UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Alan Gustavo Ferreira [1]
Paula Moreira Baltar Bellemain [2]
Cristiane de Arimatéa Rocha [3]

GD1: Livro Didático e Currículo

Resumo
Este trabalho teve como objetivo analisar a organização dos conteúdos de Combinatória em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), tomando como referência a noção de praxeologia. Foram analisados dois livros didáticos de coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021. Os capítulos destinados aos conteúdos combinatórios foram modelizados com base no quarteto praxeológico e analisados à luz de um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Combinatória. Os resultados evidenciaram que as obras apresentam estruturas semelhantes, com predominância dos problemas de arranjo, permutação e combinação, além do uso recorrente do princípio multiplicativo e de fórmulas como principais técnicas de resolução. Também foi identificado um enfraquecimento dos discursos tecnológico-teóricos associados às técnicas mobilizadas, bem como uma abordagem limitada dos problemas do tipo Produto de Medidas. Conclui-se que os livros analisados privilegiam procedimentos operatórios em detrimento da compreensão conceitual dos saberes combinatórios.

Palavras-chave: Combinatória. Livro Didático de Matemática. Teoria Antropológica do Didático.

1 Introdução

O livro didático tem se constituído, ao longo dos anos, como um dos recursos didáticos que é parte integrante da cultura escolar e, em muitos contextos, o único disponível. Os usos em processos de ensino e de aprendizagem são variados, em todos os níveis educativos, como fonte de consulta, como repositório de exercícios e problemas de naturezas distintas, como guia curricular (o professor ensina os conteúdos indicados pelo livro didático (doravante LD) adotado e, em muitos casos, na mesma ordem apresentada) e até mesmo para estabelecer estratégias de ensino (Ferreira; Almeida, 2019; Silva; Pessoa, 2015; Fonseca *et al*., 2014).

Nesse contexto, a Combinatória destaca-se como uma área da Matemática historicamente presente nos livros didáticos desde meados do século XX, sobretudo

[1] Secretaria de Educação de Pernambuco (SEDUC-PE) • Doutor em Educação Matemática e Tecnológica • Recife, Pernambuco (PE), Brasil • alan.gustavo@ufpe.br • ORCID https://orcid.org/0000-0001-9366-695X
[2] Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) • Doutora em Didactique Des Disciplines Scientifiques • Recife, Pernambuco (PE), Brasil • paula.bellemain@ufpe.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-2864-8883
[3] Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) • Doutora em Educação Matemática e Tecnológica • Recife, Pernambuco (PE), Brasil • cristiane.arocha@ufpe.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-4598-2074

naqueles destinados ao Ensino Médio, conforme ressalta Ferreira (2019). Mais recentemente, observa-se também sua inserção desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, movimento impulsionado, entre outros fatores, pela publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997), que contribuíram para a ampliação e reorganização dos conteúdos matemáticos nesse nível de ensino.

Esse movimento é posteriormente reforçado com o advento da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), que ratifica a importância dos conteúdos combinatórios nos currículos escolares brasileiros e, por conseguinte, sua presença nos livros didáticos de Matemática.

Diante desse quadro, e considerando a centralidade do LD no contexto educacional brasileiro, evidencia-se a necessidade de investigar como a Combinatória se apresenta, estrutura e organiza nos LD de Matemática destinados ao Ensino Médio. A delimitação desse nível de ensino justifica-se pelo fato de este estudo integrar uma investigação mais ampla, oriunda do trabalho de doutoramento do primeiro autor, que visou desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio.

Para subsidiar essa análise, adotam-se os pressupostos teórico-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1999), mais especificamente a noção de praxeologia. Ressalta-se que a TAD tem se constituído como um importante referencial teórico-analítico para, entre outros aspectos, a investigação de práticas docentes e a análise de livros didáticos (Bittar, 2017, Ferreira; Almeida, 2019). Ademais, toma-se como referência a investigação desenvolvida por Ferreira (2019), na qual são analisados os saberes combinatórios, à luz desse mesmo referencial, em um LD de Matemática destinado ao Ensino Médio.

No segundo tópico desse artigo, são explicitados alguns pressupostos da TAD, com ênfase na noção de praxeologia. No tópico 3 é apresentado o Modelo Praxeológico de Referência adotado neste estudo; em seguida, apresentam-se os procedimentos metodológicos que orientaram a produção e a análise dos dados; por fim, discutem-se os resultados da investigação.

2 Alguns aspectos da Teoria Antropológica do Didático

Na TAD, postula-se que qualquer atividade humana, que se realiza regularmente, pode ser modelizada com a noção de praxeologia. Além disso, o desenvolvimento dessas

atividades ocorre em dois níveis: o da prática (práxis) e o da justificação dessas práticas (logos). Essa teoria situa a atividade matemática e, por conseguinte, o estudo da matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Assim, uma praxeologia que descreve uma atividade matemática, bem como o saber que dela emerge, se chama praxeologia matemática ou organização matemática (OM).

A esse respeito, Bosch assinala que:

> Uma organização matemática é uma entidade composta por: *tipos de problemas* ou *tarefas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permitem resolver os tipos de problemas; *tecnologias* ou discurso ("logos") que descrevem ou explicam as técnicas; uma *teoria* que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos. (Bosch, 2000, p. 16, tradução nossa[4])

A noção de praxeologia tem sua base nas ideias interdependentes de tarefa t e de tipos de tarefas T. Quando uma tarefa t pertence a um determinado tipo de tarefas T, representa-se essa relação por $t \in T$. De acordo com Chevallard (1999), as tarefas costumam ser expressas por meio de verbos e complementos, como, por exemplo, limpar a casa, desenvolver uma expressão algébrica ou dividir um número inteiro por outro.

Pode-se afirmar que, quando um tipo de tarefas T é reconhecido em determinadas instituições, isso ocorre porque existe uma técnica τ, ou um conjunto restrito de técnicas, capaz não apenas de solucionar uma tarefa específica, mas também de resolver diversas outras tarefas pertencentes ao mesmo tipo.

Chevallard (1999) acrescenta que é preciso considerar que uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para resolver todas as tarefas $t \in T$. Em alguns casos, ela consegue atender apenas a uma parte $P(\tau)$das tarefas pertencentes a T, sem alcançar êxito nas demais, representadas por $T \backslash P(\tau)$. Nesse sentido, pode-se compreender que uma técnica pode mostrar-se mais eficiente do que outra não necessariamente para todo o conjunto T, mas para uma parcela específica dele. Assim, torna-se fundamental reconhecer os limites de abrangência de cada técnica, uma vez que ela tende a falhar diante das tarefas que extrapolam seu campo de atuação.

Outro aspecto relevante apontado por Chaachoua (2018) reside na intenção de descrever uma técnica ou de determinar do que ela é feita. Observando os trabalhos que recorrem à análise praxeológica, o autor pontua que há ao menos duas maneiras principais

[4] "Una organización matemática es una entidad compuesta por: tipos de problemas o tareas problemáticas; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos ("logos") que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos" (Bosch, 2000, p. 16)

de se fazer isso: descrevendo-a na forma de ações mais ou menos estruturadas ou em termos de subtarefas. O autor complementa que uma técnica pode ser descrita por um conjunto de tipos de tarefas, denominados ingredientes da técnica.

No que se refere à continuidade da caracterização do quarteto praxeológico, Chevallard (1999) considera que nenhuma técnica consegue se manter de forma legítima em uma instituição se não for reconhecida como um modo adequado, compreensível e justificável de realizar determinada ação. Assim, a existência de uma técnica exige a presença de um discurso que a interpreta e a justifica, denominado tecnologia θ.

O autor complementa que qualquer que seja o tipo de tarefas T, a técnica τ relativa a T está sempre acompanhada de ao menos um embrião ou mais frequentemente ainda, de um vestígio de tecnologia θ e que, em muitos casos, alguns elementos tecnológicos estão integrados na técnica. Isso pode, em certa medida, conduzir à ideia de que, quando uma tecnologia não é explicitada claramente, a maneira como se resolve a tarefa assume a dupla função de ser técnica e tecnologia ao mesmo tempo.

Por sua vez, toda tecnologia necessita igualmente de uma justificação, uma vez que suas afirmações, sejam elas explícitas ou implícitas, podem exigir razões e explicações. Desse modo, alcança-se um nível mais elevado de justificação, explicação e produção, denominado teoria Θ. A teoria desempenha, em relação à tecnologia, o mesmo papel que a tecnologia exerce em relação à técnica, configurando-se, portanto, como uma espécie de 'tecnologia da tecnologia'.

Chevallard (1999) também introduziu a distinção entre diferentes tipos de Organizações Matemáticas (OM), considerando o grau de complexidade de seus componentes. As Organizações Pontuais (OMP) são constituídas a partir de um único tipo de tarefa e definidas com base no bloco técnico-prático. Já as Organizações Locais (OML) resultam da integração de diferentes organizações pontuais, nas quais o discurso tecnológico assume papel central. Por sua vez, as Organizações Regionais (OMR) são constituídas por meio da coordenação, articulação e integração de diferentes organizações locais em torno de uma mesma teoria matemática. Por fim, as Organizações Globais (OMG) emergem da articulação de diversas organizações regionais, integrando diferentes teorias matemáticas.

O uso da estrutura praxeológica como instrumento de análise e modelização do saber, articula-se, de maneira mais ou menos explícita, com a adoção de um modelo mais

abrangente, capaz não apenas de descrever as práticas institucionais já existentes, mas também de servir como parâmetro para sua problematização. Nesse contexto, insere-se, no âmbito da TAD, a noção de Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

Gascón (2018) e Bosch (2019) apresentaram algumas características estruturantes e considerações do MPR que buscam orientar sua função heurística e sua utilização na análise e reconstrução do saber a ensinar das quais destacamos seu caráter provisório e investigativo, sua função problematizadora diante dos modelos institucionais de conhecimento e sua relevância para a análise dos fenômenos didáticos e dos processos de transposição didática.

3 Um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Combinatória

Antes de explicitarmos o MPR assumido neste estudo, cabe definirmos o que entendemos por Combinatória. Ferreira (2024) define a Combinatória como sendo o ramo da Matemática que estuda o desenvolvimento de métodos e técnicas de contagem de agrupamentos de elementos ou subconjuntos formados a partir de um ou mais conjunto(s) finito(s) dado(s), que obedecem a certas condições para sua formação e que não necessitam listar ou enumerar esses elementos e/ou agrupamentos.

A partir dessa definição de Combinatória, passamos à explicitação do MPR assumido neste estudo. Ferreira, Moreira e Rocha (2025) apresentam uma síntese desse modelo, da qual destacamos alguns elementos a seguir, concernentes aos problemas de contagem, que constituem a categoria mais trabalhada, quando não a única, no âmbito da Educação Básica, em especial no Ensino Médio.

Entre os problemas de contagem, é possível identificar duas subcategorias. A primeira refere-se às situações em que se busca determinar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos, sob determinadas condições, correspondendo aos problemas do tipo produto de medidas (Vergnaud, 1991). A segunda abrange problemas cujas soluções se expressam por meio de agrupamentos ou subconjuntos binários, ternários, ..., até n elementos, a depender do número de elementos selecionados de um conjunto gerador com m elementos, também sob certas condições, contemplando os problemas de arranjo, permutação e combinação (Merayo, 2015).

O quadro 1 que aparece subsequentemente apresenta um resumo dos tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem aqui considerados.

Quadro 1 – Síntese dos tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem

Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T_x)	Descrição
Produto de Medidas	T_1	Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições
Arranjo	T_2	Contar o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos
Permutação	T_3	Contar o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais todos os m elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos
Combinação	T_4	Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos.

Fonte: Ferreira (2024)

Para enfrentar esses tipos de tarefas, foi escolhido o Princípio Multiplicativo (τ_{PM}), uma vez que, em muitas delas, ele aparece, à primeira vista, como único elemento das técnicas mobilizadas. Em outras situações, configura-se como um componente sempre presente no conjunto de elementos que as compõem. Assim, considerando que ora atua como elemento exclusivo e ora como parte integrante do conjunto de elementos que viabilizam a resolução das tarefas de contagem, adota-se a perspectiva de tratá-lo como uma técnica, e não apenas como um ingrediente.

Por fim, destaca-se a importância dos discursos tecnológico-teóricos (θ, Θ) na justificação das técnicas associadas aos problemas de contagem. No caso do tipo T_1 (Produto de Medidas), trata-se da contagem de agrupamentos provenientes do produto cartesiano de conjuntos disjuntos, os quais constituem um novo conjunto com natureza distinta dos conjuntos originais. Já nos tipos T_2, T_3 e T_4 (arranjos, permutações e combinações), a justificativa da técnica τ_{PM} fundamenta-se nas diferentes formas de disposição dos elementos nos agrupamentos, considerando-se a ordem e a natureza dos elementos. Em T_2, as variações decorrem da ordem e/ou natureza dos elementos, sendo a contagem expressa por um produto de fatores decrescentes a partir de m. Em T_3, as diferenças entre os agrupamentos decorrem apenas da ordem, com $m = n$. Em T_4, a ordem é irrelevante, sendo a distinção baseada apenas na natureza dos elementos. Assim, os

discursos tecnológico-teóricos não apenas justificam a escolha das técnicas, mas também explicitam o que está sendo efetivamente contado em cada tipo de tarefa.

4 Percurso Metodológico

Trata-se de uma investigação qualitativa, de caráter descritivo e interpretativo, do tipo documental**,** conforme Severino (2007), que teve como objetivo analisar a organização dos conteúdos de Combinatória em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático, com base na noção de praxeologia (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias).

Foram analisados dois LD de Matemática do Ensino Médio que abordam especificamente conteúdos de Combinatória, ambos aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021: Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade (Bonjorno, Giovanni Jr e Câmara de Sousa, 2020); e Matemática em Contextos: Análise Combinatória, Probabilidade e Computação, (Dante e Viana, 2020). A escolha dessas obras justifica-se por terem sido as coleções de Matemática mais distribuídas, conforme dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)[5], órgão responsável pela gestão do PNLD. Em conjunto, essas coleções representam mais da metade das obras de Matemática distribuídas às escolas públicas, reforçando sua relevância e representatividade no cenário educacional brasileiro.

Cabe destacar que o PNLD passou por uma reestruturação a partir de 2021. Até então, as coleções destinadas ao Ensino Médio eram organizadas em três volumes, correspondentes a cada ano dessa etapa de escolarização. Com a reformulação, as coleções de LD de Matemática passaram a ser estruturadas em seis volumes e os conteúdos combinatórios são, em geral, abordados no mesmo volume que contempla os saberes relacionados à Estatística e à Probabilidade.

Os saberes combinatórios foram modelizados a partir do quarteto praxeológico e analisados à luz do referencial teórico construído para a investigação, bem como do MPR adotado neste estudo. Salientamos que não tivemos como objetivo atribuir juízo de valor às obras analisadas, tampouco avaliá-las no sentido de enaltecê-las ou depreciá-las. A

[5] Os dados de distribuição de todos os títulos distribuídos no PNLD Ensino Médio 2021 podem ser acessados através do sítio do FNDE: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos

finalidade consistiu em examiná-las sob a ótica das organizações praxeológicas referentes aos objetos de saber da Combinatória nelas presentes.

5 Análise e discussão dos resultados

Esta análise visou identificar e categorizar os tipos de tarefas, as técnicas mobilizadas e os elementos tecnológico-teóricos presentes nos capítulos e seções especificamente destinados à Combinatória. Ressalta-se que as obras não foram analisadas em sua totalidade, mas apenas os capítulos destinados aos conteúdos combinatórios.

Em relação à organização dos conteúdos, observamos grande proximidade entre as duas obras. Ambas iniciam com exemplos de situações envolvendo problemas de contagem relacionados ao cotidiano, apresentam o princípio multiplicativo e, no caso de Bonjorno, Giovanni Jr e Câmara de Sousa (2020), também o princípio aditivo, abordam o conceito de fatorial e, posteriormente, exploram os problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação, além de incluírem exercícios resolvidos e propostos. Contudo, há uma diferença na estruturação das seções: enquanto o livro 'Prisma Matemática' reúne arranjo, permutação e combinação em uma única seção intitulada 'Problemas de contagem', Dante e Viana (2020) dedicam uma seção específica para cada um desses tipos de problemas. Além disso, em ambos os livros, embora o produto de medidas apareça em diferentes momentos do capítulo, especialmente nas introduções e na formalização do princípio multiplicativo, esse tipo de problema não é explicitamente apresentado como uma categoria de problema de contagem, o que pode favorecer interpretações equivocadas, como a compreensão de que o princípio multiplicativo constitui, por si só, uma categoria de problemas combinatórios.

Nos capítulos destinados aos conteúdos combinatórios de cada obra, identificamos 102 tarefas em Bonjorno, Giovanni Jr e Câmara de Sousa (2020) e 219 tarefas em Dante e Viana (2020), conforme distribuição apresentada na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1 – Distribuição das tarefas matemáticas do capítulo sobre Combinatória nos LD analisados

Tipos de Tarefas (T_x) / **Livros Didáticos**	**Produto de medidas T_1**	**Fatorial**	**Arranjo T_2**	**Permutação T_3**	**Combinação T_4**	**Outras tarefas matemáticas**
Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020)	10	13	31	31	13	4

Dante e Viana (2020)	16	11	48	80	53	11

Fonte: Acervo da pesquisa

Em ambas as obras, a distribuição das tarefas de Combinatória não ocorre de maneira equânime, havendo destaque significativo para as tarefas relacionadas ao produto fatorial, tanto pela quantidade quanto pelo tratamento dado a esse conteúdo. Embora o fatorial seja inicialmente apresentado como técnica auxiliar para resolver problemas combinatórios, especialmente de permutação, o tratamento conferido pelos autores faz com que ele passe a assumir status de tipo de tarefas em seções específicas dos capítulos e nas atividades propostas. Esse encaminhamento pode induzir à compreensão equivocada de que tarefas envolvendo produto fatorial constituem, necessariamente, problemas de Combinatória.

Nas obras analisadas, identificamos os tipos de tarefas T_1, T_2, T_3 e T_4, relacionados, respectivamente, aos problemas de Produto de Medidas, Arranjo, Permutação e Combinação. As análises concentraram-se nesses tipos de tarefas e em suas praxeologias matemáticas, tomando como referência, principalmente, as atividades resolvidas apresentadas pelos autores, por estarem mais alinhadas ao corpus deste estudo, centrado nos problemas de contagem.

Uma tarefa do tipo T_1 identificada nas obras analisadas é a seguinte:

> Margarete trabalha em uma loja de roupas masculinas e ficou responsável por vestir um dos manequins da vitrine durante uma semana. A cada dia, ela precisa apresentar o manequim vestido com uma combinação diferente de roupas. Sem saber quantas peças seriam necessárias para montar as sete combinações, uma para cada dia da semana, ela separou uma calça, uma bermuda e quatro camisetas (verde, azul, rosa e preta). Qual a quantidade de combinações possíveis para se vestir o manequim com as quatro camisetas, a bermuda e a calça? (Bonjorno; Giovanni Jr; Câmara de Sousa, 2020, p. 81).

Trata-se de um problema pouco complexo, especialmente para a etapa da escolarização proposta que é o Ensino Médio. Isso pode contrastar com o que preceituam Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) e Sriraman e English (2004) ao considerarem que os problemas dessa área da Matemática devem ter o caráter desafiador e fornecer oportunidades para o desenvolvimento de um pensamento matemático rico.

No trabalho com a técnica, os autores de ambas as obras apresentam inicialmente o diagrama de árvore e a tabela de dupla entrada como recursos para sistematizar o raciocínio e representar todas as possibilidades da tarefa proposta. Contudo, tais recursos possuem alcance limitado diante de grandes quantidades de elementos. Posteriormente,

percebe-se que essas representações passam a assumir um papel tecnológico, servindo de justificativa para a técnica do princípio multiplicativo, explicitamente fundamentada pelos autores com base nesses recursos.

Isso se coaduna com o que advogam Santos e Freitas (2017) ao considerarem que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica. É o que acontece, na situação em apreciação, com o diagrama de árvores e a tabela de dupla entrada. Frisamos, também, a importância que tem o princípio multiplicativo como técnica para resolver tarefas desse tipo.

A respeito do tipo de tarefas T_2 (Arranjo), apresentamos a seguinte tarefa proposta por Dante e Viana (2020) "Quantos números de 2 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?".

Para lidar com tarefas desse tipo, Bonjorno, Giovanni Jr e Câmara de Sousa (2020) sugerem, inicialmente, a utilização do diagrama de árvore para listar todas as possibilidades. Contudo, observa-se que o uso dessa técnica pode tornar-se pouco funcional diante da grande quantidade de elementos ou agrupamentos possíveis. Posteriormente, os autores utilizam o diagrama de árvore como justificativa para a adoção do princípio multiplicativo, mobilizando, ainda, aspectos relacionados à ordem e à natureza dos elementos dos agrupamentos para fundamentar essa técnica. Entretanto, mais à frente, torna-se nítida a opção pela fórmula de Arranjo como técnica privilegiada para resolver esse tipo de tarefas, o que pode ser evidenciado nas demais tarefas do tipo T_2 que aparecem resolvidas na obra. Já Dante e Viana (2020) elegem a fórmula de arranjo (τ_{FA}) e o princípio multiplicativo (τ_{PM}) como técnicas para resolver esse tipo de tarefas, sem estabelecer predileção entre elas, uma vez que todas as tarefas do tipo T_2 resolvidas na porção analisada do livro utilizam ambas as técnicas. Vale ressaltar que, do ponto de vista dos critérios de avaliação de uma técnica, segundo Chevallard (1999), ambas apresentam alcance satisfatório e fiabilidade tanto para resolver a tarefa proposta quanto outras tarefas do mesmo tipo.

Concernente ao tipo de tarefas T_3 (Permutação), os autores ilustram esse caso por meio das seguintes tarefas: "vamos calcular quantos anagramas podemos formar a partir da palavra QUEIJO" (Bonjorno; Giovanni Jr; Câmara de Sousa, 2020, p. 90) e "Quantos

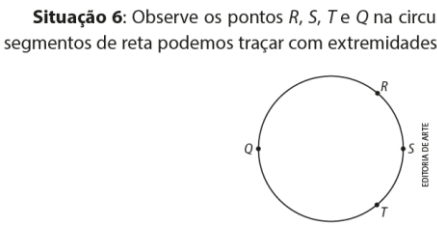
números diferentes de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?" (Dante; Viana, 2020, p. 22).

Enquanto Bonjorno; Giovanni Jr; Câmara de Sousa (2020) recorrem inicialmente ao princípio multiplicativo e à fórmula da Permutação, priorizando esta última como técnica principal, Dante e Viana (2020) utilizam a resolução por tentativas, que se trata da enumeração das possibilidades, e a árvore de possibilidades. No entanto, é preciso convir que estas técnicas têm um nível de alcance bastante limitado, pois podem não ter eficácia na resolução de outras tarefas do mesmo tipo, especialmente aquelas cujo conjunto gerador e/ou os agrupamentos formados possuam muitos elementos. Por isso, entendemos que, os autores as utilizam como justificação das técnicas principais escolhidas que são o princípio multiplicativo e a fórmula de permutação.

Embora Dante e Viana (2020) tenham apresentado um exemplo de tarefa do tipo T_3 semelhante ao tipo T_2, ao tratarem a permutação como um caso particular de arranjo em que $m = n$, é possível identificar em Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020) um uso mais explícito desse discurso justificativo na construção do entorno tecnológico-teórico.

Já em relação ao tipo de tarefas T_4, Dante e Viana (2020) propuseram algumas tarefas resolvidas, das quais destacamos a seguinte: "Júlio precisa escolher quatro entre seis opções de frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?", enquanto Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020) propuseram a tarefa ilustrada na Figura 1:

Figura 1 – Tarefa do tipo T4 presente no LD



Fonte: Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 92)

O processo de elaboração da técnica para resolver tarefas desse tipo inicia-se, em ambos os casos, pela enumeração de alguns casos possíveis, utilizando-se a ideia de subconjuntos ou o diagrama de árvore de possibilidades. Contudo, do ponto de vista do alcance da técnica, a enumeração torna-se ineficiente em situações em que a quantidade de elementos do conjunto gerador e/ou dos agrupamentos é muito grande.

Por isso, os autores das duas obras procuram assentar duas técnicas para dar conta não apenas dessa tarefa, mas de todas as tarefas do tipo T_4 que são o princípio multiplicativo e a fórmula de Combinação, sendo esta última a principal. Na elaboração do entorno tecnológico-teórico, além da enumeração, se utilizaram da árvore de possibilidades como tecnologia para justificar a escolha da técnica da definição de Combinação, bem como as definições de Arranjo e de Permutação.

O quadro 2 sintetiza as praxeologias matemáticas em torno dos tipos de tarefas T_1, T_2, T_3 e T_4.

Quadro 2 – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T_1, T_2, T_3 *e* T_4

Tipo de tarefas	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
T_1 (Produto de Medidas): Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições.	• Princípio multiplicativo (τ_{PM}).	• Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}); • Tabela de dupla entrada (θ_{TDP}); • Definição de princípio multiplicativo (θ_{DPM}).
T_2 (Arranjo): Contar o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos.	• Princípio multiplicativo (τ_{PM}). • Fórmula de Arranjo (τ_{FA}).	• Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}); • Definição de Arranjo – ordenação dos elementos (θ_{DA}).
T_3 (Permutação): Contar o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais todos os m elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos.	• Princípio multiplicativo (τ_{PM}). • Fórmula de Permutação (τ_{FP}).	• Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}); • Enumeração (θ_{EN}); • Definição de Arranjo (θ_{DA}) • Definição de Permutação (θ_{DP})
T_4 (Combinação): Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos.	• Princípio multiplicativo (τ_{PM}). • Fórmula de Combinação (τ_{FC}).	• Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}) • Definição de Combinação (θ_{DC})

Fonte: Elaboração própria

Os livros analisados apresentam abordagens dos conteúdos combinatórios, bem como dos tipos de tarefas propostos, bastante semelhantes. Em nenhum deles foi possível perceber outros problemas de Combinatória além dos que foram apontados anteriormente.

Com relação às praxeologias matemáticas, podemos classificá-las como sendo praxeologias pontuais, conforme considera Chevallard (1999), pois estão organizadas, de maneira particularizada, sob tipos de tarefas únicos. Todavia, percebemos um movimento em direção às praxeologias locais, que são aquelas que estão centradas sobre uma tecnologia, quando Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020) e Dante e Viana (2020) buscam fazer conexão das justificações (tecnologias) das técnicas escolhidas entre os tipos de tarefas T_2 e T_3 e T_2 e T_4, respectivamente.

As tarefas do tipo T_1, relacionadas aos problemas do tipo Produto de Medidas, também estão presentes nos LD analisados, ainda que com menor ênfase em comparação aos demais tipos de tarefas. No entanto, observa-se que esses problemas combinatórios, quando aparecem nas seções de estudo, nem sempre recebem uma classificação adequada, sendo frequentemente denominados, de maneira imprecisa, como Princípio Fundamental da Contagem, em razão de o Princípio Multiplicativo ser a técnica canônica utilizada para resolvê-los. Contudo, como já mencionado anteriormente, esse princípio constitui uma técnica aplicável não apenas aos problemas de Produto de Medidas, mas também a outras situações de contagem.

Observa-se, também, um favoritismo do uso de fórmulas enquanto técnicas, agravado pelo fato de que estas são apenas enunciadas, em vez de elaboradas. Isso, de certo modo, ajuda a explicar a fragilidade do discurso tecnológico-teórico relativo às técnicas mobilizadas, o qual muitas vezes se mostra insuficiente e, em casos mais extremos, inexistente. Por outro lado, essa predileção pelo uso de fórmulas vai na contramão do que preconizam tanto as orientações curriculares quanto as pesquisas em Educação Matemática voltadas ao campo da Combinatória.

6 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo analisar a organização dos conteúdos de Combinatória em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático, considerando os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas. As análises evidenciaram que as obras apresentam estruturas semelhantes, com predominância dos problemas de arranjo, permutação e combinação, além do uso recorrente do princípio multiplicativo e de fórmulas como principais técnicas de resolução.

Observou-se, ainda, que os discursos tecnológico-teóricos associados às técnicas, em muitos casos, mostram-se fragilizados, sobretudo pela apresentação direta das fórmulas, sem maior elaboração conceitual. Também foi identificado que os problemas do tipo Produto de Medidas aparecem com menor destaque e, frequentemente, são tratados apenas como aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

De modo geral, as praxeologias matemáticas identificadas aproximam-se de organizações pontuais, embora tenham sido percebidos movimentos em direção a organizações locais. Assim, os resultados reforçam a importância de problematizar a organização dos saberes combinatórios nos livros didáticos, especialmente no que se refere à valorização da compreensão conceitual e não apenas à aplicação mecânica de fórmulas no ensino de Combinatória.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, v.25, n. 3, p. 364-387, 2017. https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640.

BONJORNO, J. R; GIOVANNI JÚNIOR, J. R; CÂMARA DE SOUZA, P. R. *Prisma matemática*: combinatória e probabilidade. São Paulo: Editora FTD, 2020**.**

BOSCH, M. Les modèles praxéologiques de référence: réflexions méthodologiques en TAD. In: *Actes du séminaire de didactique des mathématiques*. Paris, 2019.

BOSCH, M. *Un punto de vista antropológico*: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. In: IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva – Espanha. p.15-28, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental. 1997.

CHAACHOUA, H. *T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH*. Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – pág. 5-22. Paris: 2018. Disponível em: https://ardm.eu/wpcontent/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018.pdf

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

DANTE, L. R; VIANA, F. *Matemática em contextos*: análise combinatória, probabilidade e computação. São Paulo: Ática, 2020.

FERREIRA, A. G. *Percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores de Matemática sobre o ensino de Combinatória*. 2024. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2024.

FERREIRA, A. G. *Organizações matemáticas e didáticas no ensino de combinatória*. 2019. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

FERREIRA, A. G; BELLEMAIN, P. M. B; ROCHA, C de A. Panorama sobre a formação de professores de Matemática para o ensino de Combinatória.. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico. *Anais*...Campina Grande (PB) UEPB, 2024.

FERREIRA, A. G; BELLEMAIN, P. M. B; ROCHA, C de A. O ensino da Combinatória e sua razão de ser: trajetórias de uma formação de professores de Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 28, n. e715, p. 1-28, 2025.

FERREIRA, A. G; ALMEIDA, F. E. L. O estudo de Combinatória no ensino médio: uma análise das organizações matemáticas no livro didático. *Educação Matemática Pesquisa*, v.21, n.1, pp. 277-299, 2019.

FONSECA, S. S. *et al*. Uma reflexão sobre conteúdo Análise Combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. *Scientia Plena*, v.10, n. 04, p. 01-08, 2014.

GÁSCON, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOULOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). *A teoria antropológica do didático*: princípios e fundamentos. Curitiba, PR: CRV, 2018.

LOCKWOOD, Elise; WASSERMAN, Nicholas H.; TILLEMA, Erik S. A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal Of Mathematical Behavior*, v. 59, p. 1-15, set. 2020.

MERAYO, F. *Matemática Discreta*. 3 ed. Madrid: Paraninfo, 2015.

SANTOS, C. M. dos; FREITAS, J. L. M. de. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 13, n. 27, p. 51-66, set. 2017.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SRIRAMAN, B; ENGLISH, L. D. Combinatorial mathematics: Research into practice. *Mathematics Teacher*, v. 98, n. 3, p. 182–191, 2004.

VERGNAUD, V.. *El niño, las matemáticas y la realidad*: problemas de la enseñanza en las matematicas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.