USO DO PYTHON COMO FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO DE APROXIMAÇÃO DE ÁREAS: UMA ABORDAGEM COM SOMAS DE RIEMANN, ANÁLISE DE ERRO E APLICAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Anderson Vantuir Nobre Vieira[1]

[1]*Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (Cefet-MG), Belo Horizonte, Brasil (andersonobredoc@gmail.com)*

Resumo: Este trabalho propõe a aproximação de áreas por meio de Python e somas de Riemann. São analisadas uma função com solução analítica (quarto de circunferência), para validação, e a função gaussiana, sem primitiva elementar. A abordagem integra cálculo e tecnologia, evidenciando o papel dos métodos numéricos na resolução de problemas e na promoção de uma aprendizagem mais investigativa e resiliente.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Somas de Riemann, Educação Matemática, Python, Aproximação de Áreas.

INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas sempre foi importante objeto de estudo na Matemática. Essa é uma aplicação para diversas situações: embrulhar uma mercadoria, confeccionar uma caixa para guardar algo, fazer uma toalha para colocar em uma mesa, mensurar terreno para estimar o preço, enfim, há inúmeras aplicações para este tema com importância fundamental no cotidiano das pessoas. Mesmo que não seja sempre perceptível, é fácil encontrar aplicações desse tema.

Existem expressões sólidas, para calcular áreas de diversas figuras geométricas conhecidas e bem definidas, como os triângulos, os retângulos e os círculos entre outras. Para funções, também é possível calcular a área entre a curva e o eixo das abscissas por meio de uma integral.

Tradicionalmente, a resolução dos tipos de problemas mencionados no parágrafo anterior baseia-se em técnicas analíticas, que exigem domínio de ferramentas formais que nem sempre estão disponíveis para todas as figuras geométricas ou funções. Nesse contexto, métodos numéricos, como as somas de Riemann, surgem como alternativas viáveis para a obtenção de aproximações, especialmente quando apoiados por recursos computacionais, sem os quais, fica difícil ou quase impossível realizar os cálculos.

As soluções numéricas, atualmente, são amplamente utilizadas em problemas cuja solução analítica é inexistente ou inviável. Vieira (2020), diz que problemas de Poisson com condições de fronteira de Dirichlet ao sofrer uma pequena modificação na fronteira pode tornar quase impossível alcançar uma expressão analítica e utilizou soluções numéricas para esse tipo de problema trabalhando com uma aplicação real, demonstrando a importância do tema. Carreira e Brandi (2016) em seu trabalho, afirmam que muitas Equações Diferenciais Ordinárias não podem ser resolvidas por expressões analíticas e apresentam as soluções numéricas baseadas no método de Euler aperfeiçoado e modificado para um problema de valor inicial.

Observe que a existência de problemas sem soluções analíticas estão presentes em diversos cenários além dos dois citados anteriormente, e isso evidencia a importância dos métodos numéricos, tanto para o desenvolvimento científico quanto para a integração entre Matemática e tecnologias digitais no contexto educacional.

No ensino tradicional, a integral definida é frequentemente apresentada por meio do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que estabelece a conexão entre derivação e integração, permitindo o cálculo exato de áreas sob curvas por meio de primitivas. A partir do TFC é possível chegar a expressões que permitem calcular áreas entre curvas de funções e o eixo das abscisas. Segundo Paulin e Ribeiro (2019), Leibniz e Newton desenvolveram o TFC em sua forma mais intuitiva, e mais tarde Cauchy fez a formulação com o devido rigor matemático. Apesar da importância das soluções analíticas, os mesmos autores afirmam que diversos estudos apontam que o ensino de integrais frequentemente é apresentado de maneira excessivamente algorítmica, dificultando a compreensão conceitual dos estudantes acerca da interpretação geométrica e numérica da integral definida.

A função gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$, uma das funções mais importantes na Estatística. Ela tem relação direta com probabilidades por meio da área de seu gráfico. Essa função será melhor explorada ao longo deste trabalho na seção de materiais e métodos, mas pode-se dizer de imediato que com toda sua importância, não é possível calcular a área entre o eixo das abscissas e seu gráfico pelo Teorema Fundamental do Cálculo (por meio das integrais) de forma elementar.

A dependência exclusiva de abordagens analíticas pode limitar a resolução de problemas, especialmente quando não há forma fechada para a integral, tornando necessária a adoção de métodos numéricos.

Os métodos numéricos, mesmo sendo de grande valia para o cálculo de áreas, podem se tornar ineficientes caso exijam um valor grande de discretização de intervalo, ou seja, um número grande de subintervalos e que tenham que ser executados manualmente. Uma pessoa, dependendo do número de subintervalos, poderia levar de dias a meses, ou em situação pior, até anos, para realizar as operações sem uma máquina adequada.

Uma boa prática é usar os métodos numéricos apoiados por tecnologia, como um recurso computacional, por exemplo. Segundo Tudela (2018), "com o avanço rápido na tecnologia dos computadores e sua capacidade de processamento crescendo cada dia mais, os métodos numéricos tornaram-se uma ferramenta de grande importância no desenvolvimento de novos algoritmos ou na melhora de outros".

Há diversos softwares que podem resolver esse problema com facilidade, inclusive planilhas eletrônicas. Este trabalho propõe a utilização da linguagem Python como ferramenta para explorar a aproximação de áreas sob curvas, permitindo a análise do comportamento do erro e a comparação entre diferentes níveis de discretização.

Além disso, busca-se discutir o potencial dessas abordagens no ensino de Matemática, especialmente na educação básica, como forma de promover uma aprendizagem mais ativa e investigativa, o que pode futuramente pode ser muito benéfico tanto quando o aluno ingressa no ensino superior, quanto ao buscar trabalho. Vieira (2022) concorda e ressalta e incentiva o uso de tecnologia no ensino.

O ensino de Matemática já tem passado por transformações significativas com relação à inserção de tecnologias digitais, que possibilitam novas formas de abordagem de conceitos tradicionalmente abstratos. Entre esses conceitos, destaca-se o cálculo de áreas sob curvas, frequentemente associado ao estudo da integral definida.

Os alunos sempre foram acostumados a usar fórmulas e reproduzir aquilo que é ensinado de forma tradicional na sala de aula. Nos últimos anos isso já tem mudado, mas o ensino tradicional ainda prevalece nas escolas.

Em um contexto de disrupção educacional, no qual tecnologias digitais transformam as formas de ensinar e aprender, torna-se necessário repensar práticas tradicionais centradas exclusivamente em soluções analíticas. Nesse cenário, a utilização de métodos numéricos com apoio computacional pode ser compreendida como uma estratégia de adaptação, permitindo a continuidade da resolução de problemas mesmo diante de limitações teóricas. Essa capacidade de adaptação caracteriza um comportamento resiliente no processo de aprendizagem matemática.

Nesse ponto, o que está sendo proposto ao aluno, é uma resiliência intelectual, que permite a ele trabalhar a capacidade de buscar soluções alternativas (métodos numéricos, neste trabalho) quando as ferramentas tradicionais (integração) falham. Uma outra vantagem para o ensino, é que essa metodologia permite que os alunos de graduação ou ensino técnico visualizem conceitos abstratos (do Cálculo) de forma concreta.

O objetivo geral deste trabalho é demonstrar a eficácia do uso da linguagem Python e de métodos numéricos para a aproximação de áreas de regiões delimitadas por curvas cujas integrais são complexas ou não possuem solução analítica elementar.

Aplicar o método das somas de Riemann em diferentes funções;

- Comparar resultados aproximados com valores analíticos quando disponíveis;
- Analisar o comportamento do erro em função do número de subdivisões;
- Utilizar Python para automatizar cálculos e gerar visualizações;
- Discutir o potencial pedagógico dessas abordagens na educação básica;
- Analisar o uso de tecnologias como estratégia para promover resiliência na aprendizagem matemática diante de limitações analíticas;
- Explorar uma situação em que não há solução analítica simples.

MATERIAL E MÉTODOS

Este estudo foi desenvolvido com o objetivo de investigar a aproximação de áreas sob curvas por meio de métodos numéricos, utilizando ferramentas computacionais. Para isso, adotou-se o método das somas de Riemann, implementado na linguagem de programação Python, permitindo a realização de simulações com diferentes níveis de discretização e a

análise do comportamento do erro associado às aproximações.

O método das Somas de Riemann consiste na aproximação da área sob uma curva por meio da divisão do intervalo de integração em subintervalos de mesma largura (Guidorizzi, 2001). Considerando uma função contínua $f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$, esse intervalo é particionado em n ($n > 0$, $n \in \mathbb{N}$) partes iguais, cada uma com largura

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Para cada subintervalo, constrói-se um retângulo cuja altura é dada pelo valor da função em um ponto do intervalo, resultando na seguinte aproximação:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x,$$

em que A é a área aproximada e x_i representa um ponto do i - ésimo subintervalo.

A discretização do intervalo desempenha papel fundamental na precisão da aproximação. Ao aumentar o número de subdivisões n, a largura dos subintervalos Δx diminui, tornando os retângulos mais estreitos e, consequentemente, ajustando-se melhor ao formato da curva. Esse processo reduz a diferença entre a área real e a área aproximada, permitindo observar o fenômeno de convergência do método.

A implementação computacional foi realizada utilizando a linguagem Python (Python Software Foundation, 2023), em ambiente Google Collaboratory (Google, 2026), sem a necessidade de recursos computacionais avançados e sem necessidade de instalação de software, e isso possibilitou automatizar o cálculo das somas de Riemann para diferentes valores de n. Além disso, foram geradas representações gráficas que ilustram a aproximação da área por meio de retângulos, bem como a região correspondente ao erro (Veja as Figuras de 1 a 8 na próxima seção). O uso da ferramenta computacional permitiu explorar valores elevados de subdivisões (100 no total, mas que poderiam ser rodadas no mesmo software facilmente com 1000 ou 10000 partições), inviáveis em cálculos manuais, ampliando a análise do comportamento do método.

Foram realizados experimentos considerando a função:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [0,1],$$

e também a função,

$$f(x) = e^{-x^2}, x \in [0,1]$$

e níveis de discretização. Inicialmente, utilizaram-se valores reduzidos de n, como $n = 1$ e $n = 2$, com o objetivo de evidenciar visualmente a diferença entre a área real e a área aproximada, destacando a região correspondente ao erro (Veja Figuras 1, 2 na próxima seção). Em seguida, foram analisados valores maiores de n (10 e 100), permitindo observar a redução progressiva do erro e a convergência das aproximações.

Para a função $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [0,1]$ que corresponde a 1/4 de uma circunferência de raio igual a 1 e centrada na origem, os experimentos foram conduzidos em dois contextos: um caso com solução analítica conhecida, permitindo validação do método, e outro sem solução analítica elementar, no qual a aproximação numérica se torna essencial.

Essa abordagem permitiu não apenas a obtenção de aproximações numéricas, mas também a análise do comportamento do erro, elemento central na validação de métodos numéricos.

Para a função $f(x) = e^{-x^2}, x \in [0,1]$ que foi o segundo caso, não é possível encontrar um valor exato simples então foi usado um valor de referência obtido por meio de integração numérica de alta precisão, uma vez que essa função não admite primitiva em termos de funções elementares. Esse valor foi empregado como base para o cálculo do erro nas aproximações realizadas pelo método das somas de Riemann.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação do método das somas de Riemann para duas funções distintas: a função $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [0,1]$, que representa um quarto de circunferência e a função $f(x) = e^{-x^2}, x \in [0,1]$ que é uma gaussiana. As análises consideram tanto os valores numéricos obtidos quanto a interpretação gráfica das aproximações.

A tabela 1 apresenta os valores aproximados da área obtidos por meio das somas de Riemann, bem como o erro absoluto em relação ao valor exato $A = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$.

Tabela 1. Valores aproximados, exatos e erro absoluto para a função de ¼ de circunferência

n	Aproximação	Valor exato	Erro absoluto
1	1,000000	0,785398	0,214602
2	0,933013	0,785398	0,147615
10	0,832981	0,785398	0,047583
100	0,790365	0,785398	0,004967

Observe que no final o erro está menor que 0,01, ou seja, menos que 1%.

As Figuras 1 e 2 apresentam as aproximações da área utilizando $n = 1$ e $n = 2$, respectivmente. Observa-se que, para valores reduzidos de subdivisões, os retângulos não conseguem representar adequadamente o comportamento da curva, resultando em uma diferença significativa entre a área real e a área aproximada. A região correspondente ao erro é visualmente expressiva, evidenciando a limitação do método em discretizações grosseiras.

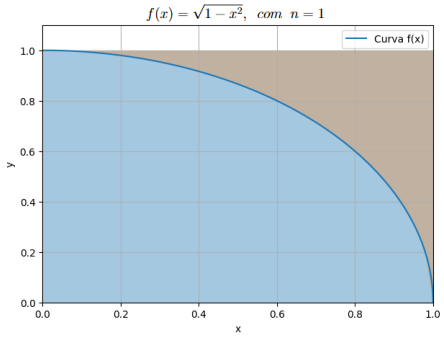


Figura 1 Aproximação por somas de Riemann ($n = 1$) na função um quarto de circunferência

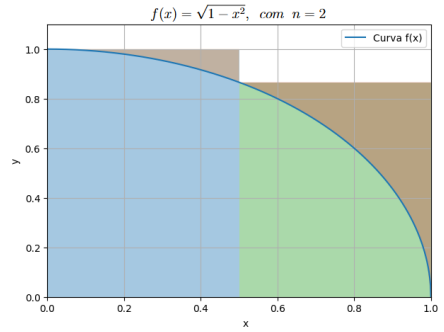


Figura 2 Aproximação por somas de Riemann ($n = 2$) na função um quarto de circunferência

Nas Figura 3 e 4, com $n = 10$ e $n = 100$, respectivamente, observa-se que os retângulos se ajustam de forma mais precisa à curva. A região correspondente ao erro torna-se progressivamente menor, indicando a convergência do método das somas de Riemann para o valor exato da área.

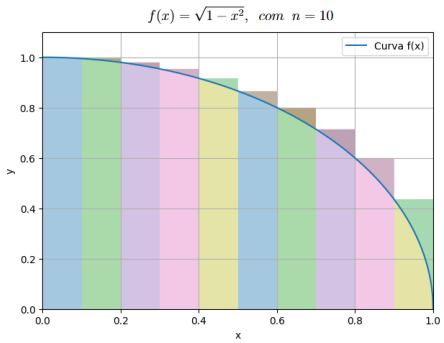


Figura 3 Aproximação por somas de Riemann ($n = 10$) na função um quarto de circunferência

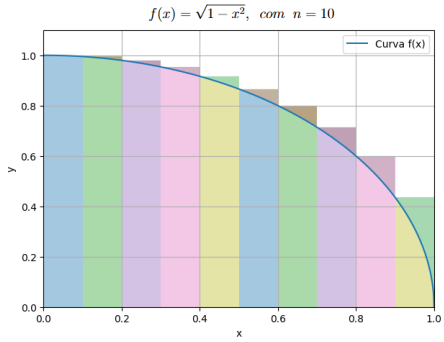


Figura 4 Aproximação por somas de Riemann ($n = 100$) na função um quarto de circunferência

Os resultados apresentados na Tabela 1 indicam que o erro absoluto diminui à medida que o número de subdivisões aumenta, evidenciando o comportamento convergente do método. Esse resultado está em concordância com a teoria das somas de Riemann, na qual o refinamento da discretização conduz a aproximações cada vez mais precisas.

Para a função $f(x) = e^{-x^2}, x \in [0,1]$, foi utilizado como referência o valor aproximado:

$A \approx 0{,}746824$ obtido por integração numérica de alta precisão.

A tabela 2 apresenta os valores aproximados da área obtidos por meio das somas de Riemann, bem como o erro absoluto em relação ao valor de referência A ≈ 0.746824.

Tabela 2. Valores aproximados, de referência e o erro absoluto para a função gaussiana

n	Aproximação	Valor de referência	Erro absoluto
1	1,000000	0,746824	0,253176
2	0,889400	0,746824	0,142576
10	0,771000	0,746824	0,024176
100	0,749400	0,746824	0,002576

As Figuras 5 e 6 apresentam as aproximações das áreas sob a curva e^{-x^2} utilizando $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. Assim como no caso anterior, observa-se uma diferença significativa entre a área aproximada e a área real, com grande região correspondente ao erro, especialmente para $n = 1$.

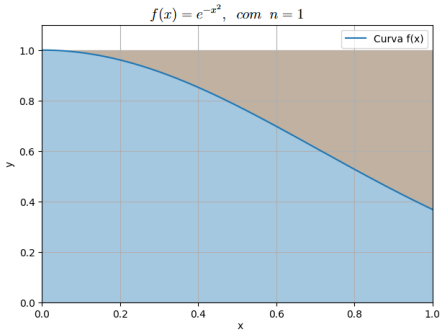


Figura 5 Aproximação por somas de Riemann ($n = 1$) na gaussiana

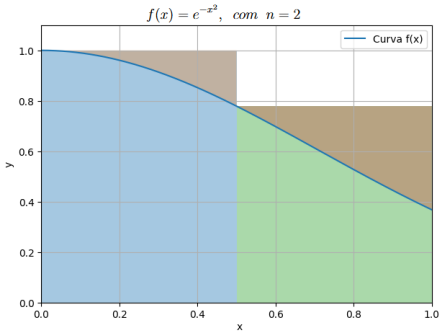


Figura 6 Aproximação por somas de Riemann ($n = 2$) na gaussiana

Nas Figuras 7 e 8, para com $n = 10$ e $n = 100$ respectivamente, nota-se uma melhora significativa na aproximação. Os retângulos passam a representar melhor o comportamento da função, e a área correspondente ao erro torna-se menos expressiva, indicando a convergência do método.

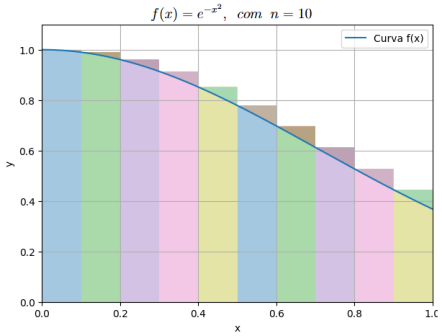


Figura 7 Aproximação por somas de Riemann ($n = 10$) na gaussiana

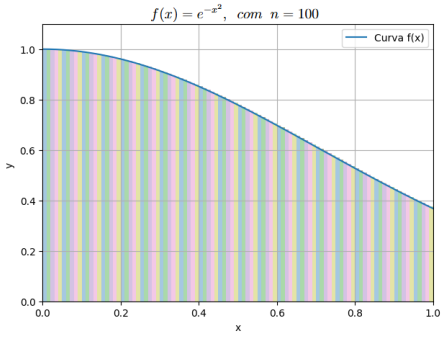


Figura 8 Aproximação por somas de Riemann ($n = 100$) na gaussiana

De forma semelhante ao caso da circunferência, observa-se que o aumento do número de subdivisões resulta na redução do erro absoluto. No entanto, neste caso, a ausência de solução analítica reforça a importância do uso de métodos numéricos e ferramentas computacionais para a obtenção de aproximações confiáveis.

Os resultados mostram que o método das somas de Riemann é eficaz tanto em situações com solução analítica quanto naquelas em que tal solução não está disponível.

O uso do Python permite realizar cálculos com grande número de subdivisões, tornando visível o processo de convergência.

A análise conjunta dos resultados evidencia que o método das somas de Riemann apresenta comportamento convergente em ambos os casos estudados. As representações gráficas permitem interpretar o erro como uma região geométrica entre a curva e os retângulos, contribuindo para uma compreensão mais intuitiva do processo de aproximação.

Além disso, enquanto no caso da circunferência é possível validar os resultados por meio de uma solução analítica, na segunda função, a gaussiana, a dependência de métodos numéricos torna-se evidente, destacando o papel das ferramentas computacionais na ampliação das possibilidades de resolução de problemas matemáticos.

Os resultados têm uma importância que impactam em um outro elemento importante da Matemática: o π. Supondo que o valor de π não seja conhecido, com a aproximação da área estimada, o uma aproximação para o valor de π poderia ser facilmente calculado também, pois como $A = \frac{\pi}{4}$ então $\pi = 4A$, em que A é a área aproximada do círculo.

Do ponto de vista educacional, essa abordagem favorece uma aprendizagem mais ativa, na qual o estudante pode testar hipóteses, analisar erros e compreender o significado dos resultados obtidos.

Essa abordagem pode ser feita facilmente em uma turma não só de ensino superior no Cálculo Diferencial e Integral, mas também no ensino médio, mostrando aos alunos um ótimo recurso que não se prende a fórmulas. O aluno pode ser estimulado a calcular áreas de regiões que formam figuras irregulares em locais como a própria escola ou em sua casa e perceber a importância desta abordagem. Também devem tentar desenhar os retângulos para perceberem a dificuldade aumentando à medida que aumenta o valor de n.

A inserção de ferramentas computacionais no ensino de Matemática pode contribuir para maior engajamento dos alunos, desenvolvimento do pensamento crítico, compreensão mais profunda de conceitos, aproximação entre teoria e prática.

Os resultados obtidos evidenciam que a utilização de ferramentas computacionais amplia as possibilidades de resolução de problemas, especialmente em situações nas quais não há solução analítica disponível. Nesse contexto, o estudante não é interrompido pela limitação teórica, mas adapta sua estratégia, utilizando aproximações controladas pelo erro.

Há outros métodos que convergem ainda mais rápido do que o de Riemann, como o método utilizando trapézios, ou o método de Simpson, entretanto pelo fato de o retângulo ser uma figura amplamente conhecida e bem mais tranquila de trabalhar, optou-se por ele nesse trabalho, pois assim pode facilmente ser aplicado no ensino médio também.

Essa mudança de abordagem representa uma ruptura com o modelo tradicional de ensino, caracterizando um processo de disrupção. Ao mesmo tempo, a capacidade de continuar avançando na resolução do problema, mesmo diante de obstáculos, evidencia o desenvolvimento de uma postura resiliente, na qual o conhecimento é construído de forma progressiva e adaptativa.

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciam que o método das somas de Riemann, aliado ao uso de ferramentas computacionais, constitui uma estratégia eficaz para a aproximação de áreas sob curvas, tanto em situações com solução analítica conhecida quanto naquelas em que tal solução não está disponível. A análise do erro, associada ao aumento do número de subdivisões, permitiu compreender de forma clara o processo de convergência, contribuindo para uma interpretação mais significativa do conceito de integral definida.

No contexto educacional, a abordagem proposta representa uma ruptura com o modelo tradicional de ensino, frequentemente centrado na obtenção de soluções exatas por meio de técnicas analíticas. Ao incorporar o uso de tecnologia e métodos numéricos, amplia-se o repertório de estratégias disponíveis ao estudante, favorecendo uma postura mais investigativa, na qual a experimentação, a análise de resultados e a validação por meio do erro passam a desempenhar papel central no processo de aprendizagem.

Essa mudança de perspectiva pode ser compreendida como um movimento de disrupção, ao desafiar práticas consolidadas e propor novas formas de construção do conhecimento matemático. Ao mesmo tempo, a capacidade de continuar resolvendo problemas mesmo diante de limitações analíticas, como no caso da função gaussiana, evidencia o desenvolvimento de uma postura resiliente, na qual o estudante adapta suas estratégias e utiliza recursos disponíveis para alcançar soluções aproximadas confiáveis.

A integração entre métodos numéricos e tecnologias digitais não apenas amplia as possibilidades de resolução de problemas, mas também promove uma mudança de paradigma no ensino de Matemática, favorecendo o desenvolvimento de uma aprendizagem mais resiliente diante de cenários de disrupção.

Dessa forma, conclui-se que a integração entre métodos numéricos e tecnologias digitais não apenas contribui para a compreensão de conceitos matemáticos, mas também promove o desenvolvimento de competências essenciais no cenário contemporâneo, como pensamento crítico, autonomia e capacidade de adaptação. Essas competências são fundamentais para a formação de indivíduos capazes de atuar de maneira eficaz em contextos marcados por constantes transformações, reforçando a relevância da proposta apresentada neste trabalho.

Nesse sentido, ensinar Matemática com apoio de tecnologias não é apenas uma inovação metodológica, mas uma necessidade diante de um cenário educacional em constante transformação.

Para trabalhos futuros, o professor que desejar trabalhar esse tema pode mostrar a convergência do erro usando trapézios após os alunos realizarem os cálculos com os retângulos, e discutir se é melhor ou pior. Um outro ponto importante que pode ser investigado é valor de referência pode ser investigado e apresentado com um certo rigor matemático, já que não foi discutido neste trabalho.

REFERÊNCIAS

CARREIRA, B. L.; BRANDI, A. C. Métodos de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias. *Revista Ciência em Quadrinhos*, Bauru, 2016. Disponível em:

https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/pt_BR/article/view/74. Acesso em: 16 maio 2026.

GOOGLE. Google Colab. [S. l.], 2026. Disponível em: https://colab.research.google.com/. Acesso em: 25 março 2026.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo. 5. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2001.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. *Python Language Reference*. Disponível em: https://www.python.org. Acesso em: 16 maio 2026.

REYNA VERÁ TUDELA, Carlos Andrés; UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO. Apostila da Disciplina: Métodos Numéricos: Parte 1. 25 maio 2018.

VIEIRA, Anderson Vantuir Nobre. *Soluções numéricas do problema de Poisson no espaço n dimensional utilizando o Método das Diferenças Finitas*. 2020. 79 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional e Sistemas) – Universidade Estadual de Montes Claros, Montes Claros, 2020.

VIEIRA, Anderson Vantuir Nobre. OS SISTEMAS LINEARES E SUAS APLICAÇÕES.. In: Anais do Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia. Anais...Diamantina(MG) Online, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/cobicet2022/520847-OS-SISTEMAS-LINEARES-E-SUAS-APLICACOES. Acesso em: 01/05/2026