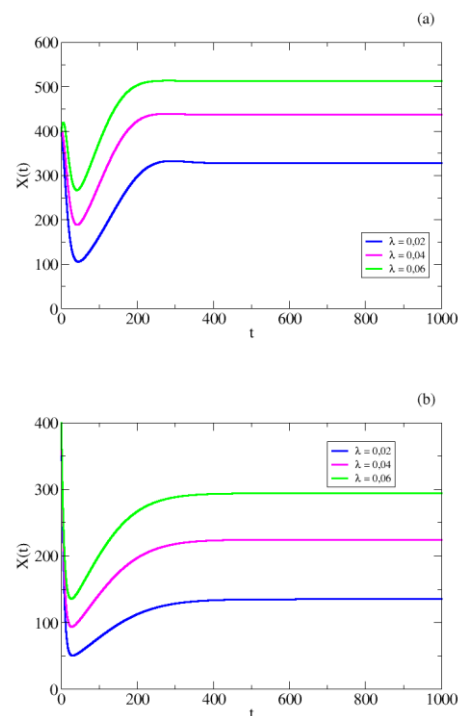


Figura 1. (a) Dinâmica de X no modelo de 3 EDO's variando λ . (b) Dinâmica de X no modelo de 4 EDO's variando λ .

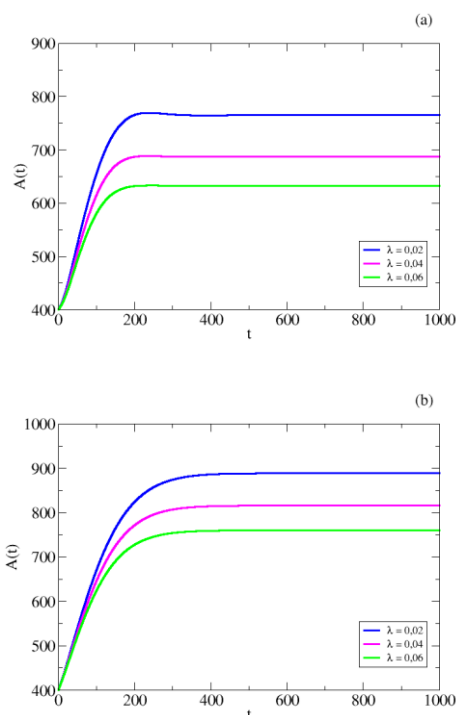


Figura 2. (a) Dinâmica de A no modelo de 3 EDO's variando λ . (b) Dinâmica de A no modelo de 4 EDO's variando λ .

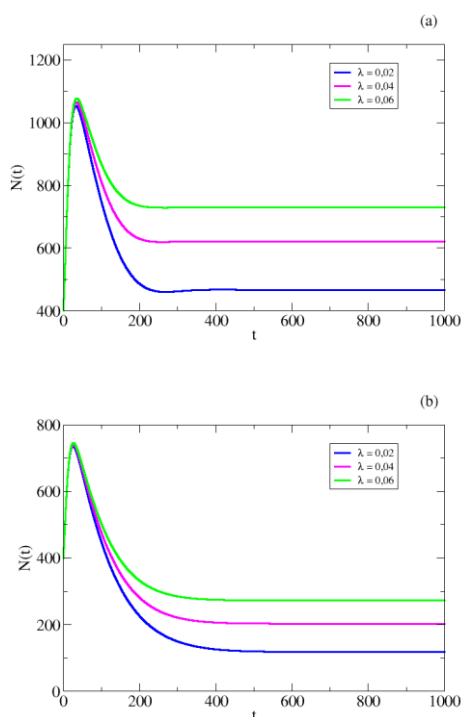


Figura 3. (a) Dinâmica de N no modelo de 3 EDO's variando λ . (b) Dinâmica de N no modelo de 4 EDO's variando λ .

Nas figuras podemos verificar que a dinâmica de ambos os modelos é similar, onde sempre que λ aumenta as variáveis se comportam de modo que X aumenta, A diminui e N aumenta. Esse resultado já esperado matematicamente e fisicamente.

Comparando os modelos é possível verificar que X atinge maiores valores para as 3 equações diferenciais, mostrando que as árvores folhosas tem grande impacto no controle de CO_2 atmosférico. Constatamos uma redução de aproximadamente 44% na concentração de CO_2 para o modelo de 4 equações.

Comparando os valores de A temos que o modelo que considera árvores folhosas tem um acréscimo na população humana de aproximadamente 7%. Verificamos uma redução de 33% nos valores de N no modelo de 4 EDO's

CONCLUSÃO

Foi possível nesse trabalho verificar que, mesmo apresentando dinâmicas similares dado as alterações, o modelo que contempla as árvores folhosas mostra menores concentrações de CO_2 atmosférico. Observamos que a biomassa florestal foi a segunda variável mais afetada devido à inclusão de uma nova equação diferencial. A população humana teve uma mudança pequena, com uma redução de apenas 7% no segundo modelo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), à Fundação Araucária e à Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa. Estendo meus agradecimentos ao grupo 105 Group Science, em especial ao Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

REFERÊNCIAS

CASPER, Julie Kerr. **Changing Ecosystems: Effects of Global Warming**. Nova Iorque: Facts on File, 2009.

CLIMATE.GOV. **Climate change: atmospheric carbon dioxide**. Disponível em: <<https://www.climate.gov/news-features/understanding-climate/climate-change-atmospheric-carbon-dioxide>>. Acesso em: 21 maio 2026.

MISRA, A. K.; JHA, A. How to combat atmospheric carbon dioxide along with development activities? A mathematical model. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, [S.I.], v. 454, p. 133861, nov. 2023. DOI:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278923002154>. Acesso em: 21 maio 2026.

MISRA, A. K.; VERMA, M. A mathematical model to study the dynamics of carbon dioxide gas in the



atmosphere. **Applied Mathematics and Computation**, [S.I.], v. 219, n. 16, p. 8595-8609, abr. 2013. DOI: 10.1016/j.amc.2013.02.052. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300313001963>. Acesso em: 21 maio 2026.