Implementação e Análise do Error-State Extended Kalman Filter (ES-EKF) Voltado à Fusão de Dados Angulares de Rotação de Corpos Rígidos

Guilherme Braga do Vale[1], Marconi Kolm Madrid[2], João Victor Medeiros Rocha[3], Lucas Sanches Garcia[4], Gustavo Oliveira Nunes[5], Raquel Souza Barroso[6]

[1]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil (g300875@dac.unicamp.br)*
[2]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil*
[3]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil*
[4]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil*
[5]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil*
[6]*Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Brasil*

Resumo: A estimação precisa de orientação é um problema fundamental em sistemas robóticos, veículos autônomos e dispositivos embarcados que utilizam unidades de medição inercial (IMUs). Entre as abordagens disponíveis, o *Error-State Extended Kalman Filter* (ES-EKF) destaca-se por representar o erro de atitude no espaço tangente de $SO(3)$, preservando a consistência geométrica da estimação e reduzindo problemas associados à parametrização direta por quaterniões. Este trabalho apresenta a implementação completa de um ES-EKF para fusão sensorial de giroscópio, acelerômetro e magnetômetro, utilizando a formulação multiplicativa baseada em quaterniões e correção por mapa exponencial. A validação foi realizada por meio de um *dataset* sintético com trajetória de referência analítica conhecida (*ground truth*), permitindo avaliação quantitativa rigorosa do desempenho do estimador. As medições inerciais foram simuladas com níveis de ruído compatíveis com sensores *Micro-Electro-Mechanical Systems* – MEMS comerciais, enquanto mecanismos de rejeição (*gates*) foram empregados para descartar observações inconsistentes. O algoritmo foi implementado em Python utilizando NumPy e SciPy, incluindo predição baseada em integração exponencial, atualização por ganho de Kalman e correção da covariância pela forma de Joseph. Os resultados demonstraram reduções de RMSE de 91,0% em *Roll*, 87,4% em *Pitch* e 49,4% em *Yaw* quando comparados à integração direta do giroscópio. Testes estatísticos confirmaram a significância dos ganhos obtidos, evidenciando que o ES-EKF fornece estimativas estáveis e precisas de orientação. Os resultados validam a implementação proposta e demonstram sua adequação para aplicações de navegação e controle em sistemas robóticos móveis.

Palavras-chave: *Error-State Extended Kalman Filter*; Fusão Sensorial; Estimação de Atitude; Quatênios; IMU; Navegação Inercial; Robótica Móvel.

1. INTRODUÇÃO

A determinação precisa da orientação espacial é um requisito fundamental em diversas aplicações de engenharia, incluindo robótica móvel, veículos autônomos terrestres e aéreos, sistemas de navegação inercial, dispositivos vestíveis, próteses inteligentes e plataformas embarcadas de controle em tempo real. Em tais sistemas, o conhecimento da atitude, normalmente representada pelos ângulos de *Roll*, *Pitch* e *Yaw* ou por quatênios unitários, é indispensável para tarefas de estabilização, navegação, localização e controle.

O avanço das tecnologias *Micro-Electro-Mechanical Systems* (MEMS) permitiu a ampla disseminação de Unidades de Medição Inercial (IMUs) de baixo custo, compostas tipicamente por giroscópios, acelerômetros e magnetômetros triaxiais. Apesar das vantagens relacionadas ao reduzido custo, tamanho compacto e baixo consumo energético, esses sensores apresentam limitações inerentes associadas a ruído de medição, deriva temporal, erros de escala e bias. Em particular, a integração direta das velocidades angulares fornecidas pelo giroscópio conduz ao acúmulo progressivo de erro, tornando necessária a utilização de técnicas de fusão sensorial capazes de combinar informações provenientes de múltiplos sensores de forma consistente.

Dentre os métodos disponíveis na literatura, o Kalman Filter e suas extensões não lineares destacam-se como uma das abordagens mais

empregadas para estimação de estados em sistemas dinâmicos. Entretanto, a aplicação direta do *Extended Kalman Filter* (EKF) convencional à estimação de atitude apresenta limitações geométricas importantes, uma vez que a orientação pertence ao grupo especial de rotações $SO(3)$, uma variedade não euclidiana incompatível com atualizações puramente aditivas. Como consequência, podem surgir inconsistências relacionadas à manutenção da norma unitária dos quatênios e à representação redundante da orientação. Para superar essas limitações, a literatura moderna tem adotado formulações baseadas no *Error-State Extended Kalman Filter* (ES-EKF), também conhecido como *Multiplicative Extended Kalman Filter* (MEKF). Nessa abordagem, a orientação nominal é representada por um quatênio unitário, enquanto o filtro estima apenas pequenas perturbações definidas no espaço tangente associado à álgebra de Lie $so(3)$. Essa estratégia preserva a estrutura geométrica do problema, reduz a dimensionalidade efetiva do estado de erro e proporciona maior consistência numérica durante longos períodos de operação.

Embora o ES-EKF seja amplamente utilizado em sistemas aeroespaciais e robóticos, sua implementação prática envolve diversos aspectos frequentemente negligenciados na literatura aplicada, incluindo a definição adequada dos vetores de referência inercial, a estimação do bias do giroscópio, a rejeição de medições inconsistentes e o alinhamento correto entre a estimativa produzida pelo filtro e a trajetória de referência utilizada para validação. Além disso, a obtenção de *ground truth* confiável para avaliação quantitativa continua sendo um desafio recorrente em experimentos realizados exclusivamente com sensores inerciais.

Diante desse contexto, este trabalho apresenta a implementação completa de um *Error-State Extended Kalman Filter* para estimação de atitude utilizando dados provenientes de uma IMU de nove graus de liberdade. Como contribuição principal, propõe-se uma metodologia de validação baseada em trajetória sintética com *ground truth* analítico exato, permitindo a quantificação rigorosa do desempenho do estimador em condições controladas. O filtro incorpora propagação quatênioica via mapa exponencial, estimação online do bias do giroscópio, mecanismos de rejeição de medições inconsistentes e correção multiplicativa da orientação.

Os resultados experimentais demonstram reduções expressivas do erro de orientação em comparação com a integração direta do giroscópio, confirmando a eficácia da estratégia de fusão sensorial adotada. Adicionalmente, a análise estatística realizada permite avaliar a significância dos ganhos obtidos e verificar a consistência da implementação desenvolvida. Por fim, o trabalho estabelece as bases para a futura aplicação do estimador em plataformas robóticas reais, incluindo o robô bípede *MiniDuck*, alvo das etapas subsequentes desta pesquisa.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo preconiza Kelly (2013), para sistemas não lineares a abordagem tradicional do filtro de Kalman é inapropriada pois se trata de um filtro direto, assim, para seu funcionamento adequado, há a dependência de áreas de interesse para realizar seu cálculo devido de fusão de dados ou predição de trajetória, porém, tais áreas pode mudar rapidamente, além de que, a maioria dos modelos de interesse existentes possuem natureza não linear. Portanto, deve-se utilizar a a abordagem do *Extended Kalman Filter* (EKF) para a estimação do vetor de estados como derivação da trajetória ou rotação (*error-state*) e tratar as medidas como inovações, isto é, para cada medida dada à frequência de aquisição há o cálculo recorrente de sua diferença com o que fora predito.

Dessa forma, o filtro de Kalman linear constitui um sistema *feedforward* (Fig. 1), assim, a trajetória de referência não é atualizada para refletir o erro estimado computado pelo filtro.

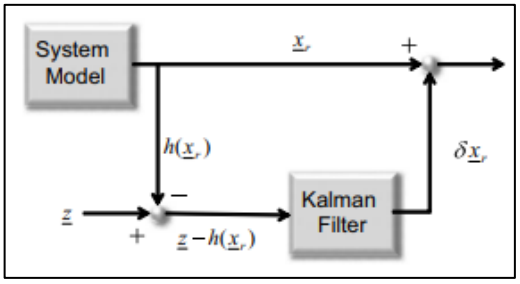


Figura 1. Diagrama de blocos do filtro de Kalman linear.

Já o processo realizado pelo *Extended Kalman Filter* (EKF) se pauta na retroalimentação da saída do modelo para o próprio filtro em si (Fig. 2). Assim, é possível realizar o cálculo de estimação de erro computado, o que constitui um sistema de *feedback*.

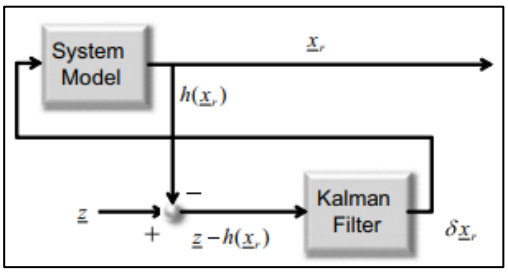


Figura 2. Diagrama de blocos do *Extended Kalman Filter*.

2.1. Representação Matemática de Orientação em $SO(3)$

A orientação de um corpo rígido no espaço tridimensional é um elemento do grupo especial ortogonal $SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3x3} \,|R^tR = I^3, det(R) =$

+1 }, que constitui uma variedade diferenciável compacta de dimensão 3. Diferentemente dos espaços vetoriais euclidianos, SO(3) não admite operações aditivas coerentes: a soma de duas matrizes de rotação não é em geral uma matriz de rotação. Esta propriedade fundamental inviabiliza a aplicação direta do Filtro de Kalman clássico, que pressupõe estrutura de espaço vetorial no domínio do estado, ao problema de estimação de orientação (Crassidis et al., 2007).

A parametrização adotada é o quatênio unitário $q = [w,\ x,\ y,\ z]^t \in H$, com a restrição $||q||^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, onde w é a parte escalar e $(x, y, z)^t$ a parte vetorial. Entre as representações de orientação existentes (ângulos de Euler, parâmetros de Rodrigues modificados, matriz de cossenos diretores), o quatênio unitário possui a menor dimensionalidade possível para uma representação globalmente não-singular, além de ser computacionalmente eficiente e numericamente estável (Markley, 2003). A correspondência com $SO(3)$ é dada pelo mapa de cobertura dupla $\pi: H1 \rightarrow SO(3)$, sendo q e $-q$ geometricamente equivalentes. Assim, a matriz de rotação $R(q)$ correspondente é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-wz) & 2(xz+wy) \\ 2(xy+wz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(yz+wx) & 1-2(x^2+y^2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

A álgebra de Lie associada a $SO(3)$ é $so(3)$, o espaço das matrizes antissimétricas 3x3, isomorfo a $\mathbb{R}^3$ pelo operador *skew-symmetric* $[v]x$ de um vetor $v = [v1, v2, v3]^t$, definido pela equação subsequente.

$$[v]x = \begin{bmatrix} 0 & -v3 & v2 \\ v3 & 0 & -v1 \\ -v2 & v1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Este operador satisfaz a identidade $[v]x\ u = v\ x\ u$ para qualquer $u \in R3$, conectando a álgebra de Lie à aritmética vetorial clássica. O mapa exponencial $exp: so(3) \rightarrow SO(3)$, dado pela fórmula de Rodrigues (Rodrigues, 1840; Chirikjian, 2011), transporta elementos da álgebra para o grupo:

$$exp([v]x) = I^3 + \left(\frac{sin||v||}{||v||}\right) \cdot [v]x + \left(\frac{(1-cos||v||)}{||v||2}\right) \cdot [v]x2 \quad (3)$$

Para $||v|| << 1$ (rotações infinitesimais), a aproximação de primeira ordem $exp([v]x) \approx I^3 + [v]x$ é empregada na linearização do filtro. O inverso, o mapa logarítmico $\log: SO(3) \rightarrow so(3)$, extrai o ângulo incremental a partir de uma matriz de rotação (Solà et al., 2018).

2.2. Fundamentação Teórica do ES-EKF Decomposição Nominal e Estado de Erro

O *Error-State Extended Kalman Filter* (ES-EKF), também denominado *Multiplicative Extended Kalman Filter* (MEKF) na literatura de estimação de atitude, foi originalmente formulado por Lefferts, Markley e Shuster (1982) para aplicações de navegação espacial e posteriormente sistematizado no contexto da robótica por Solà et al. (2018). Sua hipótese fundamental é a decomposição multiplicativa do estado verdadeiro em um estado nominal q̂ e um estado de erro δq de pequena amplitude (Eq. 4).

$$q_{true} = \hat{q} \otimes dq, \qquad dq = exp\left(d - \frac{\theta}{2}\right) \in H1 \ (4)$$

Onde $\hat{q} \in H1 \cong SO(3)$ é o quatênio nominal, o qual constitui a estimativa de melhor conjectura, propagado deterministicamente pela cinemática do giroscópio, dq é o quatênio de erro pertencente à vizinhança da identidade em $H1$, e $d - \theta \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de erro de orientação no espaço tangente $so(3)$. O fator $\frac{1}{2}$ no argumento decorre da dupla cobertura $\pi: H1 \rightarrow SO(3)$, isto é, uma rotação física de ângulo θ requer uma rotação de $\frac{\theta}{2}$ no espaço de quatênios (Shuster, 1993).

O produto de quatérnios $\otimes$, definido para $p = [pw, px, py, pz]^t$ e $q = [qw, qx, qy, qz]^t$ como

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_w q_w & -p_x q_x & -p_y q_y & -p_z q_z \\ p_w q_x & p_x q_w & p_y q_z & -p_z q_y \\ p_w q_y & -p_x q_z & p_y q_w & p_z q_x \\ p_w q_z & p_x q_y & -p_y q_x & p_z q_w \end{bmatrix} \quad (5)$$

é associativo mas não comutativo, assim, a não-comutatividade das rotações é refletida em $\mathbb{R}^3$. Essa operação é o mecanismo fundamental de composição de orientações no ES-EKF (Sola et al., 2018; Markley, 2003).

O filtro mantém simultaneamente: (I) o quatênio nominal $\hat{q} \in SO(3)$, 4 componentes com vínculo $||\hat{q}|| = 1$, propagado pela integração cinemática exata; (II) o vetor de erro $d - \theta \in \mathbb{R}^3$, 3 graus de liberdade em espaço euclidiano onde adição é válida e o filtro de Kalman pode operar legitimamente; e (III) a matriz de covariância do erro $P \in R^{6x6}$, simétrica positiva definida, que quantifica a incerteza estatística de $d - \theta$. A dimensão do estado de erro aumentado é 6, $\delta\theta \in \mathbb{R}^3$ mais $\delta b_g \in \mathbb{R}^3$, e o EKF opera sobre $\delta x = [\delta\theta;\ \delta b_g] \in \mathbb{R}^6$. A covariância $P \in \mathbb{R}^{6x6}$ encapsula a incerteza conjunta de atitude e bias, pois o EKF opera exclusivamente sobre $d - \theta$ (Markley, 2003; Crassidis et al., 2007).

2.3. Etapa de Predição: Modelo de Processo via Giroscópio

O giroscópio fornece a velocidade angular medida $\omega_m = \omega + b_g + n_g$, onde $\omega \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular verdadeira do corpo, $b_g \in \mathbb{R}^3$ é o bias do giroscópio, o qual é modelado como processo de caminhada aleatória de primeira ordem dado por $b_{g_{dot}} = n_b$, com $n_b \sim N\ (0, \sigma_{b2}\, I^3))$ e $n_g \sim N(0, \sigma_{g2}\, I^3)$ sendo o ruído branco de medida. O bias é incluído no vetor de estado aumentado $x = [d - \theta;\ b_g] \in \mathbb{R}^6$ quando estimado online, conforme Kelly (2013) e Sabatini (2006).

A equação cinemática contínua do quatênio é $q_{dot} = \frac{q}{2} \otimes [0; \omega]^t$. Integrando exatamente sobre o intervalo de amostragem D^t via mapa exponencial em $so(3)$, obtém-se o quatênio de rotação incremental expresso por:

$$q_D = exp\left(\left(w_m - b_g\right) * \frac{Dt}{2}\right) = \left[cos\left(\left|\left|w_m\right|\right| * \frac{D^t}{2}\right), \left(\frac{w_m}{\left|\left|w_m\right|\right|}\right) * sin\left(\left|\left|w_m\right|\right| * \frac{D^t}{2}\right)\right]^t \quad (6)$$

e a propagação do quatênio nominal dada por:

$$\hat{q}_{\{k|k-1\}} = \hat{q}_{\{k-1\}} \otimes q_D \quad (7)$$

Esta integração exata via fórmula de Rodrigues preserva rigorosamente a norma unitária e é superior à integração de Euler de primeira ordem $q \approx q + \left(\frac{D^t}{2}\right)[0;\ w_m]^t \otimes q$, que acumula erros proporcionais a $\left|\left|w_m\right|\right|^2 D^t 2$ por passo (Sabatini, 2006; Sola et al., 2018). Na prática, após cada passo renormaliza-se $\hat{q} \leftarrow \frac{\hat{q}}{||\hat{q}||}$ para compensar erros de ponto flutuante acumulados.

A covariância do estado de erro é propagada linearmente. O Jacobiano da dinâmica de erro $d - \theta$ em $so(3)$, obtido pela diferenciação da cinemática de primeira ordem em torno de $d - \theta = 0$, é dada por:

$$F_k = [I^3 - [\omega_m \cdot \Delta t] \times -I^3] \in \mathbb{R}^{6x6} \quad (8)$$

A aproximação de primeira ordem é válida para $\left|\left|\omega_m\right|\right| \cdot D^t << 1\ (rad)$, condição satisfeita tipicamente para taxas de amostragem $f_s \geq 50\ Hz$ em dinâmicas rotacionais normais de robôs. A covariância do erro evolui pela equação discreta de Riccati (Eq. 9).

$$P_{\{k|k-1\}} = F_k \cdot P_{\{k-1\}} \cdot F_k^T + Q_k \quad (9)$$

onde a covariância do processo para o modelo de estado de dimensão 3 é $Q_k = sigma_{g2} * D^{t2} * I^3 \in R^{3x3}$, ou $Q_k = diag\left(\sigma_{g2}\, D^{t2} I^3,\ \sigma_{b2}\, D^t\, I^3\right) \in R^{6x6}$ quando o e bias é estimado online como estado aumentado. O crescimento de P na etapa de predição é intrínseco e reflete o acúmulo de incerteza pelo $drift$ do giroscópio, que somente a etapa de atualização pode reduzir (Bar-Shalom et al., 2001).

2.4. Modelo de Observação: Acelerômetro e Magnetômetro como Âncoras Inerciais

O acelerômetro e o magnetômetro medem, no frame do corpo, vetores físicos cujas direções são conhecidas no frame inercial: o vetor gravidade $g_{ref} \in \mathbb{R}^3$ e o campo magnético terrestre $m_{ref} \in \mathbb{R}^3$, respectivamente. Estes vetores de referência são estimados na fase de calibração estática ($warmup$) pela média das primeiras N amostras com o sensor em repouso, e normalizados para eliminar a dependência da escala absoluta (Sabatini, 2006).

A função de observação não-linear $h : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^6$ mapeia a orientação estimada para as medições esperadas no frame do corpo. Para uma orientação $\hat{q}$, a rotação do frame inercial para o frame do corpo é dada pela transposta (inversa) de $R(\hat{q})$(Eq. 10).

$$h(\hat{q}) = \begin{bmatrix} R(\hat{q})^T \cdot g_{ref} \\ R(\hat{q})^T \cdot m_{ref} \end{bmatrix} \quad (10)$$

O vetor de inovação $\tilde{z}_k \in \mathbb{R}^6$ quantifica a discordância entre o observado e o predito pelo modelo apresentado na equação subsequente.

$$\tilde{z}_k = \begin{bmatrix} a_m - R\left(\hat{q}_{\{k|k-1\}}\right)^T \cdot g_{ref} \\ m_m - R\left(\hat{q}_{\{k|k-1\}}\right)^T \cdot m_{ref} \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde $a_m \in \mathbb{R}^3$ é a medição do acelerômetro $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ e $m_m \in \mathbb{R}^3$ a medição do magnetômetro $[uT]$. A inovação é nula quando a orientação estimada é exata e as medições são isentas de ruído. Qualquer padrão sistemático em $\tilde{z}_k$ revela um erro de orientação que o filtro irá corrigir na etapa de atualização.

O Jacobiano $H \in \mathbb{R}^{3x6}$ da função de observação em relação ao erro $d - \theta$ é obtido pela diferenciação de h em torno de $d - \theta = 0$. Para um vetor de referência r genérico, a perturbação $\frac{d(R(\hat{q})^T r)}{d(d-theta)}$ avaliada no ponto nominal produz o operador *skew-symmetric* do vetor r no frame do corpo (Markley, 2003; Crassidis et al., 2007) representado pelo par de equações abaixo.

$$H_{accel} = [\,[\hat{a}]_x \times O_{3x3}] \in R^{3x6}, \quad \hat{a} = R\left(\hat{q}_{[\hat{a}]_x \times O_{3x3}}\right)^T \cdot g_{ref} \quad (12.a)$$

$$H_{mag} = [\,[\hat{m}]_x \times O_{3x3}] \in R^{3x6}, \quad \hat{m} = R\left(\hat{q}_{\{k|k-1\}}\right)^T \cdot m_{ref} \quad (12.b)$$

A estrutura do Jacobiano H como empilhamento de matrizes *skew-symmetric* dos vetores de referência no *frame* do corpo é uma propriedade direta da geometria de $SO(3)$ rotações infinitesimais agem sobre vetores por produto vetorial, e $[v]_x u = v\ x\ u$. A observabilidade local da atitude é assegurada

quando os vetores de referência não são colineares, isto é, quando g_{ref} e m_{ref} não são paralelos, condição satisfeita em qualquer localização geográfica onde o campo magnético não é vertical (Sabatini, 2011).

2.5. Etapa de Atualização: Ganho Ótimo e Correção do Estado

A covariância da inovação $S_k \in \mathbb{R}^{6x6}$ combina a incerteza proveniente do estado predito e do ruído de medição (Eq. 13)

$$S_k = H \cdot P_{\{k|k-1\}} \cdot H^T + R_{noise}, R_{noise} = diag(\sigma_{a2} I^3, \sigma_{m2} I^3) \in \mathbb{R}^{6x6} \quad (13)$$

O ganho de Kalman $K_k \in R^{6x3}$ (Eq. 14) é a solução do problema de estimação de mínima variância (MMSE — *Minimum Mean Square Error*). Assim, o traço da covariância do estado pós-atualização sobre todos os estimadores lineares possíveis é minimizado (Bar-Shalom et al., 2001).

$$K_k = P_{\{k|k-1\}} \cdot H^T \cdot S_k^{\{-1\}} \in \mathbb{R}^{6x3} \quad (14)$$

O ganho K_k opera uma ponderação automática entre o modelo de processo e as medições, quando $R_{noise} \to inf$ (sensores muito ruidosos), $K_k \to 0$ e as medições são ignoradas; quando $P_{\{k|k-1\}} \to inf$ (predição muito incerta), K_k tende a H^+ (pseudoinversa de H) e as medições dominam. A estimativa do erro de orientação é dada por:

$$\delta\hat{x}_k = K_k \cdot \tilde{z}_k \in \mathbb{R}^6 \quad (15)$$

A covariância do erro é atualizada na forma de Joseph, que é algebricamente equivalente à forma padrão $P_k = (I - K_k H)\, P_{\{k|k-1\}}$ mas numericamente superior: garante a simetria e a positividade definida de P_k (Eq. 16) mesmo na presença de erros de arredondamento em ponto flutuante acumulados ao longo de muitos ciclos, condição essencial para a estabilidade do filtro (Bar-Shalom et al., 2001; Grewal e Andrews, 2015)

$$P_k = (I_6 - K_k H) \cdot P_{\{k|k-1\}} \cdot (I_6 - K_k H)^T + K_k \cdot R_{noise} \cdot K_k^T \quad (16)$$

2.6. Injeção Multiplicativa, Reset e Preservação de SO(3)

A operação de injeção é a diferença estrutural fundamental entre o ES-EKF e o EKF aditivo convencional. No EKF clássico, a correção é aditiva: $\hat{x}_k = \hat{x}_{\{k|k-1\}} + K_k\, \tilde{z}_k$. Em $SO(3)$, a soma de dois quatênios unitários não é em geral um quatênio unitário, viola a estrutura de grupo. A operação correta é a composição multiplicativa via produto tensor (Eq. 17), que preserva a pertinência ao grupo $SO(3)$ por construção (Lefferts et al., 1982; Markley, 2003).

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{\{k|k-1\}} \otimes exp\left(d - \frac{\theta \hat{a}_k}{2}\right) \quad (17)$$

O erro estimado $d - thet\hat{a}_k \in R3$ é convertido para o grupo via mapa exponencial (equação 3 avaliada em $v = d - \frac{\theta \hat{a}_k}{2} \in so(3)$) e composto multiplicativamente com o quatênio nominal predito. Após a injeção, o estado de erro é resetado: $d - \theta \leftarrow 0$. Este *reset* é coerente com a decomposição de (4), o erro foi absorvido pelo nominal e o filtro reinicia a linearização em torno de um erro nulo, garantindo a validade da aproximação de primeira ordem no próximo ciclo (Solà et al., 2018).

Adicionalmente, o quatênio nominal é normalizado novamente após cada passo para compensar erros numéricos de ponto flutuante: $\hat{q}_k \leftarrow \frac{\hat{q}_k}{||\hat{q}_k||}$. A renormalização é formalmente equivalente a uma projeção de volta à variedade $SO(3)$ e, embora introduza uma pequena modificação no estado nominal, mantém a consistência do filtro em simulações de longa duração (Markley, 2003; Crassidis e Markley, 2016).

2.7. Rejeição de Aceleração Dinâmica e Consistência do Modelo

O modelo de observação do acelerômetro pressupõe que $a_m \approx R(\hat{q})^T g_{ref}$, válido somente quando a aceleração linear do frame do sensor em relação ao frame inercial é desprezível frente à gravidade. Em robôs bípedes, manobras rápidas das juntas geram acelerações lineares significativas no tronco — violando a hipótese do modelo e potencialmente introduzindo erros sistemáticos na atualização. Para detectar e rejeitar estas situações, adota-se o critério de consistência física proposto por Sabatini (2006):

$$\frac{\left|\, ||a_m|| - \left|\left|g_{ref}\right|\right| \,\right|}{\left|\left|g_{ref}\right|\right|} < \alpha \quad (18)$$

com $\alpha \in [0{,}20;\ 0{,}35]$ (tipicamente 0,25) determinado empiricamente como compromisso entre sensibilidade a perturbações reais e tolerância ao ruído do sensor. Quando (18) não é satisfeita, a atualização é suprimida inteiramente: apenas a etapa de predição é executada e $P_{\{k|k-1\}}$ não é reduzida. O giroscópio integra isoladamente até que o movimento estabilize e a condição seja novamente satisfeita (Sabatini, 2006; Sola et al., 2018).

Esta estratégia preserva a consistência estatística do filtro, evitando que medições com modelo violado contaminem a estimativa, sem requerer sensor de contato com o solo, dinamômetros, ou modelo dinâmico completo do robô bípede. Uma abordagem alternativa, de maior custo computacional, é a adaptação online de R_{noise} com base na norma de $\tilde{z}_k$

(Sabatini, 2011), que degrada suavemente a confiança nas medições em lugar de suprimi-las abruptamente.

2.8. Estimação do Offset e Orientação Relativa ao Ponto de Equilíbrio

Após a fase de *warmup*, período de duração $t_w \geq 3\ s$ com o sensor estático na posição de referência (ponto de equilíbrio do robô), o filtro atinge convergência com bias estimado e orientação estabilizada. Neste instante, define-se o quatênio de offset:

$$q_{off} = \hat{q}^{\{-1\}} = [w, -x, -y, -z]^t \qquad (19)$$

O conjugado é idêntico ao inverso para quatênios unitários: $q^{\{-1\}} = \frac{[w,-x,-y,-z]^t}{||q||^2} = [w, -x, -y, -z]^t$ quando $||q|| = 1$. A orientação relativa ao ponto de referência é computada em cada instante k como:

$$q_{rel} = q_{off} \otimes \hat{q}_k \qquad (20)$$

com $q_{rel} = [1, 0, 0, 0]^t$ quando o robô está na posição de referência. Os ângulos de inclinação relativos ($theta_x, theta_y, theta_z$) são obtidos pela conversão de q_rel para ângulos de Euler na sequência ZYX (*yaw-pitch-roll*), conforme a equação subsequente.

$$\theta_x = \text{atan}^2(2(\omega q_x + y q_z), 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) \qquad (21.a)$$

$$\theta_y = \arcsin\left(\max\left(-1, \min\left(1, 2(\omega q_y - q_z \cdot q_x)\right)\right)\right) \qquad (21.b)$$

$$\theta_z = \text{atan}^2\left(2(\omega q_z + q_x \cdot q_y), 1 - 2(q_y^2 + q_z^2)\right) \qquad (21.c)$$

onde (ω, q_x, q_y, q_z) são os componentes de q_{rel}. Esta conversão apresenta singularidade (gimbal lock) em $theta_y = \pm 90$ graus, razão pela qual todo o processamento interno do ES-EKF é realizado no espaço dos quatênios, e os ângulos de Euler são computados apenas na saída final para interpretação física. O conjunto ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) constitui a saída do sistema de fusão proposto, representando a inclinação do objeto observado em relação ao ponto de equilíbrio em cada eixo de rotação.

3. DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo é apresentado as metodologias aplicadas à construção do conjunto de dados sintéticos utilizados para o teste e validação do filtro proposto bem como explicita o processo de implementação das equações que o constituem, fundamentadas no capítulo anterior.

3.1. Construção do Dataset Sintético para Validação do ESEKF em $SO(3)$

Considerando que o presente trabalho possui como objetivo a estimação de atitude por meio de um *Error-State Extended Kalman Filter* (ESEKF) aplicado ao espaço de rotações tridimensionais $SO(3)$, tornou-se necessária a construção de um conjunto de dados sintético fisicamente consistente, capaz de reproduzir as características estocásticas e geométricas típicas de sensores inerciais reais.

Assim, a utilização de *datasets* sintéticos em problemas de navegação inercial e fusão sensorial é amplamente adotada na literatura devido à possibilidade de controle total sobre os seguintes aspectos:

- Estado verdadeiro do sistema (*ground truth*);
- Parâmetros de ruído;
- Modelos de bias;
- Dinâmica rotacional;
- Condições de observabilidade do estimador.

Além disso, a geração controlada de dados permite avaliar rigorosamente de estabilidade, convergência, robustez, consistência probabilística e desempenho estatístico do filtro proposto.

No contexto específico deste trabalho, o *dataset* foi desenvolvido exclusivamente para estimação de atitude, desconsiderando componentes translacionais do movimento. Dessa forma, a dinâmica do sistema foi restrita ao grupo especial ortogonal tridimensional $SO(3)$, o qual representa o conjunto de todas as rotações tridimensionais válidas.

A orientação do corpo rígido foi representada por quatênios unitários, definidos por $q = [q_x\ q_y\ q_z\ q_w]^T$ A escolha dessa parametrização fundamenta-se nas limitações inerentes às representações baseadas em ângulos de Euler, tais como singularidades cinemáticas, descontinuidades angulares e problemas de acoplamento não linear entre eixos.

Diferentemente do *Extended Kalman Filter* convencional, o ESEKF utilizado neste trabalho não realiza a estimação direta do quatênio completo. Em vez disso, o filtro opera sobre pequenas perturbações definidas no espaço tangente de $SO(3)$, representadas por:

$$\delta\theta \in \mathbb{R}^3 \qquad (22)$$

Assim, o estado nominal foi definido como:

$$x = \begin{bmatrix} q \\ b_g \end{bmatrix} \qquad (23)$$

enquanto o estado de erro foi modelado por:

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta b_g \end{bmatrix} \qquad (24)$$

onde:

- q representa a orientação nominal;
- b_g representa o bias do giroscópio;
- $\delta\theta$ representa o erro infinitesimal de atitude;
- δb_g representa o erro associado ao bias.

Essa formulação encontra respaldo nos trabalhos de Trawny e Roumeliotis (2005), Markley (2003) e Solà (2017), sendo atualmente uma das abordagens mais utilizadas em sistemas modernos de estimação de atitude. Para construção do *dataset*, optou-se inicialmente pela geração de velocidades angulares verdadeiras contínuas e suavemente variantes no tempo, e evitar a geração direta de ângulos de Euler independentes, procedimento frequentemente responsável pela produção de trajetórias geometricamente inconsistentes. Para isso, as velocidades angulares foram modeladas por funções senoidais com múltiplas frequências por eixo, expressas em rad/s como apresentado pelas equações abaixo.

$$\omega_x(t) = 0{,}30 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}3t) + 0{,}15 \cdot \sin(0{,}7t) + 0{,}05 \cdot \cos(2\pi \cdot 1{,}1\mathrm{t}) \quad (25.a)$$

$$\omega_y(t) = 0{,}40 \cdot \cos(2\pi \cdot 0{,}2t) + 0{,}20 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}5t) + 0{,}08 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}9\mathrm{t}) \quad (25.b)$$

$$\omega_z(t) = 0{,}25 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}15t) + 0{,}12 \cdot \cos(2\pi \cdot 0{,}4t) + 0{,}06 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}8\mathrm{t}) \quad (25.c)$$

A utilização de excitação simultânea nos três eixos garante maior riqueza dinâmica ao sistema, contribuindo para a observabilidade do filtro e evitando degenerações associadas a movimentos restritos.

A propagação temporal da orientação foi realizada utilizando integração incremental quatênio, baseada na exponencial do vetor de rotação mediante o exposto na equação 4 e expresso de forma direta pela equação subsequente.

$$q_{k+1} = q_k \otimes \exp\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \quad (26)$$

Esse procedimento garante preservação da norma unitária do quatênio, além de assegurar consistência geométrica no espaço $SO(3)$. A integração foi implementada por meio da biblioteca scipy.spatial.transform.Rotation, utilizando rotações incrementais representadas por vetores exponenciais (rotvec). Assim, a partir da orientação verdadeira obtida, foram então derivados os sinais sintéticos dos sensores inerciais e magnéticos. O modelo do giroscópio foi definido por meio da equação 23.

$$\omega_m = \omega + b_g + n_g \quad (27)$$

onde:

- ω representa a velocidade angular verdadeira;
- b_g representa o bias do sensor;
- n_g representa ruído branco gaussiano.

O bias do giroscópio foi modelado como um processo estocástico do tipo *random walk*:

$$b_{g,k+1} = b_{g,k} + w_g \quad (28)$$

com:

$$w_g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{wg}^2) \quad (29)$$

Tal modelagem é amplamente empregada na literatura para representação de deriva lenta em sensores MEMS.

Já o acelerômetro foi modelado considerando ausência de aceleração translacional, de modo que o sensor meça exclusivamente a projeção da gravidade no referencial do corpo. A gravidade global foi definida pelo vetor g.

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.80665 \end{bmatrix} \quad (30)$$

e a medida sintética foi obtida por meio da equação a_m dada por:

$$a_m = R^T g + n_a \quad (31)$$

onde R representa a matriz de rotação derivada do quatênio verdadeiro e n_a representa ruído branco gaussiano.

Nesse modelo, *roll* e *pitch* tornam-se observáveis a partir da gravidade, enquanto *yaw* permanece não observável na ausência de referências externas.

Para tornar o *heading* observável, foi incorporado um magnetômetro sintético. O campo magnético terrestre (Eq. 32) foi definido a partir do modelo geomagnético (NOAA, 2024).

$$m_{earth} = \begin{bmatrix} 22 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Desse modo, a medida do sensor foi obtida pela equação.

$$m_m = R^T m_{earth} + n_m \quad (33)$$

O vetor m_{earth} fora mantido na escola física real, sem normalização para o vetor unitário. Pois, a normalização reduziria $|m_{earth}|$a 1, o que faz com que o ruído de $\sigma_m = 2\mu T$ corresponda a uma fração desproporcional do sinal, comprometendo o funcionamento correto do *gate* de Mahalanobis do filtro.

Diante do exposto, a utilização da mesma orientação verdadeira para derivação dos sinais do acelerômetro e do magnetômetro garante consistência geométrica entre todos os sensores simulados, aspecto

fundamental para correta validação do ESEKF. De modo que, na etapa de visualização dos dados, observou-se o fenômeno de *angle wrapping* nos ângulos de Euler derivados dos quatênios, especialmente no eixo *yaw*. Esse comportamento decorre da periodicidade angular natural da representação Euleriana no intervalo trigonométrico abaixo.

$$[-180°, 180°] \quad (34)$$

Dessa forma, a fim de eliminar descontinuidades artificiais, foi aplicado um procedimento de *unwrapping* angular utilizando a função numpy.unwrap(), produzindo trajetórias contínuas adequadas para análise gráfica e interpretação temporal. Ressalta-se, entretanto, que essa correção foi aplicada exclusivamente para visualização, uma vez que o filtro opera diretamente sobre quatênios.
Por fim, o *dataset* foi estruturado em três arquivos principais:

- measurements.csv, contendo as medições dos sensores;
- groundtruth.csv, contendo os quatênios verdadeiros;
- gyro_bias.csv, contendo a evolução temporal do bias do giroscópio.

Ao final, a metodologia proposta permitiu a obtenção de um conjunto de dados sintético geometricamente consistente, estatisticamente coerente e fisicamente plausível, adequado para validação rigorosa do *Error-State Extended Kalman Filter* aplicado à estimação de atitude em $SO(3)$. Tais propriedades tornam o conjunto de dados apropriado para análise de desempenho, validação estatística e investigação da estabilidade do filtro proposto.

3.2. Formulação Matemática do *Error-State Extended Kalman Filter* (ES-EKF) para implementação em linguagem *Python*.

O *Error-State Extended Kalman Filter* (ESEKF) implementado nesse trabalho adota a formulação multiplicativa em $SO(3)$, na qual o filtro não opera diretamente sobre o quatênio de orientação, mas sobre perturbações infinitesimais definidas no espaço tangente $so(3)$. Essa abordagem, denominada na literatura de *Multiplicative Extended Kalman Filter* (MEKF), foi formalmente estabelecida por Markley (2003) e posteriormente sistematizada por Trawny e Roumeliotis (2005) e Solà (2017), e constitui atualmente o paradigma dominante em sistemas de estimação de atitude de alta precisão.
Diante do apresentado, a execução do filtro é organizada em dois estágios executados a cada intervalo de amostragem Δt:

- **Predição:** as medições do giroscópio propagam o estado nominal e a covariância do erro;
- **Correção:** as medições do acelerômetro e do magnetômetro reduzem a incerteza acumulada por meio da atualização bayesiana ótima no sentido do erro quadrático médio mínimo (MMSE).

3.2.1. Definição do Estado.

O estado nominal do sistema é composto pelo quatênio unitário de orientação $\mathbf{q} \in \mathrm{H}_1$ e pelo vetor de bias do giroscópio $\mathbf{b}_g \in \mathbb{R}^3$. Assim, primeiro, fora estipulado o estado nominal do sistema (Eq. 31).

$$x = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b_g} \end{bmatrix} \in \mathrm{H}_1 \times \mathbb{R}^3 \quad (31)$$

Onde:

- $\mathbf{q} \in \mathrm{H}_1$representa o quatênio unitário de orientação
- $\mathbf{b_g} \in \mathbb{R}^3$ representa o vetor de bias do giroscópio.

Paralelamente, o estado de erro, sobre o qual o filtro efetivamente opera, é composto pelo vetor de erro de atitude infinitesimal $\delta\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$e pelo erro de bias $\delta\mathbf{b}_g \in \mathbb{R}^3$, totalizando seis graus de liberdade (Eq. 32).

$$\delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{b_g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (32)$$

Além disso, a covariância desse estado de erro é representada pela matriz simétrica positiva (Eq. 33) definida $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6\times6}$, cuja evolução temporal encapsula toda a incerteza probabilística do estimador.

$$\mathbf{P} \in R^{6\times6} \quad (33)$$

3.2.2. Inicialização.

Nesse passo o filtro é inicializado com o quatênio identidade e bias nulo (Eq. 34), refletindo ausência de informação prévia sobre a orientação inicial. A covariância inicial $\mathbf{P}_0$ (Eq. 35) é configurada de forma diagonal, com incertezas de 5° para *roll* e pitch e de 10°para *yaw*. Essa assimetria deliberada reflete a diferença estrutural de observabilidade entre os eixos: enquanto *roll* e *pitch* são diretamente observáveis pela projeção gravitacional medida pelo acelerômetro, o *yaw* não possui observabilidade intrínseca sem uma referência direcional horizontal externa, o que justifica uma incerteza inicial mais conservadora nesse grau de liberdade (Grip et al., 2012).

$$\mathbf{q_0} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \mathbf{b_{g,0}} = \mathbf{0_{3\times1}} \quad (34)$$

$$\mathbf{P_0} = diag\left(\sigma_{\theta,0}^2, \sigma_{\theta,0}^2, \sigma_{\psi,0}^2, \sigma_{b,0}^2, \sigma_{b,0}^2, \sigma_{b,0}^2\right) \quad (35)$$

Com os ângulos sigma apresentados abaixo convertidos para radianos.

$$\sigma_{\theta,0} = 5^\circ, \sigma_{\psi,0} = 10^\circ, \sigma_{b,0} = 0,1^\circ \qquad (36)$$

A incerteza inicial associada ao eixo de *yaw* é deliberadamente superior àquela atribuída aos ângulos de *roll* e *pitch*, refletindo a menor observabilidade desse grau de liberdade na ausência de referência magnética externa.
Os vetores de referência inercial são estimados por meio de uma janela de aquecimento contendo N_ω amostras:

$$\mathbf{g_{ref}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_\omega}{|\bar{\mathbf{a}}_\omega|} \cdot 9{,}8066\, \boldsymbol{m}_{ref} = \bar{\mathbf{m}}_\omega \qquad (38)$$

onde $\bar{\mathbf{a}}_\omega$e $\bar{\mathbf{m}}_\omega$correspondem às médias amostrais das medições do acelerômetro e do magnetômetro, respectivamente.
O vetor magnético de referência é mantido em sua escala física original (μT), sem normalização, de forma a preservar a compatibilidade dimensional com o critério de rejeição de medições utilizado posteriormente.

3.2.3. Predição.

A etapa de predição é acionada a cada nova medição do giroscópio e constitui o mecanismo pelo qual a orientação estimada evolui no tempo. A velocidade angular nominal é obtida subtraindo-se o bias estimado da medição bruta, a qual é calculada por:

$$\boldsymbol{\omega}_c^k = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k - \mathbf{b}_g \qquad (39)$$

Assim, o quatênio é então propagado por integração exata via mapeamento exponencial em H_1 dado por:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathrm{norm}\left(\mathbf{q}_k \otimes \exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_c^k \Delta t}{2}\right)\right) \qquad (40)$$

Essa formulação preservação teoricamente norma unitária do quatênio independentemente do passo de integração, sem recorrer a procedimentos de renormalização ad hoc. Diferentemente de métodos de integração numérica como Runge-Kutta, o mapeamento exponencial respeita a estrutura do grupo $SO(3)$ por construção, eliminando o acúmulo de erros geométricos ao longo de trajetórias de longa duração (Solà et al., 2018).
Paralelamente à propagação do quatênio, a covariância do estado de erro é propagada pela equação de Riccati discreta, utilizando a matriz de transição linearizada (Eq. 41) em torno do estado nominal corrente e a matriz de covariância do processo, que modela separadamente o ruído de medição do giroscópio e o *random walk* do bias.

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{I}_6 + \begin{bmatrix} -\lfloor \boldsymbol{\omega}^k \Delta t \rfloor_\times & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \Delta t \qquad (41)$$

Ao final de cada passo de predição, a covariância propagada (Eq. 42) é explicitamente simetrizada para mitigar o acúmulo de erros de arredondamento em aritmética de ponto flutuante que, após número elevado de iterações, podem violar a positividade definida de **P** e comprometer a estabilidade numérica do filtro (Bar-Shalom, Li e Kirubarajan, 2001)

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_g^2 \Delta t^2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \sigma_b^2 \Delta t \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Assim, a equação discreta de Riccati viabiliza a realização da propagação da covariância (Eq. 43).

$$\mathbf{P}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Phi}_k^\top + \mathbf{Q}_k \qquad (43)$$

com

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \mathbf{I}_6 + \mathbf{F}_k \Delta t \qquad (44)$$

Após a propagação, aplica-se a simetrização explícita (Eq. 45), com o objetivo de evitar a degradação numérica da propriedade de simetria da matriz de covariância.

$$\mathbf{P}_{k+1} \leftarrow \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{P}_{k+1}^\top) \qquad (45)$$

3.2.4. Atualização da Covariância.

A etapa de correção incorpora as informações fornecidas pelos sensores de referência, acelerômetro e magnetômetro, reduzindo a incerteza acumulada durante a fase de predição.
Para cada sensor, calcula-se inicialmente a inovação como a diferença entre a medição normalizada e a predição obtida pela projeção do vetor de referência inercial correspondente no referencial do corpo.
O ganho de Kalman é calculado por:

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{H} \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R}_n)^{-1} \qquad (46)$$

A estimativa do estado de erro é então obtida multiplicando-se o ganho pela inovação. A correção do quatênio nominal é realizada pela composição multiplicativa com o mapeamento exponencial do erro de atitude estimado, operação que efetua a retração do vetor de correção do espaço tangente para o grupo $SO(3)$. Dessa forma, o quatênio corrigido permanece naturalmente na variedade dos quatênios unitários, sem necessidade de projeções adicionais. O bias do giroscópio é atualizado de forma aditiva, sendo posteriormente limitado ao intervalo de $\pm 5^\circ$para evitar divergências em condições de baixa excitação dinâmica. A atualização da covariância utiliza a forma de Joseph apresentada abaixo:

$$\boldsymbol{P}_k^+ = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{P}_k (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H})^T + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{R}_n \boldsymbol{K}_k^T \qquad (47)$$

Embora seja matematicamente equivalente à forma simplificada tradicional, essa formulação preserva explicitamente a simetria e a positividade semidefinida da covariância, mesmo na presença de erros numéricos.

3.2.5. Correção por Acelerômetro e Magnetômetro e Gate de Rejeição

A correção pelo acelerômetro é executada em todos os instantes de amostragem, utilizando o vetor gravitacional de referência e a matriz de covariância de medição

$$\mathbf{R}_n = \sigma_a^2 \mathbf{I}_3 \tag{47}$$

A validade dessa correção depende da hipótese de que o acelerômetro mede predominantemente a gravidade projetada no referencial do corpo. Como essa hipótese deixa de ser válida na presença de acelerações translacionais significativas, é empregado um mecanismo de rejeição (*gate*) baseado na magnitude da medição. Leituras cuja norma difere da norma gravitacional de referência em mais de 25% são descartadas e não participam da atualização do estado. As amostras aceitas são normalizadas para a magnitude gravitacional de referência antes do cálculo da inovação. Esse procedimento desacopla a informação direcional, efetivamente utilizada para correção de *roll* e *pitch*, das variações residuais de magnitude decorrentes de acelerações não modeladas.

Já a correção pelo magnetômetro é executada a cada cinco iterações, utilizando o vetor de campo magnético de referência e a matriz de covariância

$$\mathbf{R}_n = \sigma_m^2 \mathbf{I}_3 \tag{48}$$

O campo magnético terrestre constitui a única referência inercial disponível para observabilidade do ângulo de *yaw*. Consequentemente, sua correta utilização é essencial para evitar deriva nesse grau de liberdade.

Assim, como no acelerômetro, é aplicado um mecanismo de rejeição baseado na magnitude da medição. Leituras cuja norma difere da norma de referência em mais de 35% são descartadas automaticamente.

Desse modo, esse procedimento permite rejeitar medições corrompidas por interferências magnéticas locais, materiais ferromagnéticos ou campos eletromagnéticos espúrios sem a necessidade de modelos explícitos de perturbação. A taxa reduzida de atualização magnetométrica é adotada devido à menor largura de banda típica desses sensores e à sua maior susceptibilidade a perturbações ambientais, tornando desejável uma política de fusão mais conservadora.

3.2.6. Janela de Aquecimento e Alinhamento de Referencial

Antes do início da avaliação de desempenho, o filtro executa uma janela de aquecimento composta por N_ω amostras. Durante essa fase, predição e correção são aplicadas normalmente, permitindo a convergência inicial do estado e da covariância. Ao término dessa etapa, são calculados os quatênios de alinhamento:

$$\mathbf{q}_{\text{off}} = \mathbf{q}^* \mid_{k=N_w} \qquad \mathbf{q}_{\text{off,gt}} = \mathbf{q}^*_{\text{true}} \mid_{k=N_w} \tag{49}$$

Onde $(\cdot)^*$ representa o conjugado quatênioico.

Esse procedimento garante que todas as estimativas subsequentes sejam comparadas ao *ground truth* em um mesmo referencial, eliminando erros sistemáticos de alinhamento inicial.

3.2.7. Parâmetros do Filtro

Os parâmetros nominais utilizados na implementação são:

Tabela 1: Parâmetros para implementação do filtro

Parâmetro	Valor/Unidade	Finalidade
σ_g	$0{,}003\ rad/s$	Ruído do giroscópio
σ_b	$10^{-6}\ rad/s^2$	Random *walk* do bias
σ_a	$0{,}30\ m/s^2$	Ruído do acelerômetro
σ_m	2,0 μT	Ruído do magnetômetro
γ_a	0,25	Gate do acelerômetro
γ_m	0,30	Gate do magnetômetro
N_ω	200 amostras	Janela de aquecimento

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A simulação foi desenvolvida integralmente em Python 3.10 utilizando as bibliotecas NumPy, Pandas, SciPy e Matplotlib. Inicialmente, foi gerada uma trajetória sintética de orientação com *ground truth* analítico conhecido, a partir da integração exata de velocidades angulares definidas por funções senoidais multi eixo. Com base nessa trajetória, foram sintetizadas medições de giroscópio, acelerômetro e magnetômetro contendo ruído gaussiano controlado, reproduzindo características típicas de sensores MEMS utilizados em sistemas embarcados de navegação e robótica. Sobre esse conjunto de dados foi implementado o *Error-State Extended Kalman Filter* (ES-EKF), utilizando representação multiplicativa por quatênios, propagação via mapa exponencial e atualização da covariância pela forma de Joseph. A arquitetura desenvolvida permitiu a estimação simultânea da orientação e do bias do giroscópio, bem como a fusão consistente das informações provenientes dos três sensores inerciais. Desse modo, os resultados obtidos demonstraram a capacidade do filtro em reduzir significativamente os erros de orientação quando

comparado à integração direta do giroscópio. Foram observadas reduções expressivas do erro quadrático médio nos três eixos, particularmente em *Roll* e *Pitch*, confirmando a eficácia da estratégia de fusão sensorial adotada. Adicionalmente, a estabilidade numérica observada durante todo o horizonte de simulação evidenciou a adequação da formulação *Error-State* para aplicações de estimação de atitude em sistemas robóticos e plataformas embarcadas.

4.1. Métricas de Desempenho

Dentre os resultados obtidos, observa-se a expressiva redução do erro quadrático médio em todos os eixos avaliados. Os maiores ganhos foram obtidos em *Roll* e *Pitch*, cujos RMSE foram reduzidos em 91,0% e 87,4%, respectivamente. Esses resultados refletem a elevada observabilidade desses ângulos por meio do vetor gravitacional medido pelo acelerômetro.
Assim, a Tabela 1 apresenta os resultados obtidos pelo ES-EKF em comparação com a integração direta do giroscópio sem qualquer mecanismo de correção externa.

Tabela 2: Análise métrica de desempenho por eixo

Eixo	RMSE ESEKF	MAE ESEKF	Máx. ESEKF	RMSE RAW	Redução (%)
Roll	1,60	0,52	21,47	17,67	91,0
Pitch	1,99	0,78	17,17	15,71	87,4
Yaw	3,21	1,73	24,78	6,33	49,4

No eixo de *Yaw*, a redução foi de 49,4%. Embora inferior aos valores observados nos demais eixos, esse resultado é compatível com a teoria da observabilidade de sistemas inerciais, uma vez que o vetor gravitacional não contém informação sobre rotações em torno do eixo vertical. Consequentemente, a correção do *Yaw* depende exclusivamente das medições oriundas do magnetômetro, naturalmente mais ruidosas e menos frequentes.
Os valores de erro absoluto médio permaneceram inferiores a 2° em todos os eixos, indicando elevada precisão global do estimador ao longo da maior parte da trajetória analisada.

4.2. Análise Estatística.

A distribuição dos erros foi inicialmente avaliada pelos testes de Shapiro-Wilk e D'Agostino-Pearson. Em todos os eixos, ambos os testes rejeitaram a hipótese de normalidade ao nível de significância de 5%, indicando distribuições assimétricas e com caudas mais pesadas do que uma distribuição gaussiana ideal.
A investigação da presença de viés sistemático foi conduzida por meio do teste t para uma amostra e do teste não paramétrico de Wilcoxon. Para o eixo *Roll* não foi observada evidência estatística de viés, sendo o intervalo de confiança $bootstrap$ (Fig. 3) de 95% centrado em torno de zero. Nos eixos *Pitch* e *Yaw* foram identificados desvios médios residuais inferiores a 1°, embora estatisticamente detectáveis devido ao elevado número de amostras disponíveis.

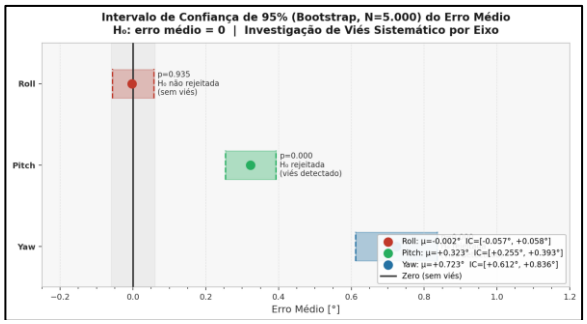


Figura 3. Intervalo de Confiança de 95% (Bootstrap, N=5.000) do Erro Médio por Eixo por Meio da Investigação de Viés de Hipótese Nula (H_0)

A comparação direta entre os erros absolutos do ES-EKF e da integração RAW foi realizada por meio do teste pareado de Wilcoxon. Em todos os casos observou-se rejeição da hipótese nula com $p < 0{,}001$, demonstrando superioridade estatisticamente significativa do método proposto. A magnitude dessa diferença foi quantificada pelo coeficiente de Cohen, resultando em valores de 7,4 para *Roll* (Fig. 4.a), 5,7 para *Pitch* (Fig. 4.b) e 0,93 para *Yaw* (Fig. 4.c). Todos os valores excedem amplamente o limiar convencional de 0,8 para caracterização de efeito grande, evidenciando que os ganhos observados possuem relevância prática substancial.

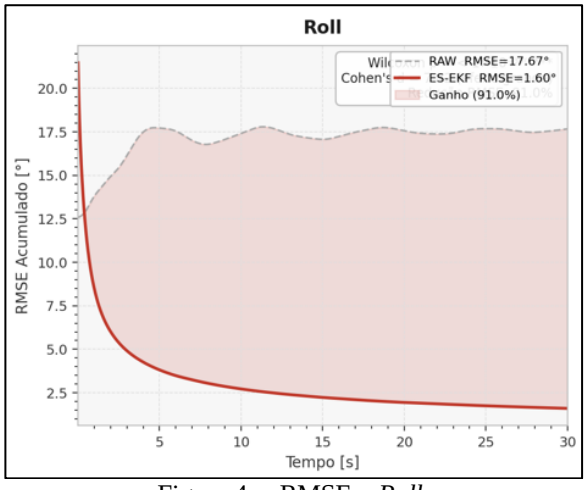


Figura 4.a. RMSE – *Roll*

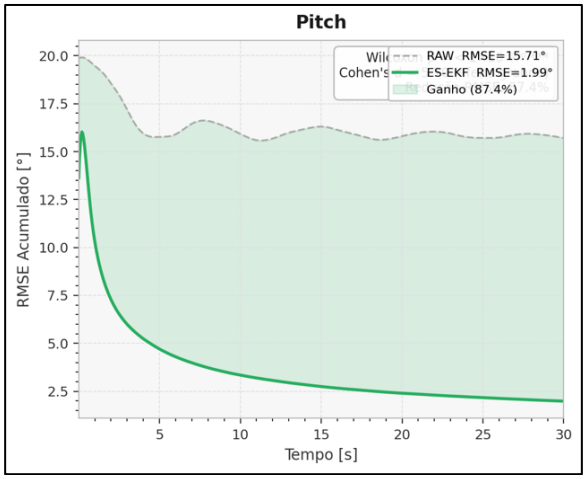


Figura 4.b. RMSE – *Pitch*

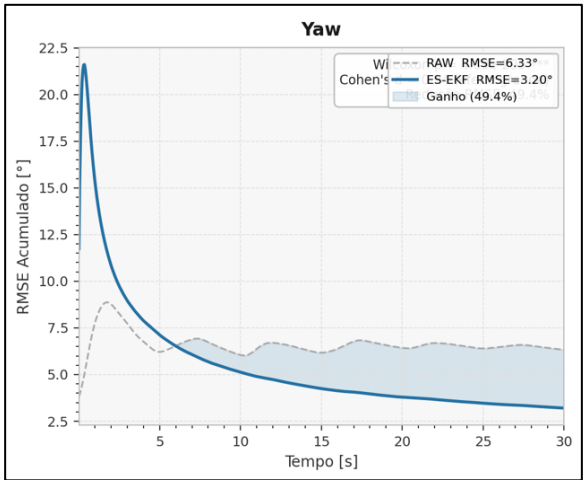


Figura 4.c. RMSE – *Yaw*

Por fim, a autocorrelação de primeira ordem apresentou valores superiores a 0,99 nos três eixos apresentados pelas figuras 4.a, 4.b e 4.c. Esse comportamento indica forte continuidade temporal dos erros estimados e confirma que o filtro acompanha suavemente a evolução da atitude sem introduzir oscilações artificiais ou descontinuidades abruptas.

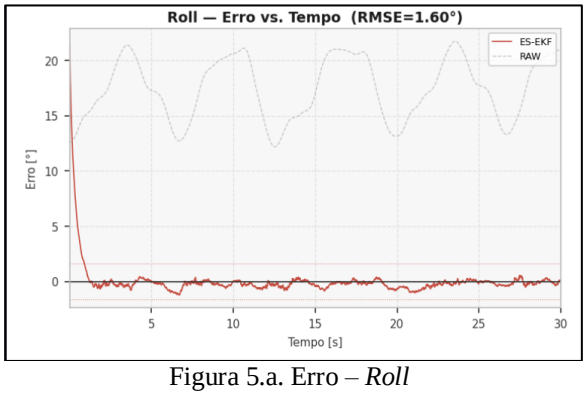


Figura 5.a. Erro – *Roll*

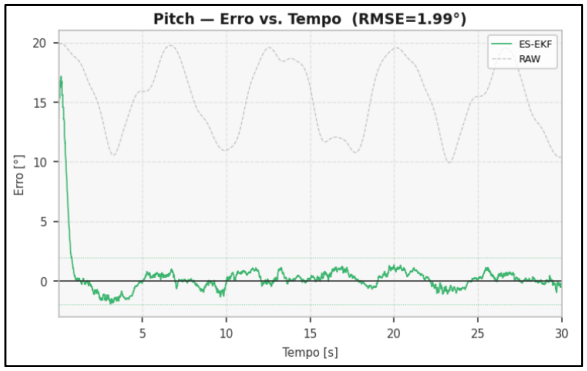


Figura 5.b. Erro – *Pitch*

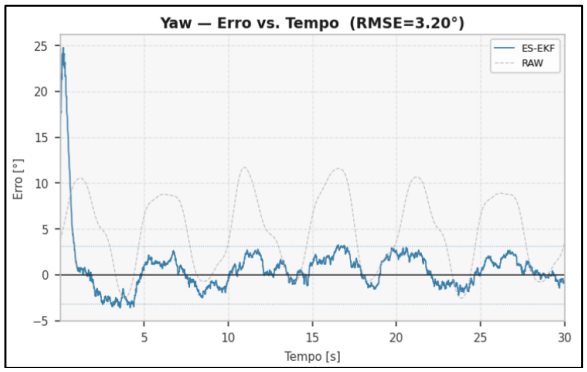


Figura 5.c. Erro – *Yaw*

4.3. Discussão

Os resultados obtidos demonstram que a implementação desenvolvida reproduz adequadamente os princípios fundamentais do *Error-State Extended Kalman Filter* baseado em quatênrios. A representação multiplicativa do erro em $so(3)$, associada à atualização por retração exponencial e à utilização da forma de Joseph para a covariância, produziu um estimador estável durante todo o horizonte de simulação.

Durante o processo de desenvolvimento foram identificados três aspectos particularmente críticos para a reprodutibilidade dos resultados. O primeiro refere-se à preservação da escala física do vetor magnético de referência. A normalização desse vetor reduz drasticamente a relação sinal-ruído e compromete a atuação do magnetômetro como fonte de observabilidade do *Yaw*. O segundo aspecto corresponde ao alinhamento temporal entre a estimativa do filtro e o *ground truth* após a janela de aquecimento. O terceiro está relacionado à utilização de simuladores físicos convencionais para validação de filtros baseados em gravidade, cujas acelerações translacionais frequentemente violam as hipóteses fundamentais do modelo de observação do acelerômetro.

As reduções observadas de 91,0% em *Roll* e 87,4% em *Pitch* encontram-se dentro da faixa reportada na literatura para sistemas equivalentes de fusão sensorial baseados em IMUs de nove graus de liberdade. A redução mais modesta em *Yaw* também

é consistente com trabalhos anteriores, refletindo a menor observabilidade desse eixo e sua dependência exclusiva das medições magnetométricas. Em conjunto, os resultados confirmam a eficácia da arquitetura proposta e demonstram que o ES-EKF implementado fornece estimativas de atitude significativamente mais precisas do que a integração inercial desacoplada do giroscópio.

5. REFERÊNCIAS

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. Optimal Filtering. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. New York: John Wiley & Sons, 2001.

CHIRIKJIAN, G. S. Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups. Vol. 2. Boston: Birkhäuser, 2012.

CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L. Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. New York: Springer, 2016.

CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L.; CHENG, Y. Survey of nonlinear attitude estimation methods. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, v. 30, n. 1, p. 12–28, 2007.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB. 4. ed. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2015.

GRIP, H. F.; FOSSEN, T. I.; JOHANSEN, T. A.; SABERI, A. Attitude estimation using biased gyro and vector measurements with time-varying reference vectors. IEEE Transactions on Automatic Control, v. 57, n. 5, p. 1332–1338, 2012.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

KELLY, J. Robotic State Estimation. PhD Thesis. University of Toronto, 2013.

LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, v. 5, n. 5, p. 417–429, 1982.

MARKLEY, F. L. Attitude error representations for Kalman filtering. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, v. 26, n. 2, p. 311–317, 2003.

NOAA. World Magnetic Model 2024. National Centers for Environmental Information, 2024. Disponível em: https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/

SABATINI, A. M. Estimating three-dimensional orientation of human body parts by inertial/magnetic sensing. Sensors, v. 11, n. 2, p. 1489–1525, 2011.

SABATINI, A. M. Quatênio-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, v. 53, n. 7, p. 1346–1356, 2006.

SHUSTER, M. D. A survey of attitude representations. Journal of the Astronautical Sciences, v. 41, n. 4, p. 439–517, 1993.

SIMON, D. Optimal State Estimation: Kalman, H∞ and Nonlinear Approaches. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

SOLÀ, J. Quatênio Kinematics for the Error-State Kalman Filter. Barcelona: Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, 2017.

SOLÀ, J.; DERAY, J.; ATCHUTHAN, D. A Micro Lie Theory for State Estimation in Robotics. arXiv preprint arXiv:1812.01537, 2018.

TRAWNY, N.; ROUMELIOTIS, S. I. Indirect Kalman Filter for 3D Attitude Estimation. Technical Report 2005-002. Minneapolis: University of Minnesota, 2005.