

TEORIA DAS PROBABILIDADES: da inferência bayesiana à teoria da medida

Luciana de Sousa Fialho[1]
Edgar Luis Bezerra de Almeida[2]

RESUMO: A prática científica contemporânea demanda o gerenciamento de incertezas, limitações de dados empíricos e processos de tomada de decisão baseados em evidências. Nesse contexto, a atribuição de probabilidades a hipóteses científicas suscita questões como: (i) como revisar probabilidades à luz de novas informações? (ii) em que consiste a noção de probabilidade? e (iii) qual sua fundamentação matemática? O presente trabalho teve como objetivo investigar essas questões por meio do estudo da inferência bayesiana, das variáveis aleatórias e da teoria da medida. A pesquisa possui natureza teórica, bibliográfica e lógico-dedutiva. Os resultados evidenciaram a importância do Teorema de Bayes na atualização racional de probabilidades e o papel da teoria da medida na fundamentação rigorosa da moderna teoria das probabilidades. Conclui-se que a Teoria das Probabilidades constitui um campo matemático essencial para a modelagem da incerteza.
Palavras-chave: Teoria das probabilidades; Teorema de Bayes; Esperança matemática; Desigualdade de Chebyshev; Teoria da medida.

ABSTRACT: Contemporary scientific practice requires the management of uncertainties, limitations of empirical data, and evidence-based decision-making processes. In this context, assigning probabilities to scientific hypotheses raises questions such as: (i) how can probabilities be revised in light of new information? (ii) what exactly is the notion of probability? and (iii) what is its mathematical foundation? The present work aimed to investigate these questions through the study of Bayesian inference, random variables, and measure theory. The research has a theoretical, bibliographic, and logical-deductive nature. The results highlighted the importance of Bayes' Theorem in the rational updating of probabilities and the role of measure theory in the rigorous foundation of modern probability theory. It is concluded that Probability Theory constitutes an essential mathematical field for modeling uncertainty.
Keywords: Probability Theory; Bayes' Theorem; Mathematical Expectation; Chebyshev's Inequality; Measure Theory.

[1] Bacharelado em Engenharia Civil (em andamento). Instituto Federal de Brasília, Campus Samambaia. E-mail: luciana.fialho@estudante.ifb.edu.br.
[2] Professor de Matemática. Campus Brasília. E-mail: edgar.almeida@ifb.edu.br

Introdução

A incerteza quanto à ocorrência de um evento está presente nos fenômenos estudados pelas ciências em geral e manifesta-se, em particular, em problemas de engenharia, muitas vezes de difícil solução. Situações que envolvem risco estrutural, previsão de carga, variabilidade climática e tomadas de decisão exigem ferramentas capazes de modelar eventos aleatórios e interpretar informações incompletas. Nesse contexto, a teoria matemática das probabilidades possui papel de relevo, pois se apresenta como uma ferramenta versátil para a análise de conceitos, a quantificação de incertezas e a investigação de fenômenos aleatórios.

Compreender matematicamente a incerteza, entretanto, não significa apenas calcular sua probabilidade. A matematização da incerteza é regida por modelos probabilísticos que só podem ser formulados e justificados a partir de conceitos fundamentais como probabilidade condicional, variáveis aleatórias, esperança matemática, variância e desigualdades probabilísticas. Além disso, uma compreensão mais rigorosa da probabilidade moderna conduz ao estudo de bases matemáticas mais abstratas, como a teoria da medida, ambiente de fundamentação das noções de evento mensurável, função mensurável e integração de Lebesgue (1902).

A importância dessa fundamentação de estudo se evidencia em diversas áreas do conhecimento. Na engenharia, por exemplo, a probabilidade permite avaliar riscos, analisar a segurança de estruturas, interpretar dados de inspeções e auxiliar processos de decisão em contextos nos quais não há certeza absoluta sobre o comportamento futuro de um sistema. Nas ciências exatas, ela contribui para a modelagem de fenômenos aleatórios, para a formulação de estimativas e para a análise de resultados sujeitos à variabilidade. Assim, compreender a teoria das probabilidades apresenta relevância tanto teórica quanto aplicada.

Visando compreender o conceito de probabilidades iniciamos uma investigação dos trabalhos de Kolmogorov (2018) na axiomatização da probabilidade, o que se estendeu para os mecanismos de revisão da ocorrência de um evento à luz de novas evidências dado pelo teorema de Bayes. Como exemplo de aplicação foi investigado um caso concreto de avaliação de segurança estrutural de pontes. O estudo do teorema de Bayes motivou a formulação de questões mais profundas acerca da natureza da probabilidade e das variáveis aleatórias, o que nos conduziu à investigação do conceito de variável aleatória, esperança matemática, variância, desigualdade de Chebyshev e lei dos grandes números.

A análise desses conceitos revelou algumas das limitações do ferramental técnico, em especial o estudo da integral de Riemann, estudado em cursos padrão de cálculo para

engenharias. Visando preencher essa lacuna foram investigados os conceitos de integral de Stieltjes e alguns elementos de teoria da medida, culminando na análise de integração formulada por Lebesgue (1902) e, enfim, em uma definição precisa para a noção de probabilidade.

Desse modo, a investigação desenvolve-se segundo um percurso de aprofundamento conceitual progressivo. Parte-se inicialmente da análise da probabilidade como mecanismo de atualização racional da incerteza por meio do Teorema de Bayes e de suas aplicações em problemas de engenharia. Em seguida, investigam-se propriedades fundamentais das variáveis aleatórias, com ênfase em conceitos como esperança matemática, variância e desigualdades probabilísticas, particularmente a desigualdade de Chebyshev. Por fim, o estudo avança em direção às estruturas matemáticas responsáveis pela fundamentação rigorosa da probabilidade moderna, especialmente elementos da teoria da medida e da integração.

Após a discussão dos fundamentos teóricos relacionados à inferência probabilística, às variáveis aleatórias e à teoria da medida, descreve-se a metodologia adotada, de natureza teórica, bibliográfica e lógico-dedutiva. Em seguida, analisam-se os principais resultados obtidos ao longo da investigação, enfatizando a articulação entre aplicações probabilísticas, formulações conceituais e fundamentação matemática. Finalmente, retomam-se os principais aspectos desenvolvidos ao longo do estudo e indicam-se possíveis desdobramentos futuros no âmbito da Teoria das Probabilidades.

Referencial Teórico

Os principais elementos teóricos desenvolvidos neste trabalho contemplam uma apresentação da fundamentação axiomática da Teoria das Probabilidades, formulada por Kolmogorov no século passado, seguida de uma exposição sucinta do importante conceito de esperança matemática. A fundamentação teórica é encerrada com uma breve apresentação de elementos da Teoria da Medida, conceito central para a formulação moderna das funções de probabilidade.

2.1 Teoria das Probabilidades e Inferência Bayesiana

A Teoria das Probabilidades constitui um dos principais instrumentos matemáticos utilizados na modelagem de fenômenos aleatórios e na análise de situações marcadas pela incerteza. Segundo Ross (2010), muitos problemas probabilísticos podem ser interpretados como experimentos cujo resultados não podem ser previstos com certeza, embora seja possível descrever o conjunto de todos os resultados possíveis associados ao fenômeno investigado.

A formulação moderna da teoria das probabilidades está associada à axiomatização proposta por Kolmogorov (1933), segundo a qual a probabilidade é definida como uma função cujo domínio é o conjunto de eventos e do espaço amostral e cuja imagem é o intervalo real [0,1]. De modo explícito, dada um espaço amostra Ω uma função de probabilidade é qualquer função f tal que

1. Não negatividade: qualquer que seja $\boldsymbol{E} \in$ E, tem-se que P(E) ≥ 0.
2. Normalização: qualquer que seja o conjunto Ω, tem-se que P(Ω) = 1.
3. Adição de probabilidades: se E1 ∩ E2 = ∅, então P (E1 ∪ E2) = P(E1) + P(E2), quaisquer que sejam os eventos E1, E2 ∈ E.

Essa formulação permitiu conferir rigor matemático ao tratamento da incerteza, estabelecendo propriedades fundamentais como não negatividade, normalização e aditividade das probabilidades. Por outro lado, suscita interessantes questões fundacionais, pois qualquer função que cumpra as condições acima deve ser considerada uma função probabilidade, ainda que o conceito em análise não remete, à primeira vista, à noção de probabilidade.

Em contextos aplicados, o espaço amostral corresponde ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, enquanto os eventos são representados por subconjuntos desse espaço. A partir dessa perspectiva, é possível construir modelos probabilísticos capazes de representar fenômenos observados em diferentes áreas do conhecimento científico.

Entre os conceitos fundamentais da teoria das probabilidades, destaca-se a probabilidade condicional, utilizada para descrever a ocorrência de um evento sob a hipótese de que outro já tenha ocorrido. Esse conceito ocupa posição central na teoria das probabilidades, pois permite incorporar novas informações ao processo de análise probabilística.

A partir da probabilidade condicional obtém-se o Teorema de Bayes, resultado matemático que estabelece um mecanismo formal para a atualização de probabilidades diante da aquisição de novas evidências. Do ponto de vista matemático, o teorema pode ser expresso por:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

em que P(A|B) representa a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu. O teorema permite revisar probabilidades previamente atribuídas a hipóteses à medida que novas informações são incorporadas ao processo de investigação.

Conforme discutido por Jaynes (2003) e McGrayne (2012), o Teorema de Bayes pode ser interpretado não apenas como uma relação matemática entre probabilidades condicionais, mas também como uma formalização do processo racional de atualização de crenças ou hipóteses diante de novas evidências empíricas. Por exemplo, suponha que um médico considere inicialmente baixa a probabilidade de um paciente possuir determinada doença. Entretanto, após a realização de um exame com resultado positivo, essa probabilidade é atualizada à luz da nova evidência disponível. Nesse contexto, o Teorema de Bayes fornece o mecanismo matemático que permite revisar a probabilidade inicial e obter uma estimativa mais consistente diante das informações observadas.

Essa interpretação conduz à chamada interpretação subjetiva da probabilidade, segundo a qual probabilidades podem ser compreendidas como graus de crença racional atribuídos por um agente a determinado evento ou hipótese. Dessa perspectiva, a probabilidade deixa de ser entendida e passa a desempenhar papel importante em processos de tomada de decisão, inferência estatística e avaliação de hipóteses científicas.

A relevância dessas ideias manifesta-se especialmente em aplicações de engenharia. Em problemas relacionados à segurança estrutural, a atribuição de probabilidades às hipóteses de trabalho permite incorporar incertezas associadas às propriedades mecânicas dos materiais, às condições de carregamento e aos dados experimentais obtidos em inspeções estruturais. Nesse contexto, a análise probabilística de problemas reais evidencia que a inferência bayesiana constitui uma ferramenta importante para a revisão de hipóteses estruturais à luz de novas evidências empíricas, possibilitando a atualização das estimativas de confiabilidade e o aperfeiçoamento dos modelos matemáticos empregados na avaliação da segurança de pontes.

Em particular, os resultados obtidos a partir da análise do projeto desenvolvido por Jacinto (2011) demonstraram que a aplicação da inferência bayesiana na avaliação da segurança de pontes possibilita identificar as variáveis mais relevantes associadas ao risco de colapso estrutural. Neste trabalho foi verificado que o índice de corrosão representava o fator de maior influência na estabilidade da estrutura. Com base nos dados coletados e na aplicação de métodos estatísticos e probabilísticos, concluiu-se que a ponte atendia aos critérios necessários para permanecer estável por mais um ano.

Desse modo, os trabalhos realizados por Jacinto (2011) e os estudos conduzidos pela primeira autora deste trabalho em Fialho e Almeida (2023) endossam que métodos probabilísticos não apenas auxiliam processos decisórios em engenharia civil, mas também fornecem mecanismos matematicamente consistentes para o tratamento racional da incerteza em problemas estruturais complexos.

2.2 Esperança Matemática e Desigualdades Probabilísticas

A análise de fenômenos aleatórios em geral e, em particular do teorema de Bayes, exigem não apenas a atribuição de probabilidades aos eventos de interesse, mas também a investigação de propriedades associadas ao comportamento das variáveis aleatórias que modelam tais fenômenos. Nesse contexto, conceitos como esperança matemática, variância, covariância e teoremas limites desempenham papel central na teoria das probabilidades, permitindo descrever tendências médias, dispersões e regularidades estatísticas observadas em processos aleatórios.

Segundo Ross (2010) e Parzen (1960), a esperança matemática constitui um dos conceitos fundamentais da moderna teoria das probabilidades, permitindo descrever o comportamento médio associado a uma variável aleatória e servindo de base para importantes resultados da estatística matemática. Associado a esse conceito, a variância fornece uma medida da dispersão dos valores observados em torno do valor esperado, possibilitando avaliar o grau de variabilidade presente em um fenômeno aleatório.

Além da esperança e da variância, o estudo das relações entre variáveis aleatórias conduz aos conceitos de covariância e correlação, utilizados para descrever dependências estatísticas entre fenômenos probabilísticos. De acordo com os estudos desenvolvidos, tais conceitos desempenham papel importante na análise conjunta de variáveis aleatórias e na compreensão do comportamento de sistemas probabilísticos mais complexos.

Conforme discutido por Ross (2010) e Parzen (1960), os teoremas limites figuram entre os resultados mais importantes da moderna teoria das probabilidades, uma vez que descrevem propriedades assintóticas associadas ao comportamento de sequências de variáveis aleatórias. Entre esses resultados destacam-se particularmente as leis dos grandes números e o teorema do limite central, responsáveis por estabelecer condições sob as quais médias amostrais convergem para valores esperados e distribuições probabilísticas passam a apresentar comportamento aproximadamente normal.

A Lei dos Grandes Números estabelece que, sob determinadas hipóteses de independência e existência de esperança matemática, médias amostrais associadas a variáveis aleatórias tendem a se aproximar do valor esperado à medida que o número de observações aumenta. Esse resultado possui especial importância conceitual, pois evidencia que regularidades estatísticas podem emergir mesmo em contextos marcados pela aleatoriedade individual dos fenômenos observados.

Entre os resultados investigados ao longo da pesquisa destacou-se particularmente a desigualdade de Chebyshev, resultado probabilístico que permite estimar probabilidades

mesmo quando a distribuição associada ao fenômeno estudado não é conhecida explicitamente. Considerando uma variável aleatória de esperança m e desvio padrão σ, e definindo o intervalo A = [m - hσ, m + hσ], a desigualdade pode ser expressa por:

$$P(X \in A) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

Em que *h* é um número real positivo. Esse resultado estabelece um limite inferior para a probabilidade de que os valores assumidos pela variável aleatória permaneçam em uma vizinhança da média determinada por múltiplos do desvio padrão.

Conforme analisado por Parzen (1960), desigualdades probabilísticas como a desigualdade de Chebyshev desempenham papel fundamental na investigação de propriedades gerais de variáveis aleatórias, especialmente em contextos nos quais a distribuição probabilística associada ao fenômeno não é completamente conhecida. Embora as estimativas obtidas por meio dessa desigualdade sejam menos precisas do que aquelas derivadas de distribuições explicitamente conhecidas, o resultado fornece um mecanismo matematicamente consistente para a análise de incertezas em situações gerais.

A análise probabilística desenvolvida ao longo da pesquisa evidenciou, ainda, que o erro entre as estimativas fornecidas pela desigualdade de Chebyshev e aquelas calculadas a partir de distribuições conhecidas tende a diminuir à medida que o intervalo de observação considerado aumenta. Aplicações envolvendo distribuições uniformes e problemas relacionados ao tempo de espera em sistemas reais permitiram ilustrar concretamente tanto o comportamento dessas estimativas probabilísticas quanto às limitações associadas à ausência de conhecimento explícito da distribuição do fenômeno analisado.

2.3 Teoria da Medida e Fundamentação da Probabilidade

O desenvolvimento rigoroso da teoria das probabilidades exige estruturas matemáticas capazes de formalizar conceitos relacionados à integração, convergência e mensurabilidade. Nesse contexto, a teoria da medida constitui o ambiente matemático no qual se fundamenta a moderna teoria das probabilidades, permitindo generalizar noções clássicas de comprimento, área e volume para conjuntos mais gerais.

Tradicionalmente, o conceito de integral é introduzido por meio da integral de Riemann, definida a partir de partições de intervalos e somas associadas aos valores assumidos por uma função. Segundo os estudos desenvolvidos, essa formulação permite interpretar rigorosamente a área sob o gráfico de funções limitadas e contínuas, desempenhando papel central na análise matemática clássica. Entretanto, a integral de Riemann apresenta limitações

no tratamento de determinadas classes de funções e conjuntos, especialmente em contextos mais gerais da análise moderna e da teoria das probabilidades.

Com o objetivo de superar essas limitações, desenvolveu-se a teoria da medida, responsável por estender a noção de comprimento para conjuntos mais complexos dos números reais. Nesse contexto, foram investigados conceitos relacionados à medida de conjuntos, medida externa e conjuntos mensuráveis. Para um intervalo aberto de números reais com extremos a e b com a < b, por exemplo, a medida desse intervalo é definida por:

$$\mu((a,b)) = b - a$$

Vistos como intervalos degenerados, em que os extremos coincidem, conjuntos com um único elemento possui medida nula, isto é,

$$\mu(\{a\}) = 0$$

A partir dessas primeiras noções, torna-se possível construir uma concepção mais geral de medida, capaz de preservar propriedades fundamentais como monotonicidade e aditividade. Os estudos realizados também envolveram a análise de funções mensuráveis, conceito fundamental para a moderna teoria da integração. Uma função f: E→ R é dita mensurável quando os conjuntos associados aos valores assumidos pela função preservam propriedades de mensurabilidade. Em particular, verificou-se que toda função contínua é mensurável, embora existam funções mensuráveis que não sejam contínuas.

Entre os exemplos clássicos investigados destacou-se o conjunto de Cantor, obtido pela remoção sucessiva do terço central do intervalo [0,1]. A soma dos comprimentos removidos forma uma série geométrica convergente para 1, implicando que o conjunto de Cantor possui medida nula, apesar de conter infinitos pontos e ser não enumerável. Esse resultado evidencia um dos aspectos mais relevantes da teoria da medida: conjuntos infinitos podem possuir medida igual a zero.

A análise desses conceitos permitiu compreender que a moderna teoria das probabilidades depende diretamente de estruturas associadas à teoria da medida e à integração. Conforme discutido por Parzen (1960), a formulação rigorosa da esperança matemática e das variáveis aleatórias exige uma teoria de integração suficientemente geral para tratar funções definidas em espaços abstratos e propriedades relacionadas à convergência de sequências de funções.

A revisão bibliográfica realizada com base nas obras de Kolmogorov (2018), Parzen (1960), Ross (2010) e Lebesgue (1902) evidenciou que medida, mensurabilidade e integração não constituem apenas generalizações abstratas da análise clássica, mas ferramentas fundamentais para a formulação matemática rigorosa da moderna teoria das probabilidades.

Metodologia

A pesquisa possui natureza teórica, conceitual e bibliográfica. O método adotado foi lógico-dedutivo, fundamentado no estudo sistemático de obras de referência em Teoria das Probabilidades, Estatística Matemática, Análise Real e Teoria da Medida.

Foram investigados principalmente os seguintes tópicos: Probabilidade condicional e Teorema de Bayes; Inferência Bayesiana e atualização probabilística; Esperança matemática, variância e momentos; Desigualdades probabilísticas, especialmente a Desigualdade de Chebyshev; Integral de Riemann; Conceitos introdutórios da teoria da medida; Medidas de conjuntos e funções mensuráveis.

O desenvolvimento da investigação ocorreu por meio de: Revisão bibliográfica e leitura orientada; Análise de definições, propriedades e demonstrações matemáticas; Resolução e discussão de exercícios teóricos; Estudo conceitual de aplicações probabilísticas; Reuniões semanais de orientação e acompanhamento da pesquisa.

Inicialmente, buscou-se compreender os fundamentos da inferência probabilística, com ênfase na probabilidade condicional, no Teorema de Bayes e em mecanismos de atualização probabilística à luz de novas evidências. Também foram analisadas aplicações bayesianas em problemas relacionados à avaliação de segurança estrutural de pontes e à análise de confiabilidade em engenharia civil.

Posteriormente, a investigação concentrou-se no estudo das variáveis aleatórias, da esperança matemática, da variância, dos momentos e das desigualdades probabilísticas, particularmente a Desigualdade de Chebyshev. Nesse contexto, foram realizadas análises envolvendo estimativas probabilísticas e comparação entre resultados obtidos por desigualdades gerais e por distribuições explicitamente conhecidas.

Na etapa final da investigação, foram estudados conceitos introdutórios da análise real, teoria da medida e teoria da integração, considerados fundamentais para a formulação rigorosa da moderna teoria das probabilidades. Foram investigados conceitos relacionados à integral de Riemann, partições, somas superiores e inferiores, medida de conjuntos, medida externa, conjuntos mensuráveis e funções mensuráveis, além da análise de exemplos clássicos da teoria da medida, como o conjunto de Cantor.

Por se tratar de uma pesquisa essencialmente teórica, não foram realizados experimentos empíricos. As aplicações discutidas tiveram caráter ilustrativo e conceitual, sendo utilizadas para evidenciar a relevância dos resultados estudados em problemas relacionados à modelagem matemática da incerteza. Dessa forma, a metodologia adotada privilegiou a construção progressiva do conhecimento matemático, partindo de aplicações probabilísticas e avançando em direção aos fundamentos formais da teoria das probabilidades.

Resultados e Discussão

A investigação desenvolvida permitiu compreender que a formulação matemática da incerteza exige não apenas técnicas operacionais de cálculo probabilístico, mas também estruturas conceituais capazes de justificar rigorosamente a atribuição de probabilidades a fenômenos aleatórios. Nesse contexto, o estudo do Teorema de Bayes tornou possível analisar mecanismos formais de atualização probabilística à luz de novas evidências empíricas. A relação:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Mostrou que probabilidades previamente atribuídas a hipóteses podem ser revisadas racionalmente a partir da incorporação de novas informações. A análise desse resultado permitiu compreender que a inferência bayesiana fornece um modelo matematicamente consistente para processos de tomada de decisão em contextos marcados pela incerteza.

As aplicações investigadas em problemas de engenharia estrutural evidenciaram que a atribuição de probabilidades às hipóteses de trabalho permite incorporar incertezas relacionadas às propriedades dos materiais, às condições de carregamento e aos dados experimentais obtidos em inspeções estruturais. Desse modo, a inferência probabilística mostrou-se relevante na revisão de estimativas de confiabilidade estrutural e na análise de risco associada à segurança de pontes existentes.

A tentativa de compreender como as probabilidades podem ser atualizadas racionalmente conduziu naturalmente ao estudo das variáveis aleatórias e de propriedades associadas ao seu comportamento médio e à sua dispersão. Nesse contexto, a esperança matemática:

$$E(X) = \sum x_¡ \; P(X = x_¡)$$

Foi utilizada para descrever o comportamento médio associado a um experimento probabilístico, enquanto a variância:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Permitiu analisar o grau de dispersão dos valores observados em torno da média. A investigação desses conceitos evidenciou que propriedades estatísticas globais podem emergir mesmo em fenômenos marcados pela aleatoriedade individual de cada observação.

Entretanto, em diversos problemas probabilísticos, a distribuição associada ao fenômeno investigado não é conhecida explicitamente. Essa dificuldade motivou o estudo da Desigualdade de Chebyshev. Considerando o intervalo A = [m − hσ, m + hσ], obteve-se:

$$P(X \in A) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

Resultado que permite estabelecer limites probabilísticos utilizando apenas informações relacionadas à esperança matemática e à variância da variável aleatória. A análise de exemplos envolvendo distribuições conhecidas mostrou que as estimativas fornecidas pela desigualdade tendem a apresentar erros relativamente elevados para intervalos pequenos, mas tornam-se progressivamente mais próximas dos valores probabilísticos reais à medida que o intervalo considerado aumenta.

Os estudos relacionados aos teoremas limites permitiram compreender que regularidades estatísticas podem emergir mesmo em contextos marcados pela aleatoriedade dos fenômenos observados. Em particular, a Lei dos Grandes Números mostrou que

$$\frac{X1 + X2 + \ldots + Xn}{n} \rightarrow E(X)$$

Quando o número de observações aumenta. Esse resultado forneceu uma fundamentação matemática para diversos procedimentos estatísticos e inferenciais, evidenciando que médias amostrais tendem a estabilizar-se em torno do valor esperado.

O aprofundamento dessas questões revelou algumas limitações da integral de Riemann no tratamento de funções e conjuntos mais gerais. Essa dificuldade conduziu ao estudo de conceitos introdutórios da teoria da medida, particularmente das noções de medida de conjuntos, medida externa e conjuntos mensuráveis. Nesse contexto, definições como

$$\mu((a, b)) = b - a$$

e

$$\mu(\{a\}) = 0$$

Permitiram compreender como a noção clássica de comprimento pode ser generalizada para conjuntos mais complexos.

A investigação do conjunto de Cantor mostrou que conjuntos infinitos podem possuir medida nula, resultado que evidencia diferenças fundamentais entre cardinalidade e medida. A análise desses conceitos permitiu compreender que a moderna teoria das probabilidades depende diretamente de estruturas matemáticas relacionadas à mensurabilidade e à formulação rigorosa da integração.

De modo geral, os resultados obtidos indicaram que aplicações probabilísticas concretas conduzem naturalmente a questões mais profundas relacionadas à fundamentação matemática da incerteza. A articulação entre inferência probabilística, variáveis aleatórias, desigualdades probabilísticas e teoria da medida evidenciou que a moderna teoria das probabilidades constitui não apenas uma ferramenta aplicada à modelagem de fenômenos aleatórios, mas também um campo matemático rigorosamente estruturado.

Conclusão

A investigação desenvolvida permitiu compreender que a Teoria das Probabilidades constitui um campo matemático cuja relevância ultrapassa a simples atribuição numérica de probabilidades a eventos aleatórios. Os estudos realizados evidenciaram que a análise da incerteza envolve questões relacionadas à atualização probabilística de hipóteses, ao comportamento de variáveis aleatórias e à própria fundamentação matemática da noção de probabilidade.

O estudo do Teorema de Bayes mostrou que probabilidades podem ser revisadas à luz de novas evidências, fornecendo bases matemáticas para inferência e tomada de decisão. As aplicações em engenharia estrutural evidenciaram sua importância na análise de confiabilidade e avaliação de riscos. O aprofundamento dessas questões conduziu naturalmente ao estudo das variáveis aleatórias, da esperança matemática, da variância e das desigualdades probabilísticas, permitindo compreender propriedades fundamentais associadas ao comportamento de fenômenos aleatórios. Em particular, a Desigualdade de Chebyshev mostrou que é possível obter estimativas probabilísticas gerais mesmo sem conhecimento explícito da distribuição associada ao fenômeno investigado.

Além disso, a investigação revelou algumas limitações das ferramentas clássicas da análise matemática, especialmente da integral de Riemann, conduzindo ao estudo da teoria da medida e de conceitos relacionados à mensurabilidade e à integração. A análise desses resultados evidenciou que a moderna teoria das probabilidades depende de estruturas matemáticas mais gerais para sua formulação rigorosa.

Desse modo, os objetivos propostos foram alcançados, permitindo investigar aplicações probabilísticas e conceitos fundamentais da moderna teoria das probabilidades. Os resultados mostraram que aplicações concretas da probabilidade a problemas matemáticos mais profundos, articulando inferência probabilística, variáveis aleatórias e teoria da medida em uma estrutura unificada. Por fim, o estudo evidenciou que a compreensão rigorosa da incerteza requer a ampliação progressiva das ferramentas matemáticas empregadas na análise de fenômenos aleatórios, reafirmando a relevância da Teoria das Probabilidades para aplicações científicas e para a pesquisa matemática contemporânea.

Referências Bibliográficas:

FIALHO, Luciana de Sousa; ALMEIDA, Edgar Luis Bezerra de. Teorema de Bayes: análise conceitual e aplicações. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO DISTRITO FEDERAL (CICDF), 20., 2023, Brasília. **Anais do Congresso de Iniciação Científica do Distrito Federal**. Brasília: FAPDF, 2023.

JACINTO, Luís A. C. **Avaliação da Segurança de Pontes Existentes**: abordagem probabilística Bayesiana. 2011. 294 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2011.

JAYNES, Edwin T. **Probability Theory**: the logic of science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

KOLMOGOROV, Andrey N. **Foundations of the Theory of Probability**. Mineola: Dover Publications, 2018.

LEBESGUE, Henri. Intégrale, longueur, aire. **Annali di Matematica Pura et Applicata**, Milano, v. 7, p. 231-359, 1902.

MCGRAYNE, Sharon Bertsch. **The Theory That Would Not Die**: how Bayes' rule cracked the Enigma Code, hunted down Russian submarines, and emerged triumphant from two centuries of controversy. New Haven: Yale University Press, 2012.

PARZEN, Emanuel. **Modern Probability Theory and Its Applications**. New York: Wiley, 1960.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade**: um curso moderno, com aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2010.