TIPOLOGIA DE PROVAS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA O TEOREMA DE TALES

João Carlos Caldato[1]
Lucas Carato Mazzi[2]

GD1: Livro Didático e Currículo

Resumo
Discussões sobre argumentação, raciocínio, prova e demonstração têm sido alvo de estudos no âmbito da Educação Matemática há décadas. Recentemente, houve uma inserção nos critérios avaliativos do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) referente à Matemática, destacando a necessidade do trabalho com tais conceitos. Tendo em vista esse cenário, a pesquisa aqui desenvolvida teve como objetivo compreender os tipos de provas presentificadas em um capítulo sobre o Teorema de Tales, de uma coleção de Livros Didáticos de Matemática, aprovada no PNLD 2026-2029, referente ao Ensino Médio. Assumimos, então, a abordagem de pesquisa qualitativa, do tipo documental, juntamente com o Sistema teorEMa como procedimento metodológico. Como referencial teórico assumido, consideramos as ideias de Nicolas Balacheff acerca da noção de prova, além de nos pautar em sua tipologia de provas, divididas em pragmáticas e conceituais, segmentadas em: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. Como resultados, identificamos, já no Referencial Pedagógico que deu suporte à elaboração da obra analisada, critérios que dizem respeito ao trabalho com diferentes abordagens acerca da elaboração de provas e demonstrações, convidando os autores das coleções a trabalharem com práticas que possibilitem os alunos a compreenderem a diferença entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica, por exemplo. Ademais, no capítulo analisado, foi possível identificar os quatro tipos de provas defendidos por Balacheff. Entre as considerações desta pesquisa, ponderamos que a presença da tipologia nas obras didáticas amplia as possibilidades docentes de trabalhar com argumentação em sala de aula, para além da demonstração.

Palavras-chave: Tipologia de provas. Geometria. Ensino Médio. Livros didáticos de Matemática.

1 Introdução

Os Livros Didáticos de Matemática (LDM) são objetos que estão atrelados ao ensino de tal disciplina desde o Brasil colônia (Valente, 2008). Tal objeto é foco de interesse em todo o mundo, fato comprovado pela existência de diferentes conferências destinadas ao estudo dos LDM, como apontam Amaral *et al.* (2022). Em nosso país, como ponto de destaque, temos o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), criado em 1985 que, atualmente, possui o objetivo de disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma regular, gratuita e sistemática, alcançando alunos de escolas públicas de todo o Brasil.

[1] Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ) • Pós-doutorando no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco • Caruaru, PE, Brasil • profjoaocaldato@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-6951-3590
[2] Universidade Estadual Paulista (UNESP) • Doutor em Ensino de Ciências e Matemática • Rio Claro, SP, Brasil • lucas.mazzi@unesp.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-3395-3724

Esse Programa visa, ainda, aprimorar o processo de ensino e de aprendizagem nas escolas públicas de Educação Básica; garantir o padrão de qualidade dos materiais; e democratizar o acesso à informação e cultura, atendendo a todas as etapas de ensino, possuindo uma avaliação pedagógica rigorosa de cada uma das obras submetidas ao Programa, coordenada pelo Ministério da Educação, garantindo materiais que respeitem a diversidade, aos princípios éticos e a formação ampla dos sujeitos.

Apesar de ser um material comum no cotidiano escolar, entendemos ser importante demarcar nossa compreensão sobre tal objeto. Nesse sentido, corroboramos a visão de Amaral *et al.* (2022, p. 30), ao assumirem o Livro Didático (LD) como sendo

> [...] um material, impresso e digital, concebido e editado com o objetivo de contribuir para os processos educacionais de ensino e de aprendizagem, composto por saberes de certo componente curricular ou área de conhecimento, propostos a partir das prescrições curriculares oficiais em vigência no momento de sua elaboração. Tais saberes são dispostos nos LD a partir de ideias e conceitos, bem como por meio de atividades, as quais se espera que possibilitem aos alunos aplicações dos tópicos discutidos previamente (ou não) e também envolvimento em vivências de investigações que vão além do sugerido no material. Ainda, o LD não é produzido de forma neutra, há uma ideologia que o suporta, assim como é um meio de disseminação de valores e crenças de uma determinada cultura, situado em certo período histórico.

Esse modo de compreender tal material destaca a não neutralidade em suas produções, sendo eles moldados segundo as ideologias, crenças e valores daqueles que os produzem. Para além da autoria, os materiais também são influenciados por editores, avaliadores do PNLD, *designers*, participando de uma rede complexa e elaborada de poderes (Santos; Silva, 2019). Tal compreensão, ainda, reforça que os LD são moldados a partir das prescrições curriculares oficiais em vigência, sendo, em nosso caso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), um dos principais documentos normativos que orientam os critérios de avaliação de obras no âmbito do PNLD, o que dialoga com o nosso interesse em participar do Grupo de Discussão (GD) intitulado "Livro Didático e Currículo".

Em tal documento, destaca-se a importância da argumentação na formação estudantil durante a Educação Básica, sendo a Matemática um espaço profícuo para isso. Segundo a BNCC, o Ensino Fundamental deve promover o desenvolvimento do letramento matemático, "[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (Brasil, 2018, p. 266). Em particular, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, "[...] é importante iniciar os alunos,

gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática" (Brasil, 2018, p. 299). Já no Ensino Médio, espera-se que o letramento matemático dos estudantes se torne cada vez mais robusto, a partir da mobilização do seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar e argumentar. Inclusive, sobre esta última terminologia, diretamente relacionada às três anteriores, a BNCC sugere que "[...] seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas" (Brasil, 2018, p. 530).

Para Balacheff (2024) existe diferença entre a ação de argumentar e o seu produto:

> O processo associado implementa meios linguísticos e representacionais para tornar possíveis interações (reais ou potenciais) entre protagonistas que buscam garantir a validade de um enunciado ou, ao contrário, se opõem e confrontam suas posições. O resultado [ou produto] assume a forma de um discurso que materializa as razões para concordância ou discordância (Balacheff, 2024, p. 396).

A partir desta distinção, Balacheff (2022, 2024) adota o verbo "argumentar" para se referir ao processo e o substantivo "*argumentação*" para caracterizar o produto, sendo este último definido como sendo um discurso orientado (visa a validade de um enunciado), intencional (visa modificar um julgamento) e crítico (analisa, apoia e defende). No caso da Matemática, a partir do processo de socialização entre os sujeitos, uma argumentação pode alterar seu *status* para prova ou, ainda, para demonstração, dependendo da comunidade em que está situada, conforme veremos na próxima seção.

Tendo em vista os apontamentos anteriores, este trabalho tem como objetivo principal compreender os tipos de provas presentificadas em um capítulo sobre o Teorema de Tales, de uma coleção de Livros Didáticos de Matemática, aprovada no PNLD 2026-2029, referente ao Ensino Médio. Para isso, adotaremos a noção de prova segundo a perspectiva de Balacheff (1988, 2022, 2024), além de apresentar a tipologia proposta pelo pesquisador. Na sequência, elencaremos alguns aspectos metodológicos, além de discutir os dados produzidos a partir da análise da obra escolhida e dos critérios avaliativos do PNLD 2026-2029. Por fim, apontaremos algumas considerações.

2 Referencial Teórico

De acordo com Balacheff (1988, 2022, 2024), a noção de prova se situa no movimento de passagem entre as esferas privada e pública. Nesse processo, a validade de um enunciado, inicialmente tomada na perspectiva do aluno, cede lugar à necessidade de organizar, formular e comunicar razões a uma comunidade. Quando os demais

reconhecem que essa argumentação sustenta a validade da afirmação, seu *status* é modificado pelo caráter público que adquire, sendo então denominada *prova*. Nesse contexto, *demonstração* é uma prova aceita pela comunidade matemática. Assim, toda demonstração é uma prova, porém nem toda prova é (ou precisa ser) uma demonstração.

Na tentativa de investigar o que poderia ser considerado uma prova para alunos (entre 13 e 14 anos) antes deles serem apresentados a uma noção mais formalizada, Balacheff (1988) elaborou uma tipologia de provas divididas em *pragmáticas* e *conceituais*. Em linhas gerais, as primeiras são baseadas em verificações empíricas e as segundas são fundamentadas em teorias que permitam a validação de uma propriedade e é caracterizada pela linguagem matemática formal. A partir da divisão mencionada anteriormente, o pesquisador identificou quatro tipos principais de provas (*empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico* e *experiência mental*), associados aos diferentes raciocínios mobilizados.

O Quadro 1 apresenta uma descrição para cada um dos tipos e exemplos a partir da afirmação de que a soma de dois números pares resulta em um número par.

Quadro 1 – Descrição e exemplos para os tipos de provas proposto por Nicolas Balacheff

Tipos	Descrição	Exemplos
Empirismo ingênuo	O estudante valida uma conjectura por meio da verificação de poucos e simples casos, sem questionamento algum quanto às suas particularidades.	O estudante verifica a validade da afirmação testando alguns exemplos: $2 + 4 = 6$ $6 + 8 = 14$
Experiência crucial	O estudante utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição, com indícios de uma possível generalização.	O estudante julga que, mostrando que a afirmação vale com números muito grandes, valerá para todos os demais: $2796 + 4250 = 7046$ $23456 + 19868 = 43314$
Exemplo genérico	O estudante elege um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade, com o intuito de deduzir as características que representam essa classe.	O estudante elege, por exemplo, a soma $6 + 8$ como representante da classe de objetos. Como 6 e 8 são números pares, é possível escrevê-los como 2×3 e 2×4. Ao colocar o fator comum 2 em evidência, ele conclui que a soma também é par, pois $6 + 8 = 2 \times (3 + 4)$.
Experiência mental	O estudante utiliza construções cognitivas e linguísticas para validar uma propriedade para toda a classe de objetos.	O estudante raciocina que se p e q são dois números pares, então existem inteiros k_1 e k_2, tais que $p = 2k_1$ e $q = k_2$. Portanto, $p + q = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$. Logo, a soma também é par.

Fonte: Caldato (2024, p. 67).

Embora Balacheff (2022, 2024) alerte que a sua tipologia de provas tem sido erroneamente interpretada como uma série de "estágios", é possível observar, a partir dos tipos descritos no Quadro 1, uma transição evolutiva para o conceito de demonstração.

Além disso, é possível categorizar que o empirismo ingênuo e a experiência crucial estão situados como provas pragmáticas, que a experiência mental se enquadra como prova conceitual, sendo o exemplo genérico uma espécie de transição entre ambas as provas. Ademais, o pesquisador sinaliza que "[...] o marcador dessa transição é a evolução dos meios de representação e expressão do raciocínio" (Balacheff, 2022, p. 793-795).

Para Balacheff (2024, p. 405), a tipologia proposta evidenciou que "[...] os alunos aceitam um tipo de prova de acordo com suas concepções e de acordo com sua percepção da situação". Ainda, segundo o pesquisador, um tipo de prova produzido pelo aluno não deve ser visto como uma situação permanente, mas como um registro de como ele pensa e age em uma situação específica, naquele momento de sua trajetória em Matemática.

Em vista disso, a presença dos diferentes tipos de provas num LDM é importante para mediar a transição entre a intuição do aluno, que dificilmente será baseada em um raciocínio dedutivo (Pedemonte, 2007), e a construção de uma prova matemática. Apesar do alerta de Balacheff (2022, 2024) sobre não se tratar de uma "série" de estágios, a passagem entre provas pragmáticas e conceituais nem sempre é uma trajetória linear. Nesse sentido, destacamos o papel dos exemplos genéricos para favorecer a transição entre ambas as provas. Ademais, o fato de um LDM apresentar somente demonstrações e/ou não reconhecer a possibilidade de que outras provas sejam admitidas, pode suscitar alguns efeitos prejudiciais ao processo de ensino e aprendizagem. Dentre eles, destacamos dois na sequência.

Por não estar ao alcance dos alunos naquele momento da sua trajetória em Matemática, eles podem se sentir desinteressados em tentar compreender uma demonstração ou elaborá-la, dado as especificidades que esse tipo de argumentação impõe (linguagem matemática, raciocínio dedutivo, por exemplo). Ao oportunizar que outros "rigores" de validação se façam presentes, os estudantes podem se sentir encorajados a expor o seu raciocínio, independentemente de se caracterizar (ou não) como uma prova matemática. Isso remete ao que Garnica (2002) denominou como *etnoargumentações* no âmbito da Educação Matemática, ao estabelecer a possibilidade de relativizar posições classicamente hegemônicas acerca das demonstrações na Matemática acadêmica.

Além disso, os professores podem não considerar um trabalho em sala de aula com argumentação e provas, tendo em vista que a única concepção que eles possuem é o

da demonstração no sentido mais formal da palavra, sendo algo distante da realidade dos estudantes. Tanto é que os docentes, em geral, tendem a conceber os termos “prova” e “demonstração” como sinônimos (Caldato, 2024).

3 Aspectos Metodológicos

A pesquisa desenvolvida assume uma abordagem qualitativa, visto que se preocupa em compreender, de modo aprofundado, se diferentes tipos de provas estão presentificadas em um capítulo de um LDM, aprovado pelo PNLD. Esse tipo de abordagem não se preocupa com generalizações, mas sim, em refletir sobre como o fenômeno investigado se mostra (Bicudo, 2012; Bogdan; Biklen, 2007).

Ainda, tendo em vista a fonte de dados assumida neste trabalho, consideramos, esta, uma pesquisa do tipo documental. Segundo Godoy (1995), um dos pontos positivos em se trabalhar com esse tipo de pesquisa se deve ao fato de que os dados são imutáveis, ou seja, mesmo após longos períodos, eles continuarão do modo como foram produzidos. Ainda, para a pesquisadora, esse tipo de pesquisa traz “[...] contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo, portanto, atenção especial” (Godoy, 1995, p. 21).

Para o desenvolvimento da pesquisa, pautamo-nos, metodologicamente, no sistema teorEMa (Amaral *et al.*, 2022). Segundo tal proposta, a pesquisa com LDM requer um planejamento, no qual se define o que se quer pesquisar; quais objetivos se possui com a pesquisa; e se a pesquisa envolve o livro por si só ou seu uso em sala de aula, por exemplo. Em nosso caso, optamos por tomar o caminho da vista do LD, no qual se “assume o livro como foco de análise [...]. Sua escolha pode ser por um conteúdo ou conceito, delimitando-o a um campo, como Geometria, Álgebra ou Estatística” (Amaral *et al.*, 2022, p. 184). Em nossa pesquisa, optamos por focar no Teorema de Tales, dada sua importância no desenvolvimento do pensamento geométrico.

A segunda etapa desenvolvida diz respeito à exploração do material (Amaral *et al.*, 2022). Neste momento, o pesquisador pode

> [...] começar identificando as características estruturais do livro. Esses aspectos gerais colaboram para caracterização dos LD, criando seu “retrato”. Com a posse do material, o pesquisador pode registrar o *título* da obra, a *editora* responsável por sua elaboração/divulgação, o *local* e o *ano* de publicação, a *etapa escolar* a que é destinada, o tipo de livro – se é *manual do professor* ou se é o *livro do aluno* – e a quantidade de

> *volumes* que compõem a coleção. [...] Ainda nessa etapa, cabe examinar a *quantidade de páginas* que o LD possui, o modo como ele é segmentado – seja por *capítulos*, *unidades*, *seções* e/ou outras possíveis formas a serem identificadas –, a existência (ou não) de *materiais complementares* e, por fim, se o livro pertence a um determinado edital do PNLD, se é produzido por alguma secretaria estadual ou se pertence à iniciativa privada (Amaral *et al.*, 2022, p. 195-196).

Em nossa pesquisa, optamos por analisar a obra *Matemática nos dias de hoje* – publicada pela Editora SEI, cuja autoria é de Jefferson dos Santos Cevada, Daniel Romão da Silva, Gabriel Gleich Prado e João Guilherme Boaratti Colpani (Cevada *et al*., 2024) – por três razões principais: (i) acesso integral ao material, condição necessária para o desenvolvimento de uma pesquisa com LDM (Amaral *et al.*, 2022); (ii) interesse epistemológico em explorar coleções de menor circulação – foi a que teve a menor tiragem total (44.580 impressões) no PNLD 2026, na Categoria 1[3] (Brasil, 2026) – uma vez que estas, apesar de aprovadas pelo PNLD, tender a ser pouco investigadas e podem revelar variações relevantes nas propostas curriculares e pedagógicas; e (iii) a hipótese metodológica de que obras de tiragem reduzida podem apresentar soluções editoriais distintas, que merecem ser examinadas para compreender a amplitude das práticas recomendadas pelo Referencial Pedagógico (Brasil, 2025). Dessa forma, a escolha combina um critério prático (acessibilidade do *corpus*) com motivações teóricas que justificam a pertinência desta coleção para a pesquisa sobre tipologias de prova em LD.

A coleção (ou obra didática) selecionada possui três volumes do livro impresso do estudante, três volumes do livro impresso do professor, além de conter os respectivos livros digitais na versão HTML 5 com acréscimos em relação aos livros físicos, conforme indica o Edital de Convocação (Brasil, 2025). Focaremos no volume 2 do livro impresso do professor, no qual se encontra o capítulo "Trajetória 4 – Semelhanças", em que temos a discussão sobre o Teorema de Tales. Tal capítulo está situado nas páginas 154 a 169. Conforme detalharemos mais adiante, nossa análise se restringe apenas ao conteúdo do livro do estudante, incluindo eventuais comentários direcionados ao professor.

Por fim, a última etapa elencada por Amaral *et al.* (2022) diz respeito ao tratamento de dados. Para os pesquisadores, este é o momento em que os dados são analisados à luz do referencial teórico assumido. Em nosso caso, a discussão terá como suporte o modelo teórico de Balacheff (1988, 2022, 2024). Ao classificarmos um item do

[3] A Categoria 1 diz respeito às Obras Didáticas de Área de Conhecimento e seus respectivos componentes curriculares, sendo a Matemática e suas tecnologias nosso foco.

LD como aproximável a um tipo de prova, entendemos essa classificação como uma inferência sobre seu potencial didático, e não como evidência de que tais provas tenham sido efetivamente produzidas por estudantes em contexto real.

4 Discussão dos Dados

Antes de se debruçar sobre o material selecionado, optamos por compreender de que modo o Edital de Convocação (Brasil, 2025), que deu base para a produção de tal obra, mobiliza conceitos como argumentação, raciocínio, prova e demonstração – conceitos que dialogam com nosso objetivo. Para tal análise, utilizamos a terceira retificação do Referencial Pedagógico, anexo do Edital supracitado. Esse documento serve para orientar editoras e avaliadores sobre o que será considerado na etapa de avaliação pedagógica das obras didáticas, incluindo critérios de aprovação, reprovação, correção de falhas e recursos. Ele explicita as exigências curriculares, metodológicas, editoriais e legais que as obras devem cumprir para serem selecionadas no Programa.

Durante a análise deste documento direcionada para os critérios avaliativos comuns às obras e, também, para os critérios específicos das obras da área de Matemática e suas Tecnologias, buscamos identificar fragmentos relacionados à argumentação, raciocínio, prova e demonstração. Para tanto, realizamos buscas por meio dos seguintes radicais: *argument-*, *racioc-*, *prov-* e *demonstr-*.

Em vista da análise documental, o Quadro 2 apresenta os trechos que foram identificados no Referencial Pedagógico (Brasil, 2025), bem como a localização no documento e se os critérios avaliativos são comuns às obras ou específicos da área.

Quadro 2 – Critérios avaliativos do Referencial Pedagógico acerca dos termos de interesse

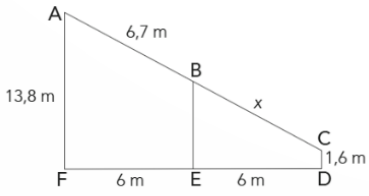
Critérios avaliativos (comuns ou específicos)	**Página**	**Trecho do documento na íntegra**
Comum (C1)	8	Promover práticas (orais e escritas) de *argumentação* fundamentada em dados científicos a respeito dos princípios éticos necessários à construção da cidadania
Comum (C2)	11	Oferecer orientações precisas de como ensinar estudantes a desenvolver a capacidade *argumentativa* e capacidade de inferência (em textos orais e escritos)
Específico (E1)	42	É fundamental que o aluno desenvolva progressivamente a capacidade de distinguir entre os diversos processos de descoberta, invenção e validação, especialmente compreendendo a diferença entre uma *prova* lógico-dedutiva e uma verificação empírica. Esta última pode envolver a visualização de desenhos, a construção de modelos materiais ou a medição de grandezas.
Específico (E2)	41	Possibilitar o desenvolvimento de diferentes tipos de *raciocínio* lógico-matemático (indução, dedução e *raciocínio* por analogia) por meio de diversos problemas, atividades e vivências, especialmente

		para promover práticas (orais e escritas) de *argumentação* e inferência
Específico (E3)	41	Abordar conceitos com encadeamento lógico, evitando por exemplo: (1) recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito; (2) utilizar-se de definições circulares; (3) confundir tese com hipótese em *demonstrações* matemáticas, entre outros
Específico (E4)	41	Trabalhar com análise de textos com o intuito explícito de desenvolver no estudante a capacidade de identificar e superar fragilidades *argumentativas*, tais como digressões, generalizações indevidas, incoerências internas, carências de dados, uso de informações não confiáveis etc.
Específico (E5)	42	Explorar os conceitos com encadeamento lógico, sem recorrer, por exemplo, a definições circulares ou confundir tese com hipótese nas *demonstrações* matemáticas.
Específico (E6)	42	Assegurar, em cada volume, o desenvolvimento dos diferentes tipos de *raciocínio* lógico-matemático (indução, dedução, abdução e *raciocínio* por analogia) por meio de diversos problemas, atividades e vivências, especialmente para promover práticas (orais e escritas) de *argumentação* e de inferência.

Fonte: Elaborado com base em Brasil (2025).

Nota-se, pelo Quadro 2, que há uma preocupação em se discutir sobre aspectos que atravessam e dialogam com os conceitos investigados neste trabalho. Tendo em vista que tais critérios são obrigatórios para a aprovação da obra, entende-se que o PNLD reconhece a importância de tais discussões no desenvolvimento matemático dos estudantes, em particular na etapa do Ensino Médio. Com isso, na sequência, focaremos nossa discussão no capítulo acerca do Teorema de Tales, da coleção escolhida.

Após a enunciação do Teorema de Tales, seguida pela aplicação em uma situação prática, três exercícios são propostos. Consideramos que um deles favorece o desenvolvimento do letramento matemático, em especial, das habilidades e competências de argumentar matematicamente, como mostra a Figura 1.



8. Para comprovar a aplicabilidade do Teorema de Tales, reúnam-se em grupos com 4 integrantes e, utilizando o espaço da escola, construam uma figura com medidas semelhantes à do esquema.
Utilize os segmentos paralelos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ para construir a figura. Meça o segmento de medida $BC = x$ e, em seguida, use o Teorema de Tales para calcular essa medida.
a) Quais foram as medidas que vocês obtiveram? Houve diferença de medida entre os cálculos? Quais foram mais precisos?
b) "Se dobrarmos a medida dos segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$, o segmento $\overline{BC}$ terá o tamanho 2x." A conjectura está correta? Comprove matematicamente sua afirmação.

Figura 1 – Exercícios propostos

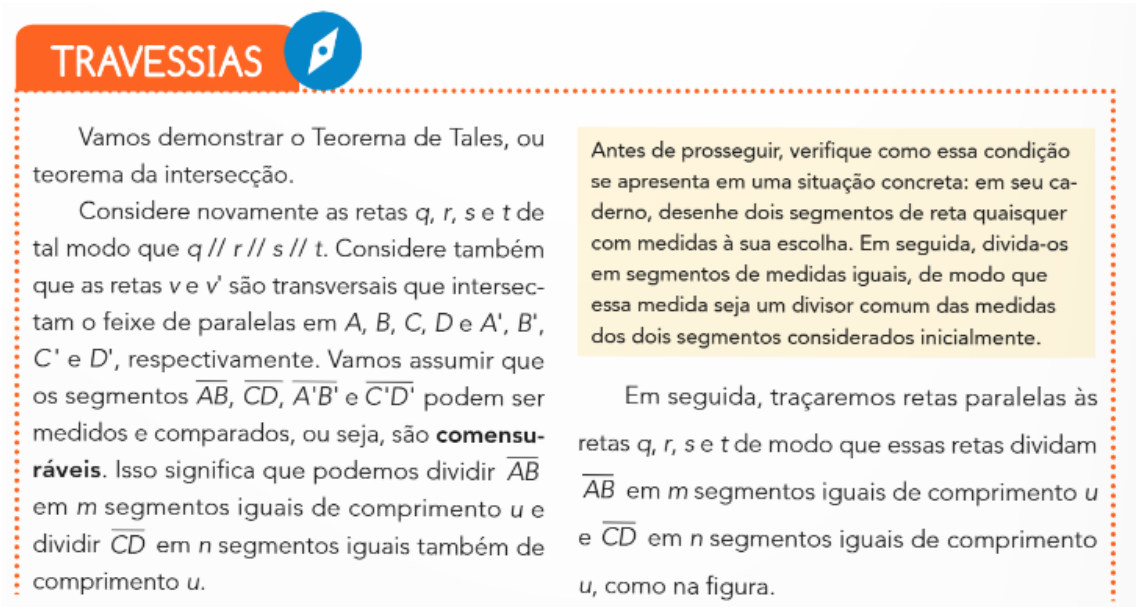
Fonte: Cevada *et al.* (2024, p. 160).

Embora se trate de um caso particular e não se possa garantir a aplicabilidade do teorema em todas as situações, acreditamos que o exercício em questão, caso seja mediado pelo docente, oferece condições para que os estudantes vivenciem tanto o *empirismo ingênuo* quanto a *experiência crucial,* situados como tipos de prova pragmática no modelo de Balacheff (1988, 2022, 2024). Observe que no item (a), os estudantes, em grupo, poderão verificar se o Teorema de Tales é válido num contexto geométrico específico, cujas medidas são indicadas no livro e o valor esperado para x é 6,7 metros. Nesse caso, não foi proposto que eles verificassem o teorema em diferentes configurações geométricas, buscando alguma evidência de uma possível generalização. Assim, apesar de se tratar da verificação de um simples caso, classificamos o item (a) do exercício 8 como uma possibilidade de trabalhar no âmbito do *empirismo ingênuo*, sendo oportuno que o professor chamasse a atenção dos alunos para a limitação de uma verificação empírica na Matemática e até oferecesse exemplos para isso.

Já no item (b), embora ainda se trata da verificação de apenas um caso particular, cujo comando do enunciado pede para que as medidas dos segmentos AF, BE e CD sejam dobradas, a proposta possibilita que os estudantes obtenham uma possível generalização. Em vista disso, classificamos o item (b) do exercício 8 como uma possibilidade de trabalhar no âmbito da *experiência crucial*. No caso, assim como descrito nas orientações para o professor no final do livro, espera-se que os alunos concluam que "a conjectura é falsa. Para a medida de BC ser igual a $2x$, seria necessário as figuras serem homotéticas de razão 2, e não somente dobrarmos as medidas dos segmentos AF, BE e CD" (Cevada *et al*., 2024, p. 368).

Posteriormente aos três exercícios propostos sobre o Teorema de Tales, a obra contém uma seção intitulada "Travessias", que foca em aspectos específicos do processo de investigar e modelar a realidade. Nela, Cevada *et al*. (2024) apresenta uma demonstração do Teorema de Tales considerando quando os segmentos de reta são comensuráveis e, também, quando são incomensuráveis. A demonstração apresentada na Figura 2 corresponde, em termos discursivos e representacionais, a uma *experiência mental*, ou seja, um enunciado organizado em linguagem e raciocínio que caracteriza uma prova conceitual. Contudo, por se tratar de uma demonstração pronta no LD, é mais adequado afirmar que ela apresenta potencial para mobilizar esse tipo de prova, caso haja

mediação docente ou atividades que incentivem a reelaboração individual ou coletiva do argumento.



TRAVESSIAS

Vamos demonstrar o Teorema de Tales, ou teorema da intersecção.

Considere novamente as retas q, r, s e t de tal modo que $q \parallel r \parallel s \parallel t$. Considere também que as retas v e v' são transversais que intersectam o feixe de paralelas em A, B, C, D e A', B', C' e D', respectivamente. Vamos assumir que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ podem ser medidos e comparados, ou seja, são **comensuráveis**. Isso significa que podemos dividir $\overline{AB}$ em m segmentos iguais de comprimento u e dividir $\overline{CD}$ em n segmentos iguais também de comprimento u.

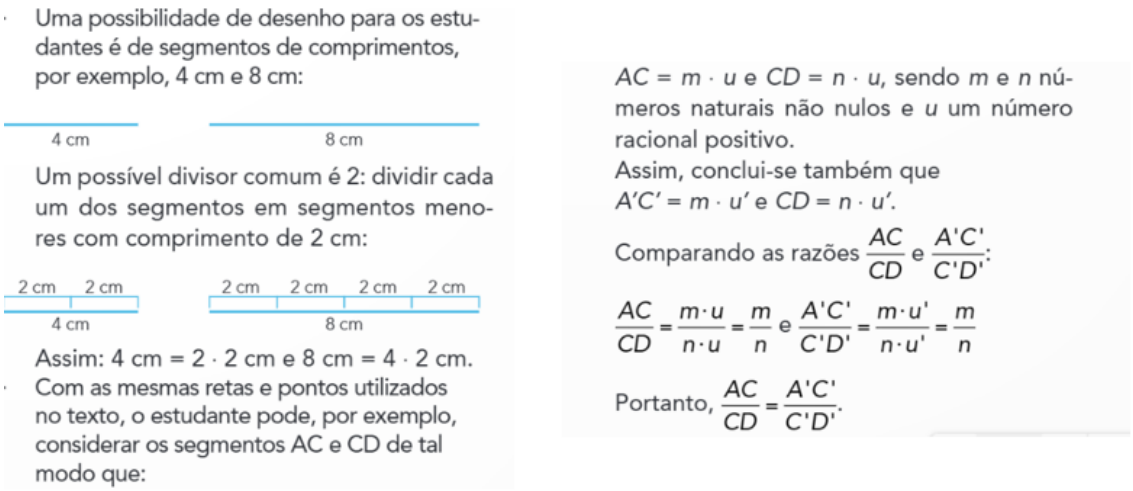
Antes de prosseguir, verifique como essa condição se apresenta em uma situação concreta: em seu caderno, desenhe dois segmentos de reta quaisquer com medidas à sua escolha. Em seguida, divida-os em segmentos de medidas iguais, de modo que essa medida seja um divisor comum das medidas dos dois segmentos considerados inicialmente.

Em seguida, traçaremos retas paralelas às retas q, r, s e t de modo que essas retas dividam $\overline{AB}$ em m segmentos iguais de comprimento u e $\overline{CD}$ em n segmentos iguais de comprimento u, como na figura.

Figura 2 – Recorte da demonstração do Teorema de Tales

Fonte: Cevada *et al.* (2024, p. 160).

Contudo, ainda sobre a Figura 2, gostaríamos de destacar o *box* (em amarelo) que apresenta aos discentes e docentes, uma sugestão para ser desenvolvida antes da demonstração do teorema. Com base nisso, nas orientações ao professor, uma sugestão específica é descrita, como mostra a Figura 3.



Uma possibilidade de desenho para os estudantes é de segmentos de comprimentos, por exemplo, 4 cm e 8 cm:

4 cm 8 cm

Um possível divisor comum é 2: dividir cada um dos segmentos em segmentos menores com comprimento de 2 cm:

2 cm 2 cm 2 cm 2 cm 2 cm 2 cm

4 cm 8 cm

Assim: 4 cm = 2 · 2 cm e 8 cm = 4 · 2 cm.
Com as mesmas retas e pontos utilizados no texto, o estudante pode, por exemplo, considerar os segmentos AC e CD de tal modo que:

$AC = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$, sendo m e n números naturais não nulos e u um número racional positivo.
Assim, conclui-se também que $A'C' = m \cdot u'$ e $CD = n \cdot u'$.

Comparando as razões $\frac{AC}{CD}$ e $\frac{A'C'}{C'D'}$:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n} \text{ e } \frac{A'C'}{C'D'} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n}$$

Portanto, $\frac{AC}{CD} = \frac{A'C'}{C'D'}$.

Figura 3 – Orientações ao professor sobre a demonstração do Teorema de Tales

Fonte: Cevada *et al.* (2024, p. 368).

A partir da sugestão descrita nas orientações para o professor, elaboramos a Figura 4 no *software GeoGebra* para melhor ilustrar a possibilidade indicada pelo LD.

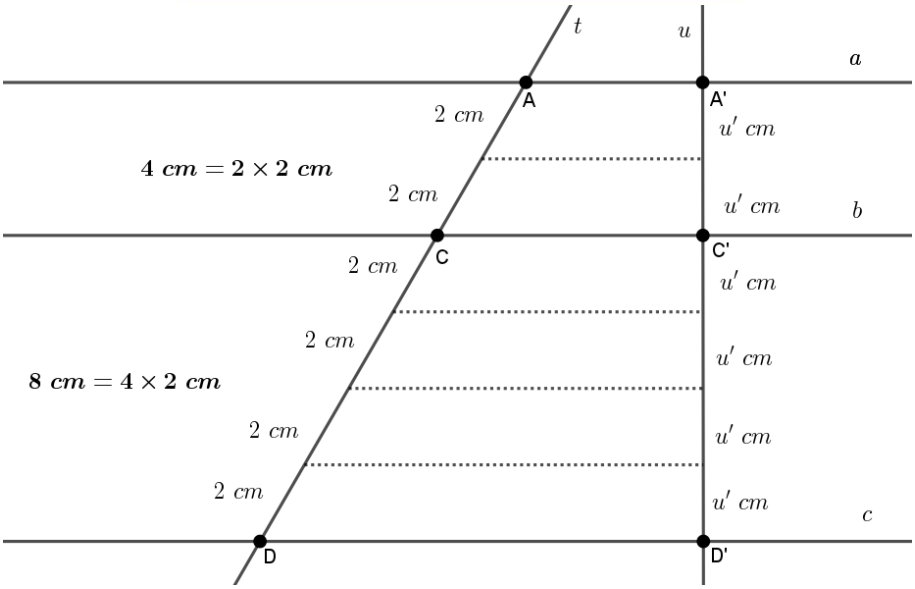


Figura 4 – Construção da proposta indicada nas orientações ao professor referente à Figura 3

Fonte: autoria própria.

Com base nas medidas $4\ cm = 2 \times 2\ cm$ e $8\ cm = 4 \times 2\ cm$ indicadas na obra, podemos considerar que a medida do segmento AC é igual a $4\ cm$ e que a medida do segmento CD é igual a $8\ cm$. Assim, tendo em vista que os segmentos pontilhados são paralelos às retas a, b e c, conclui-se também que o segmento $A'C'$ mede $2 \times u'\ cm$ e que o segmento $C'D'$ mede $4 \times u'\ cm$. Com base nesta construção, os estudantes poderiam obter, a partir da medida empírica de u', à seguinte conclusão:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{2 \times 2\ cm}{4 \times 2\ cm} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2 \times u'cm}{4 \times u'cm} = \frac{A'C'}{C'D'}$$

A sugestão descrita no *box* (em amarelo) nos chamou a atenção por duas razões principais. Primeiramente, de acordo com a nossa interpretação, oferece condições para trabalhar no âmbito do *exemplo genérico*, ainda que aborde apenas o caso de segmentos comensuráveis. No caso, elege-se um exemplo (um segmento de $4\ cm$ e outro de $8\ cm$, cujo possível divisor comum é 2) como representante da classe de objetos (no caso, segmentos comensuráveis) para explicitar as razões que validam a propriedade (no caso, a igualdade entre as razões AC/CD e $A'C'/C'D'$).

Por outro lado, chama a nossa atenção o fato desta sugestão não estar em evidência na obra, sendo necessário uma consulta às orientações do professor para ter acesso a mais detalhes. Acreditamos que esta sugestão poderia estar em posição de destaque no LD, como uma atividade exploratória e investigativa, a fim de que os estudantes fossem estimulados a fazer conjecturas e refutações, e talvez descobrir, por si próprios, a relação

matemática em questão. Inclusive, Balacheff (2024) chama a atenção para o desafio do professor ao recorrer a exemplos genéricos em sua prática, pois não se trata apenas de mais um novo exemplo, sendo necessário explicitar aos alunos o caráter genérico do caso apresentado.

5 Algumas considerações

De acordo com as nossas leituras e baseados nos critérios avaliativos descritos no PNLD, elencamos algumas reflexões sobre a importância de as obras didáticas contemplarem a tipologia de provas de Balacheff (1988, 2022, 2024), convidando autores e professores a refletirem sobre o trabalho com os diferentes tipos.

- *Considera o estado de conhecimento dos estudantes:* na literatura de pesquisa em Educação Matemática, por exemplo, Aguilar Junior (2012) e Caldato, Utsumi e Nasser (2017), verifica-se a predominância do empirismo ingênuo nas justificativas dos alunos brasileiros da Educação Básica. Se o LDM apresentasse apenas as demonstrações, poderia haver uma negligência com o estado de conhecimento dos alunos, levando-os ao desinteresse pela compreensão e elaboração de provas, conforme já indicamos anteriormente. Ao incluir outras possibilidades de provas, o LDM pode favorecer o desenvolvimento do critério avaliativo E1, a fim de que os estudantes possam compreender a diferença entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica.
- *Favorece o desenvolvimento do raciocínio, da linguagem e dos meios de representação:* a passagem entre os tipos de provas (como do exemplo genérico para a experiência mental), sinaliza o desenvolvimento nos meios de representação matemática e expressão do raciocínio (como do indutivo para o dedutivo), conforme indicado nos critérios avaliativos E2 e E6. Nesse sentido, o LDM pode auxiliar o aluno a se familiarizar com a linguagem matemática usualmente presente nas demonstrações.
- *Problematiza o argumento por autoridade:* ao propor situações em que os estudantes são estimulados a criarem conjecturas e a buscarem meios de validação, a partir do uso dos diferentes tipos de provas, o LDM ajuda a promover práticas argumentativas fundamentadas em dados, ainda que empíricos, o que dialoga com os critérios avaliativos C1 e E6. Ao fomentar que o aluno assuma a responsabilidade pela verdade de um enunciado, minimiza a aceitação de um fato

como sendo verdadeiro apenas por estar descrito na obra ou pela autoridade da figura docente.

- *Amplia as possibilidades docentes de trabalhar com argumentação em sala de aula:* dialoga com o critério C2, no sentido de que os professores podem conceber um trabalho para além da demonstração!

Nota dos Autores

É importante demarcar que, para fins de revisão linguística, ortográfica e de coesão textual, bem como para apoio à pesquisa de documentos, à busca de informações, sugestões de ideias e auxílio na correção após a avaliação do trabalho, este manuscrito contou com o suporte da ferramenta de inteligência artificial generativa *Perplexity* (versão *Pro*). Seu uso restringiu-se exclusivamente a essas finalidades, sem interferir na elaboração conceitual, na análise dos dados, na interpretação dos resultados ou na autoria intelectual do conteúdo desenvolvido pelos autores. Todas as sugestões fornecidas foram criticamente revisadas, e os autores assumem integral responsabilidade pelo conteúdo final do manuscrito.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JÚNIOR, C. A. *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental*. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – PEMAT, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

AMARAL, R. B.; MAZZI, L. C.; ANDRADE, L. V.; PEROVANO, A. P. *Livro Didático de Matemática:* compreensões e reflexões no âmbito da Educação Matemática. Editora Mercado de Letras, 2022.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. *In:* PIMM, D. (Ed.). *Mathematics teachers and children*. London, England: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 24, n. 1, p. 770-815, 2022.

BALACHEFF, N. A argumentação matemática, um conceito precursor da prova matemática. Tradução de Saddo Ag Almouloud, Marluce Alves dos Santos e Solange Fernandes Maia Pereira. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 26, n. 4, p. 389-412, 2024.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2012, p. 111-124.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Qualitative research for education:* an introduction to theories and methods. 5th ed. Boston, MA: Allyn & Bacon, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular:* educação é a base. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Edital de Convocação nº 02/2025 – CGPLI – PNLD Ensino Médio 2026-2029:* Anexo 01 – Referencial Pedagógico. 3. retificação, Brasília, DF: MEC/FNDE/SEB, abril, 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. *Dados estatísticos*. Atualizado em 09/07/2026. Disponível em: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 26 jul. 2026.

CALDATO, J. C. *De ingressantes a concluintes/recém-egressos:* uma investigação sobre argumentação, prova e demonstração na formação inicial de professores de Matemática. 2024. 357 f. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – PEMAT, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2024.

CALDATO, J; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. *Triângulo*, v. 10, n. 2, p. 74-93, jul./dez. 2017.

CEVADA, J. S.; SILVA, D. R.; PRADO, G. G.; COLPANI, J. G. B. *Matemática nos dias de hoje:* Volume 2 – 2ª Série. 2. ed. São Paulo, SP: Editora SEI, 2024. Disponível em: https://editorasei.com.br/. Acesso em: 5 mai. 2026.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema*, v. 15, n. 8, p. 91-99, set. 2002.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas,* São Paulo, SP, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

PEDEMONTE, B. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, n. 1, p. 23-41, 2007.

SANTOS, J. W.; SILVA, M. A. Relações de poder na idealização de livros didáticos de Matemática. *Práxis Educativa*, v. 14, n. 1, p. 250-272, 2019.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *Zetetiké*, v. 16, n. 30, p. 139-162, 2008.