INTERFACE ENTRE LIVRO DIDÁTICO E TECNOLOGIA DIGITAL: ASSOCIANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E MODELAGEM MATEMÁTICA

Lourdes Maria Werle de Almeida[1]
Karina Alessandra Pessoa da Silva[2]

GD4: O Livro Didático e suas articulações com as tecnologias digitais

Resumo
No contexto educacional a conceitualização do objeto matemático e sua apreensão pelos estudantes, em geral, vem ancorada na sua apresentação no livro didático. O uso do livro por si só, entretanto, ao mesmo tempo em que inclui facilitadores também aponta para aspectos inibidores de um ensino dinâmico e articulado com a realidade. Neste sentido, o presente texto propõe uma articulação para potencializar o uso do livro didático. A partir da caracterização de uma trama conceitual que inclui livro didático, tecnologia digital e modelagem matemática, o objetivo do presente texto é apresentar uma proposta de como um livro didático e um software educacional podem ser associados para fomentar a discussão relativa à análise qualitativa de soluções de equações diferenciais ordinárias. Trata-se, de um ensaio teórico que, em sintonia com uma das temáticas do Colóquio de Livros Didáticos de Matemática, resulta na configuração de uma interface teórica que é exemplificada para o estudo da equação diferencial de primeira ordem associada ao clássico problema de modelagem matemática que acompanha a própria história da modelagem: a queda livre de um objeto.

Palavras-chave: Livro Didático**.** Modelagem Matemática. Queda-Livre. Campo de Direções. Software Educacional.

1 Introdução ao tema

Os livros didáticos oferecem oportunidades de aprendizagem tanto para estudantes quanto para professores e, sob esse ponto de vista, constituem um recurso curricular importante para aulas em geral e, assim, também para aulas em disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que fazem parte de diferentes cursos nas áreas de ciências exatas, econômicas e tecnológicas. Livros didáticos desempenham um papel crucial na construção do conhecimento matemático por meio da organização, apresentação e explicação de conceitos e problemas matemáticos. Esse papel, no entanto,

[1] Universidade Estadual de Londrina (UEL. Docente. Londrina, Paraná (PR) (Sigla), País, Brasil (BR). lourdes@uel.br . ORCID https://orcid.org/0000-0001-8952-1176

[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Docente. Londrina, Paraná (PR) (Sigla), País, Brasil (BR). karinapessoa@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-1766-137X

pode ser fortalecido pela associação com a tecnologia digital e, em particular, com o uso de softwares educacionais como é o caso do GeoGebra[3].

O argumento de que as tecnologias digitais transformam a atividade matemática em práticas pedagógicas é reconhecido na literatura (Hoyles, 2018; Engelbrecht *et al.*, 2020). No entanto, o potencial transformador dessas tecnologias depende em grande parte de como elas são utilizadas, seja isoladamente ou em combinação umas com as outras. Apresentamos aqui um estudo que busca combinar tecnologia digital do software GeoGebra com um livro didático para disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias.

Conceitos, formulações e resoluções de equações diferenciais ordinárias muito se vinculam a problemas de modelagem matemática, seja em sua construção histórica, seja em seu uso para a abordagem de problemas oriundos de situações da realidade. A matematização da realidade, proporcionada pela modelagem matemática, já foi objeto do pensamento de filósofos pré-socráticos. Entretanto, teve sua relevância e seu reconhecimento acentuados a partir de Galileu Galilei (1564-1642) que, ao afirmar que as leis da natureza são matemáticas e que o universo está escrito em linguagem matemática, sugere a integração da modelagem matemática da realidade ao desenvolvimento da matemática e de suas aplicações. É com este viés que a modelagem matemática vem sendo incorporada ao currículo de diferentes cursos e disciplinas curriculares, mencionando-se, entre elas, aquelas de Equações Diferenciais Ordinárias.

Levando em consideração esta trama que inclui livro didático, tecnologia digital e modelagem matemática, o objetivo do presente texto é apresentar uma proposta de como um livro didático e um software educacional podem ser associados para fomentar a discussão relativa à análise qualitativa de soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em um clássico problema de modelagem matemática que acompanha a própria história da modelagem: a queda livre de um objeto.

2 Os elementos de uma trama conceitual

2.1 O livro didático como propulsor de conhecimento

No contexto educacional a conceitualização do objeto matemático e sua apreensão pelos estudantes, em geral, vem ancorada na sua apresentação no livro didático. Assim, a forma como o conceito, as características e as propriedades desses objetos são

[3] GeoGebra é um aplicativo computacional livre de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra.

apresentadas e discutidas no livro constitui base para a construção do conhecimento relativamente a esses objetos.

O uso de livros didáticos de matemática como material de apoio para o ensino e a aprendizagem da matemática possui uma longa história. Desde Os Elementos de Euclides, na Grécia (cerca de 300 a.C.) e Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, na China (cerca de 200 a.C.), as oportunidades de ensino e de aprendizagem proporcionadas pelos livros didáticos vêm sendo discutidas (Almeida; Silva, 2018; Fan *et al*., 2025; Hwang *et al*. 2025).

Essa temática tomou proporções amplas de modo que eventos em nível nacional (como é o caso do Colóquio de Livros Didáticos de Matemática (CLDM)) bem como em nível internacional (como é o caso do *International Conference of Mathematical Textbooks* (*ICTM*)) vêm colocando em discussão a importância da estrutura dos livros didáticos bem como o seu uso na sala de aula. Essas conferências apontam para a importância, também no campo da pesquisa, que o desenvolvimento de livros didáticos de matemática e seu uso vem merecendo (Fan *et al*. 2025a).

Os livros didáticos usados no Ensino Superior, como é o caso dos livros de Equações Diferenciais Ordinárias, servem como base para o desenvolvimento da disciplina pelo professor. Assim, o livro usado indica quais tópicos serão estudados e como a abordagem de cada um em particular será realizada na disciplina, de modo que o livro propõe aos professores uma estrutura para orientar seu trabalho ao mesmo tempo em que é proposto como suporte aos estudantes.

Entretanto, conforme discussão proposta por Fan *et al*. (2025), o papel dos livros didáticos compreende tanto aspectos facilitadores quanto limitadores na implementação do programa de determinada disciplina. Um papel facilitador é que os livros didáticos podem atender de forma eficaz às necessidades da disciplina, enquanto um papel limitador, muitas vezes, é justamente o fato de que que estes livros não auxiliam no atendimento dessas necessidades.

Isso sinaliza que o uso do livro didático não é uma entidade fixa, mas deve ser moldado pelas práticas individuais dos professores visando a superação dos limites de seu uso. No presente texto, a busca pela superação de aspectos limitadores de um livro didático de Equações Diferenciais Ordinárias é sugerida mediante a articulação do livro com a tecnologia digital.

2.2 O uso da tecnologia digital na sala de aula

O uso de tecnologias digitais com finalidades pedagógicas tem se mostrado fonte de reflexões e discussões em pesquisas e práticas pedagógicas na área de Educação Matemática (Geiger, 2005; Borba *et al*., 2018; Almeida, *et al*., 2024). Com o aumento da disponibilidade de computadores, softwares e outras tecnologias digitais portáteis, bem como a produção de uma variedade de recursos tecnológicos direcionados para o ensino e a aprendizagem da matemática, surgem diferentes focos e tendências de pesquisa sobre a integração dessas tecnologias às atividades da sala de aula (Borba *et al*., 2018; Drijvers, 2020; Engelbrecht *et al*., 2020).

Existe atualmente uma diversidade de tecnologias digitais disponíveis no âmbito da área de Educação Matemática. Com o avanço tecnológico, diferentes abordagens teóricas acerca dos usos e das funções didáticas das tecnologias digitais vêm sendo nomeadas (Geiger, 2005; Borba *et al*., 2018; Hoyles, 2018; Drijvers, 2020).

Neste contexto, Geiger (2005), ao investigar como tecnologias digitais podem mediar a aprendizagem, aponta que os estudantes podem operar com elas de diferentes modos no desenvolvimento de atividades matemáticas em contextos educacionais. O autor usa as metáforas *tecnologia como guia* (*technology as master*), *tecnologia como assistente* (*technology as servant*), *tecnologia como parceira* (*technology as partner*) e *tecnologia como extensão de si mesmo* (*technology as extension of self*) para se referir à intensidade com que a tecnologia digital é incorporada à prática pedagógica na aula de matemática.

Também em consonância com estudos sobre a interação entre tecnologias digitais e estudantes em atividades de matemática, o construto seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2006) enfatiza uma relação de simbiose entre as tecnologias digitais e pensamento matemático, visando um trabalho dinâmico e com relação bidirecional entre parceiros humanos e não humanos na qual a produção de conhecimento é condicionada pelo uso da tecnologia e, desta maneira, a atividade matemática é transformada pela tecnologia.

No entanto, o potencial transformativo das tecnologias digitais depende, em grande medida, de como essas ferramentas são usadas isoladamente ou combinadas entre si. A mera presença e disponibilidade dessas ferramentas produz pouca diferença nos resultados de aprendizagem dos estudantes (Hoyles, 2018; Almeida, *et al*., 2024). Assim,

olhar para o modo como as tecnologias digitais transformam ou complementam a atividade matemática requer olhar para o tipo de uso que é feito dessas tecnologias e para as possibilidades de interação dos estudantes com a tecnologia no desenvolvimento de uma atividade específica.

É com esta perspectiva de complementação e associação com a estrutura de um livro didático de EDO que o uso da tecnologia é proposto para o entendimento proporcionado para equações diferenciais associadas com a modelagem matemática de fenômenos.

2.3 A modelagem matemática associada ao estudo de equações diferenciais

Uma atividade de modelagem matemática, em termos gerais, diz respeito à abordagem de uma situação da realidade por meio da matemática. A relação entre matemática e realidade em uma atividade de modelagem, envolve, conforme Almeida, *et al*. (2024), uma estruturação matemática e uma configuração pseudo-empírica da situação da realidade, delineadas com base nas experiências e conhecimentos prévios do modelador. A estruturação matemática diz respeito a como o modelador pensa matematicamente, como ele estrutura a situação. Já a configuração pseudo-empírica é uma representação da situação da realidade que operacionaliza experiências prévias do modelador em relação ao contexto da atividade de modelagem e é construída a partir de suas experiências e conhecimentos sobre a situação em estudo.

No contexto do estudo de equações diferenciais a modelagem matemática acompanha a formulação de modelos clássicos para fenômenos da realidade, como por exemplo, o crescimento populacional, a dinâmica de evolução de doenças, o controle de propagação em epidemias entre tantas outras formulações matemáticas para entender a realidade e vislumbrar previsões para os fenômenos. Nesse caso, a modelagem matemática utiliza as equações diferenciais como ferramentas para traduzir problemas reais em estruturas matemáticas capazes de explicar, prever e interpretar fenômenos naturais, físicos, biológicos, econômicos e sociais.

A construção de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais envolve etapas como observação do fenômeno, definição de variáveis, formulação de hipóteses e elaboração de equações que representem as interações existentes no sistema. Esse processo favorece não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também o desenvolvimento de uma visão interdisciplinar, na medida em que aproxima a

matemática de contextos reais. Além disso, as equações diferenciais permitem investigar qualitativamente o comportamento das soluções, analisando aspectos como crescimento, decaimento, estabilidade e equilíbrio, elementos fundamentais para a interpretação dos modelos construídos.

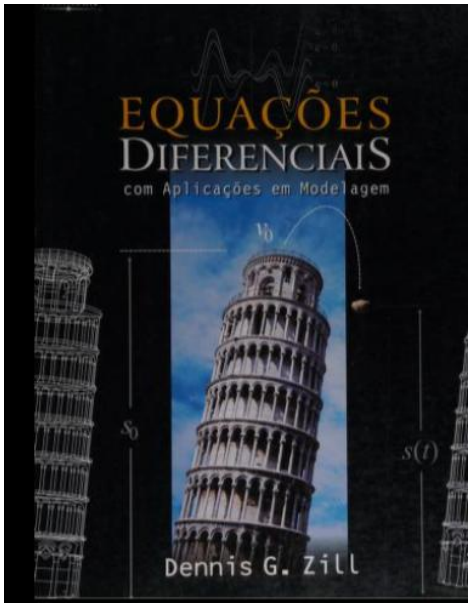
Associada à modelagem matemática usando equações diferenciais encontra-se como forte aliada a tecnologia digital. A integração dessas tecnologias no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática tem sido realizada considerando duas abordagens, conforme apontam Almeida, *et al*., (2024). A primeira é a análise de aspectos metodológicos e teóricos associados ao desenvolvimento de atividades de modelagem mediadas por tecnologias digitais. Nesta abordagem, construir modelos matemáticos, validar estes modelos, construir representações gráficas são exemplos de uso da tecnologia. A segunda abordagem transcende esta visão de uso das tecnologias digitais e assume como pressuposto que a tecnologia é um componente fundamental na reorganização das formas de fazer modelagem matemática e gerar conhecimento por meio desse processo, isto é, as tecnologias digitais promovem uma reorganização no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Considerando essa trama teórica que se pode vislumbrar, associando modelagem matemática, tecnologia digital e livro didático para o ensino de equações diferenciais ordinárias, o presente texto propõe uma configuração para o estudo de uma equação diferencial associada ao clássico problema de queda livre inscrito em livros didáticos. A configuração aqui apresentada leva em consideração uma proposição apresentada em Zill (2003).

3 A configuração de uma proposta de ensino

A disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias no curso de Licenciatura em Matemática é orientada, em geral, por livros didáticos que, em alguma medida, representam uma possibilidade para articular a origem e os métodos de resolução das equações com situações da realidade mediante procedimentos de modelagem matemática. No livro a que nos referimos (Zill, 2003), particularmente, o autor empreende grande esforço para explorar os usos das equações diferenciais, sinalizando esse aspecto na própria capa do livro conforme indica a Figura 1.

Figura 1 – Capa do livro didático Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem



Fonte: Zill (2003).

Como sinalizado por esta imagem, um dos clássicos problemas que, no decorrer da história, merecem atenção de matemáticos e, nas últimas décadas também de educadores matemáticos, é a queda livre de corpos. A modelagem matemática dessa situação, abordada de forma abreviada no livro aqui em foco (Zill, 2003) nas páginas 27, 28 e 29, acompanha a própria história da matemática.

De fato, o movimento de queda livre de corpos vem sendo objeto de modelagem matemática desde Aristóteles[4] há 300 a.C. Ele, a partir do fruto de suas conjecturas filosóficas acerca da queda dos corpos, acreditava que se abandonássemos dois corpos de massas diferentes, de uma mesma altura, o corpo de maior massa tocaria o solo primeiro, ou seja, os tempos de queda desses corpos seriam diferentes.

Essa conjectura, entretanto, foi refutada por Galileu[5] por volta do ano de 1600. Experimentalmente, Galileu chegou à conclusão de que quando dois corpos de massas diferentes, desprezando a resistência do ar, são abandonados da mesma altura, ambos alcançam o solo no mesmo instante. Ou seja, o tempo de queda dos objetos não depende de sua massa. Portanto, Aristóteles teria se equivocado! Esta formulação galileana é justamente a ilustrada na imagem da capa do livro (Figura 1), uma vez que, conforme se

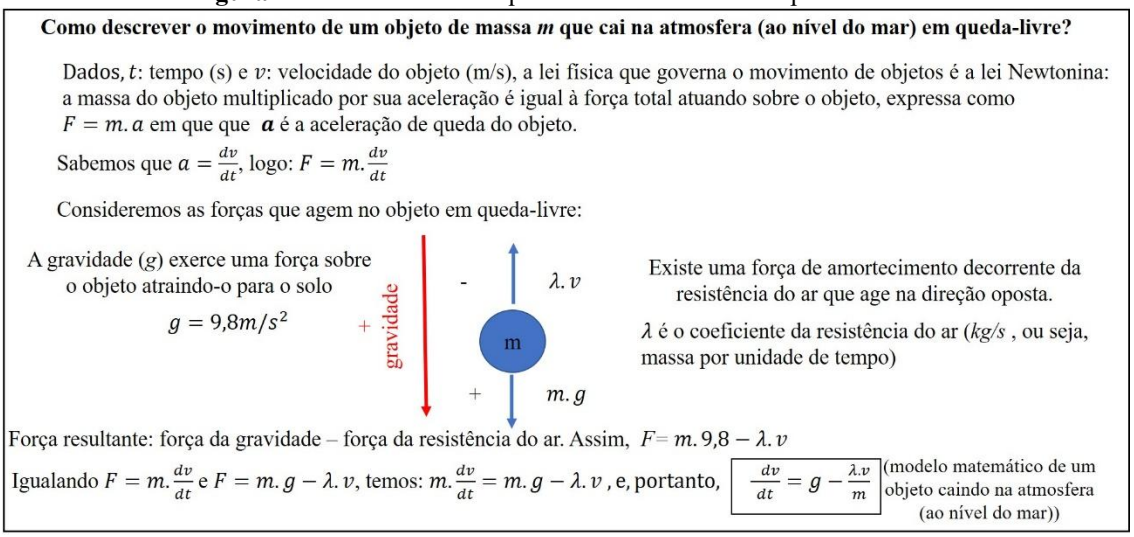
[4] Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) foi um dos mais importantes filósofos gregos.
[5] Galileu Galilei (1564 - 1642), nascido em Pisa, foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo.

pondera historicamente, as formulações de Galileu decorrem de seus experimentos com queda de corpos na Torre de Pisa.

A formulação matemática clássica dessa queda de corpos, todavia, só se formaliza a partir das contribuições de Isaac Newton, registrada como sendo dos anos de 1700. Newton, formalizou a ideia de Galileu, afirmando que variação da velocidade em um intervalo de tempo corresponde a uma aceleração, que recebe um nome especial, aceleração de queda ou ação da gravidade que, na terra corresponde a $9{,}8m/s^2$. Ou seja, o corpo em queda livre aumenta sua velocidade em 9,8m a cada segundo. Deve-se à Newton o modelo matemático $V(t)= 9{,}8\ t$ em que t é tempo (em segundos) e $V(t)$ a velocidade do corpo em queda no instante t[6].

Assim, constituído historicamente, o estudo da queda livre foi incorporado em livros didáticos como é o caso de livros de Equações Diferenciais Ordinárias, recebendo formulações clássicas que visam a obtenção da equação diferencial associada a esse fenômeno. Em síntese, a formulação da equação diferencial ordinária associada ao movimento de queda livre se dá conforme sugere a Figura 2.

Figura 2 – O movimento de queda livre e a EDO correspondente



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Como analisar o modelo da queda livre dado pela equação $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda.v}{m}$ em que $v(t)$ é a velocidade do corpo no instante t e m é a massa desse corpo? A resolução da equação $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda.v}{m}$, seja como autônoma ou linear de primeira ordem, se dá mediante

[6] Albert Einstein (1879-1955) na formulação da Teoria da Relatividade, sugere que para corpos em movimento com velocidades altas, próximas à da luz, a teoria de Newton já não é suficiente!

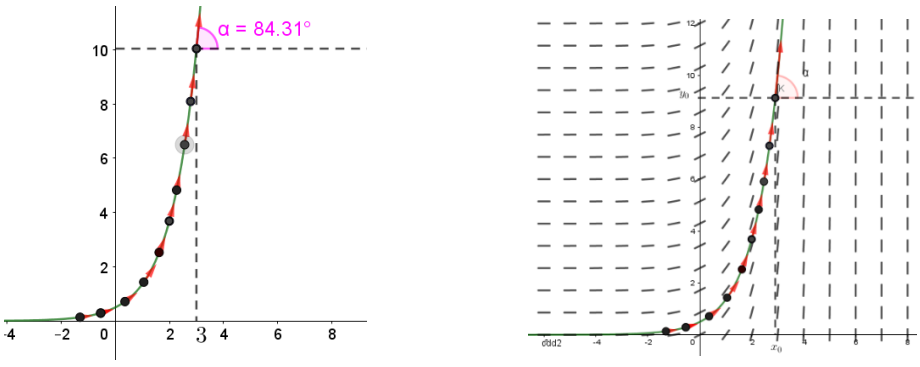
métodos que conduzem à solução analítica. Entretanto, a abordagem inicial dessa equação diferencial pode ser realizada usando abordagem qualitativa da solução com o apoio da tecnologia digital.

O uso dessa tecnologia, embora sugerido no livro didático objeto do presente texto (Zill, 2003), não é efetivamente incorporado ao livro por meio da indicação de software ou aplicativo em que uma análise qualitativa do fenômeno associado à equação diferencial é viabilizada. O livro, todavia, apresenta casos gerais de construção do chamado *campo de direções* de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Um campo de direções (ou campo de inclinações) é um objeto matemático utilizado para representar graficamente soluções de uma equação diferencial de primeira ordem. De fato, é possível aprender muito sobre uma solução da equação diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$por meio de uma abordagem qualitativa.

Para isso, calcula-se sistematicamente $f(x, y)$ para um conjunto de pontos (x, y) ao longo da curva $y(x)$ e, em cada ponto (x, y), desenha-se um elemento linear (vetor) com inclinação $f(x, y)$. Podemos obter informações a respeito da solução $y(x)$ de modo qualitativo, observando a direção e a inclinação dos elementos lineares (*vetores*) ao longo da curva de $y(x)$. Fazendo isso para uma malha retangular de pontos (x, y) no plano $x0y$, a coleção de todos os elementos lineares (vetores) é chamada de *campo de direções* da equação $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (Figura 3).

Figura 3 – (a) Elemento linear (b) Uma curva traçada no campo de direções



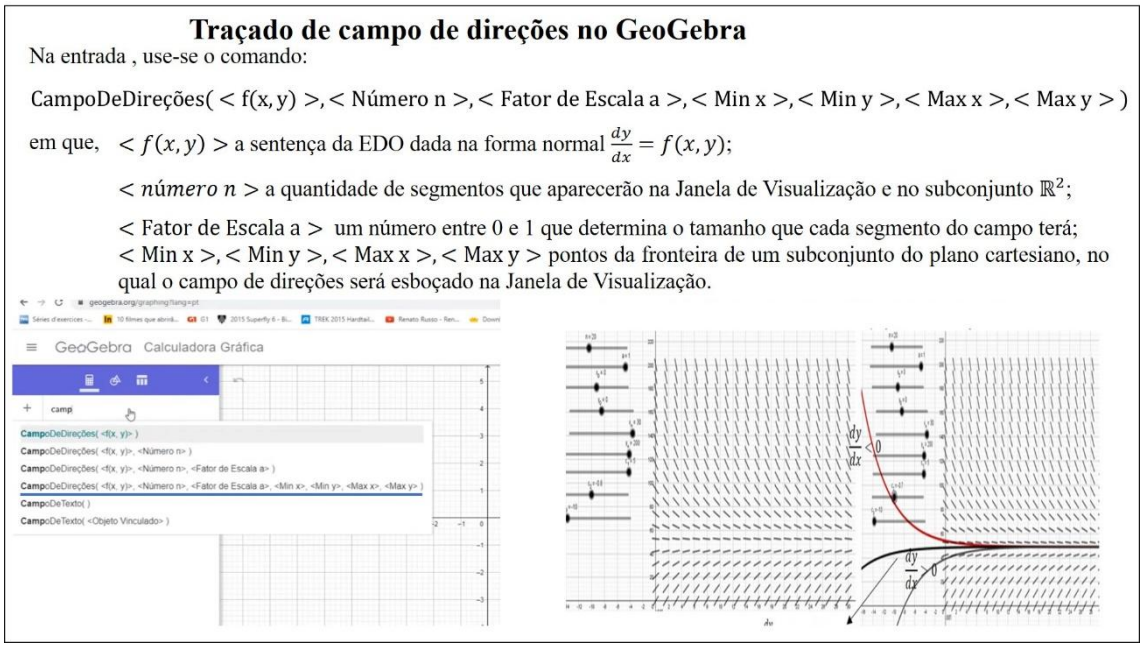
(a) (b)

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A construção de um campo de direções solicita o uso de tecnologia digital. Assim, no presente texto, propõe-se a articulação do livro didático com a tecnologia apontando para o uso do software GeoGebra para a construção de campos de direções de uma

equação diferencial de primeira ordem. Em outras palavras, um complemento ao livro didático, enquanto recurso curricular, é essencial para que o estudante possa realizar uma avaliação qualitativa da solução por meio da construção de um campo de direções antes ainda de conhecer a solução analítica da equação diferencial ordinária. Na Figura 4, apresenta-se os comandos do software necessários para construir um campo de direções e obter curvas integrais, permitindo a análise qualitativa da solução.

Figura 4 – Os comandos do software Geogebra para a construção de campos de direção



Fonte: Elaborado pelas autoras.

O campo de direções assim construído fornece informações importantes sobre o fenômeno associado à equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. De fato, no campo de direções, a observação viabilizada para o traçado da solução *y=y(x)* sem conhecer a expressão analítica é uma maneira eficaz de conhecer características relevantes do fenômeno, revelando informações sobre crescimento, decrescimento e equilíbrio desse fenômeno, por exemplo.

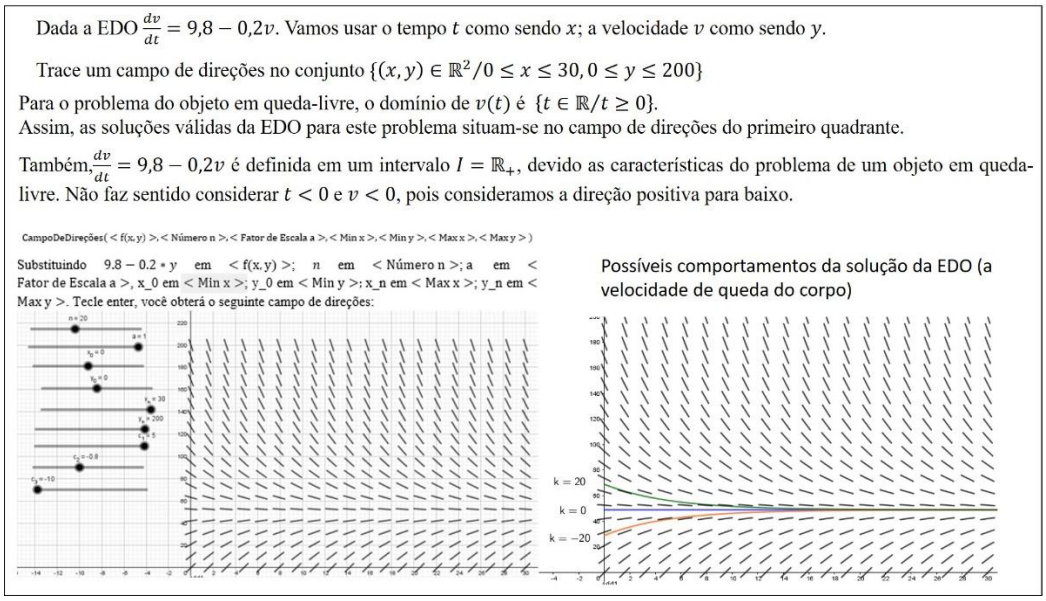
Neste sentido, a tecnologia incorporada ao livro didático de EDO é uma possibilidade de ampliar o que os estudantes podem saber sobre a equação diferencial, seja do ponto de vista do entendimento do fenômeno que ela pretende explicar, seja do ponto de vista da manipulação de parâmetros e sua influência sobre a solução.

Passemos agora a esta análise relativamente ao movimento de queda livre descrito pela equação diferencial $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{\lambda . v}{m}$ em que *v(t)* é a velocidade do corpo em queda no

instante *t*; *m* é a massa do corpo e λ é a constante relativa à força de amortecimento na queda.

Para a modelagem de uma situação particular, consideremos um corpo de massa $m = 10kg$ e $\lambda = 2kg/seg$. Temos então $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$ ou $\frac{dv}{dt} = \frac{49-v}{5}$. O que se pretende, primeiramente, é conhecer, mediante traçado do campo de direções, informações sobre a solução *v(t)* dessa equação diferencial. O traçado do campo de direções para essa situação é realizado conforme sinaliza a Figura 5.

Figura 5 – Campo de direções da EDO que descreve a queda livre de um corpo



Fonte: Elaborado pelas autoras.

O que se pode conhecer então, a partir do campo de direções da equação diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{49-v}{5}$, é como o comportamento da queda é regulado pela velocidade *v*(*t*) do corpo em queda, que é a solução da equação diferencial. Ou seja, o que se pode responder sobre o fenômeno a partir da construção do campo de direções e observando a direção e a inclinação dos elementos lineares (vetores)? Que informações a respeito da solução *v(t)* é possível inferir sobre o fenômeno em estudo? Qual é o comportamento das curvas integrais (soluções particulares) da equação diferencial para $v < 49$, $v = 49$, $v > 49$?

A resposta para essas questões leva à caracterização do fenômeno da queda de um corpo a partir de uma velocidade inicial conhecida e da massa desse corpo. É neste sentido que o campo de direções antecipa informações sobre o fenômeno expresso pela equação diferencial. O software GeoGebra inclui também a ferramenta para obtenção analítica das

equações diferenciais, sendo pertinente também a proposição aos estudantes da relação entre o campo de direções e a solução analítica da equação diferencial e sua representação no plano cartesiano.

4 Considerações Finais

No Ensino Superior, mais especificamente na disciplina de EDO, o livro didático orienta e até mesmo direciona a abordagem dos conteúdos estudados na sala de aula. Ao considerar o potencial da trama que inclui livro didático, tecnologia digital e modelagem matemática, neste artigo estabelecemos uma proposta que contribui para estabelecer uma interface entre esses três elementos para o estudo do movimento de queda livre de um corpo.

No livro didático investigado de Denis Zill, edição de 2003, a própria capa já indica uma possibilidade de articulação entre modelagem matemática a partir da matematização da queda livre de um objeto. No entanto, a abordagem do livro, apesar de resgatar o problema e apresentar encaminhamentos condizentes para o estudo do conteúdo matemático, não estabelece possibilidades que podem ser potencializadas pela construção do campo de direção, realizada por meio de tecnologias digitais, como o GeoGebra, que já constitui tecnologia difundida no meio educacional.

Neste sentido, a presente proposta sugere que a análise qualitativa de um fenômeno mediante a construção do campo de direções representa um incremento que o professor pode realizar para o uso do livro didático em aulas de disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias. É preciso, ponderar, entretanto, que o acesso ao software e ao computador são as condições que o contexto precisa oferecer.

Reconhece-se que os livros didáticos incorporam decisões sobre apresentação, sequenciamento e abordagens que refletem a visão e o conhecimento dos autores do livro, sobretudo em relação aos objetivos específicos de aprendizagem de cada aula. Entretanto, as articulações com enfoques ou abordagens contemporâneas podem aumentar o potencial do livro como recurso para o desenvolvimento de aulas que exploram possibilidades de ensino com foco em aprendizagem bem sucedida.

Assim, a configuração da interface aqui proposta, promovendo a articulação do livro com modelagem matemática e uso de tecnologia digital para o estudo de equações diferenciais aponta para a aulas em disciplinas de EDO que congregam materiais e meios

para o enfrentamento de desafios associados ao estudo de equações diferenciais ordinárias.

Embora a implementação da presente proposta tenha sido a propulsora para a sua disseminação no Colóquio de Livros Didáticos de Matemática, a continuidade que a presente pesquisa almeja é um estudo qualitativo em que a performance dos estudantes no estudo de fenômenos da realidade mediados por equações diferenciais e o uso de tecnologia digital pode ser objeto de investigação. Ou seja, a exploração da interface aqui proposta, pode ter seu potencial fomentado mediante pesquisa empírica.

5 Referências Bibliográficas

ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. A. P. A semiotic interpretations of the derivative concept. *ZDM*, v. 50, p. 1-14, 2018.

ALMEIDA, L. M. W; SEKI, J. T. P.; CASTRO, E. M. V. Tecnologias digitais e modelagem matemática: interlocuções e possibilidades. *Amazônia (UFPA*), v. 20, p. 144-161, 2024.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Vol. 39. Springer Science & Business Media, 2006.

BORBA, M. C.; CHIARI, A. S.; ALMEIDA, H. R. F. L. Interactions in virtual learning environments: new roles for digital technology. *Educational Studies in Mathematics*, v. 98, n.3, p. 269-286, 2018.

DRIJVERS, P. *Digital tools in Dutch mathematics education*: A dialectic relationship. *In:* National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. Cham, Switzerland: Springer, p. 177-195, 2020.

ENGELBRECHT, J. LLINARES, S; BORBA, M. C. Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM*, v.52, p. 825–841, 2020.

GEIGER, V. Master, servant, partner and extension of self: A finer grained view of this taxonomy. *In*: Building Connections, Theory, Research and Practice: Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics Education Research Group of Australasia, p. 369-376, 2005.

FAN, L.;WIJAYANTI, D. ;DANYANG, M.; LI, K.; MAILIZAR, M. The role of textbooks in the implementation of curriculum development: a comparative study through the lens of Chinese and Indonesian teachers' views. *ZDM*, v. 57, p. 935–949, 2025.

FAN, L., QI, C., SEAH, W.T. Research on mathematics textbooks in relation to curriculum development and instructional reform: recent advances and future directions. *ZDM, v.*57, p. 845–857, 2025a.

HWANG, S. HAN, J. MUIRHEAD, F. BROWN, M. MELVILLE, M. CAI, J. Textbooks as a Resource for Teaching Mathematics Through Problem Posing: Catalyzing Instructional Change. *ZDM*, v. 57, p. 987–1001, 2025.

HOYLES, C. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 209-228, 2018.

ZILL, D. G. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. COPYRIGHT @2003. Thompson Learning Ltda, 2003.