UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – CAA
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE – NFD CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

SOBRE A ESTABILIDADE DE UM CUBO SOBRE UM CILINDRO HORIZONTAL

Augusto de Oliveira Lira[1] augusto.aol@ufpe.br
[1]Universidade Federal de Pernambuco - UFPE/CAA/NFD
Orientador:
Paulo Henrique Ribeiro Peixoto[1] paulo.peixoto@ufpe.br
[1]Universidade Federal de Pernambuco - UFPE/CAA/NFD

RESUMO
Este trabalho tem como objetivo discutir um problema de mecânica aparentemente simples, mas cuja resolução tradicional se revela incompleta após uma análise mais atenta. O problema consiste em determinar a condição para que esteja em equilíbrio estável o sistema composto por um cubo posicionado sobre um cilindro na horizontal. No início do trabalho, investigamos a resolução em um livro didático de física para o ensino superior, que utiliza um gráfico de energia potencial. Em seguida, resolvemos a partir de outra abordagem, envolvendo torque, que revela um resultado diferente. Dessa forma, foi necessária uma revisão com o objetivo de justificar essa diferença e encontrar uma resposta definitiva. Os resultados indicam que, por causa de uma sutileza, a questão não havia sido resolvida de modo totalmente satisfatório. Conclui-se que o sistema pode ser descrito de maneira mais interessante a partir de um novo parâmetro, evidenciando que alguns detalhes, mesmo em questões simples, podem alterar significativamente os resultados.
Palavras-chave: mecânica; equilíbrio estável; energia potencial; torque.

1 INTRODUÇÃO

O estudo do equilíbrio é, na mecânica clássica, importante para descrever o comportamento de sistemas sujeitos a forças externas e determinar sua estabilidade. Classifica-se o equilíbrio de um corpo como *estável* quando ele tende a retornar à posição original após ser movido de algum modo.

Neste trabalho, será discutido um problema de equilíbrio presente em livros didáticos de física para o ensino superior. Considere a seguinte situação: um tubo cilíndrico é mantido sobre um plano, com seu eixo em uma direção horizontal, e sobre ele é equilibrado um bloco cúbico homogêneo, livre para girar sem deslizar, conforme ilustra a Figura 1. É bastante intuitivo que, se o lado do cubo for muito maior do que o diâmetro do cilindro, sua base de apoio será muito pequena e o sistema será instável. No

extremo oposto, quando o diâmetro do cilindro é grande em relação ao lado do cubo, é fácil imaginar que ele não cairá com um pequeno distúrbio, e o equilíbrio é estável. Neste último caso, podemos, por exemplo, trivialmente imaginar um pequeno dado de jogos sobre uma roda de carro. Dessa forma, o objetivo é determinar uma relação entre as dimensões dos objetos para que esse equilíbrio seja estável.

Veremos que há duas formas principais de resolver esse problema: por meio de uma análise do gráfico da energia potencial do cubo (TAYLOR, 2013), enquanto gira sobre o cilindro, ou através de uma investigação do torque resultante em relação ao centro de massa do cubo (TIPLER e MOSCA, 2009).

Porém, a discussão surge a partir de uma observação sobre a conclusão apresentada pela bibliografia para este problema, em que um detalhe é ignorado, levando a uma relação incompleta para determinar o equilíbrio. Diante disso, o objetivo é apresentar uma solução mais completa para o problema e analisá-lo sem negligenciar essa sutileza.

2 O PROBLEMA EM DETALHES

Inicialmente, é possível notar que o sistema é unidimensional, pois pode ser representado a partir de uma única variável (TAYLOR, 2013), que é o ângulo θ (veja a Figura 2).

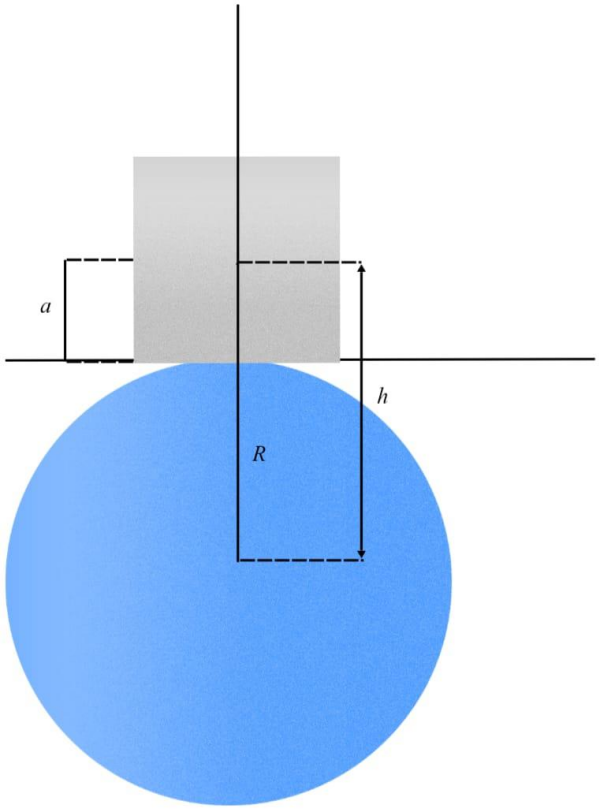


Figura 1: Cubo equilibrado sobre um cilindro horizontal

Na Figura 1, o lado do cubo tem comprimento 2a, e h é a altura do seu centro de massa em relação ao eixo do cilindro, cujo raio é R. À medida que deslocamos o cubo, que não desliza, a posição do ponto de contato entre os dois objetos descreve uma trajetória circular ao longo da superfície do cilindro, conforme a Figura 2.

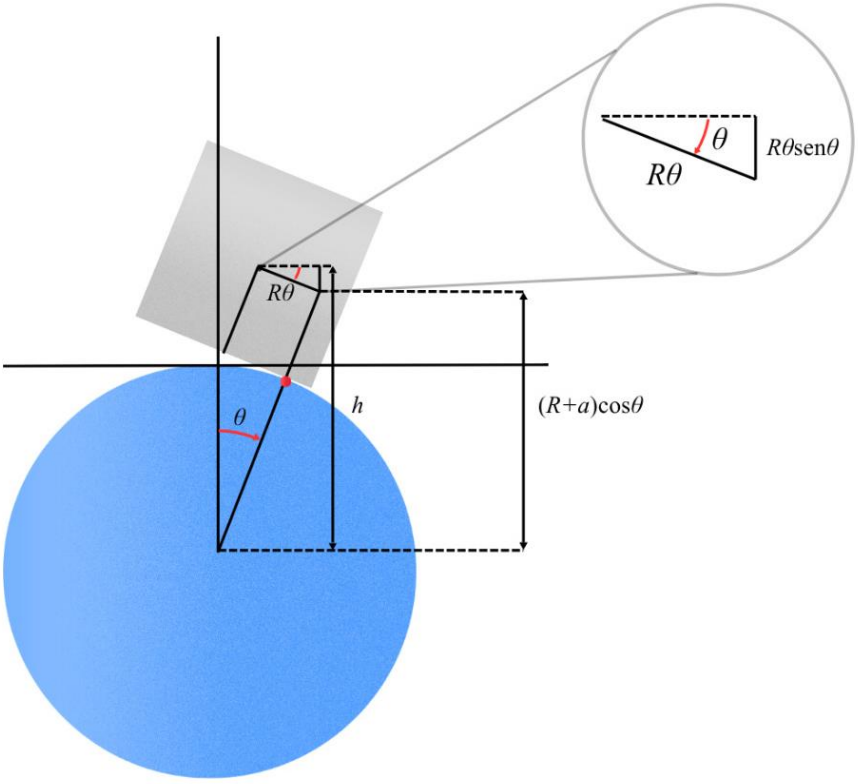


Figura 2: Deslocando o cubo por um ângulo θ

Primeiramente, é possível expressar h em função do ângulo θ:

$$h = (R + a)cos\theta + R\theta sen\theta. \quad (1)$$

É interessante notar que o comprimento $R\theta$ na imagem tem esse valor porque é igual à porção do lado do bloco que rolou sobre o cilindro sem deslizar.

Agora, é possível determinar a energia potencial em função de θ a partir da equação

$$U(\theta) = Mgh. \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$U(\theta) = Mg[(R + a)\cos\theta + R\theta\,\mathrm{sen}\theta]. \quad (3)$$

Para encontrar as posições de equilíbrio, devem ser encontrados os valores de θ para os quais $\frac{dU(\theta)}{d\theta} = 0$ (TAYLOR, 2013), igualdade que resulta em

$$Mg(R\theta\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\theta) = 0. \quad (4)$$

Claramente, $\theta = 0$ é uma solução, como esperado. Agora, para determinar se o equilíbrio é estável, devemos examinar o sinal da derivada segunda,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} = Mg(R - \mathrm{a})$$

Logo, temos $\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0$ para

$$a < R. \quad (5)$$

Dessa forma, se $a < R$, o ponto de partida é um mínimo no gráfico de energia potencial, e o equilíbrio é estável. Tudo bem, isso está correto. Analisemos, por exemplo, o gráfico de $U(\theta)$ para a/R = 0.5, conforme ilustra a Figura 3.

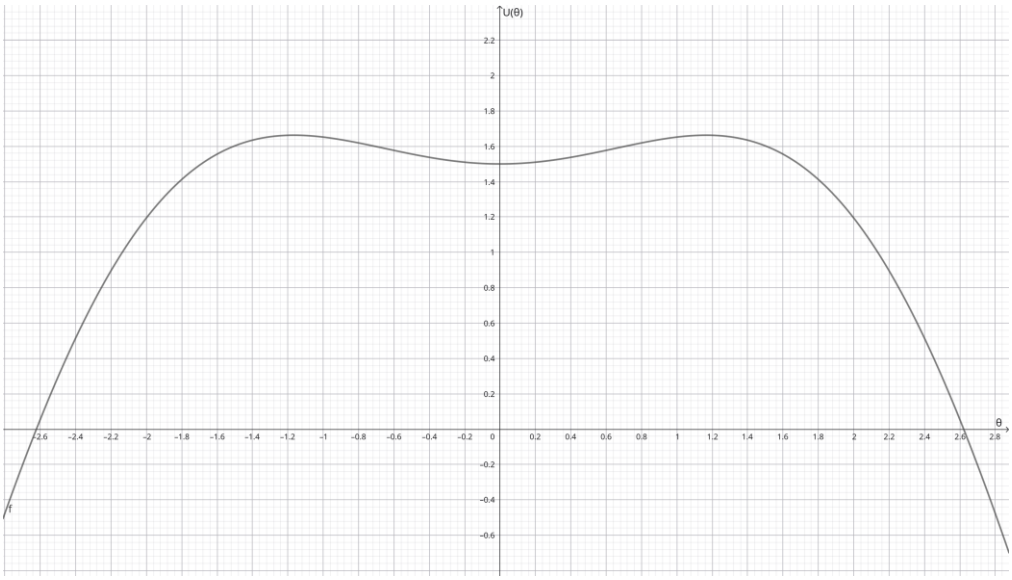


Figura 3: Gráfico da energia potencial do cubo como função de θ

Essa é a resposta para o problema, conforme as obras de referência. Aparentemente está tudo bem, certo? Façamos agora o exercício de resolver a questão a partir da seguinte ideia: se o centro do bloco estiver à esquerda do ponto de contato, haverá um torque restaurador, e o equilíbrio do sistema será estável (veja a Figura 4)

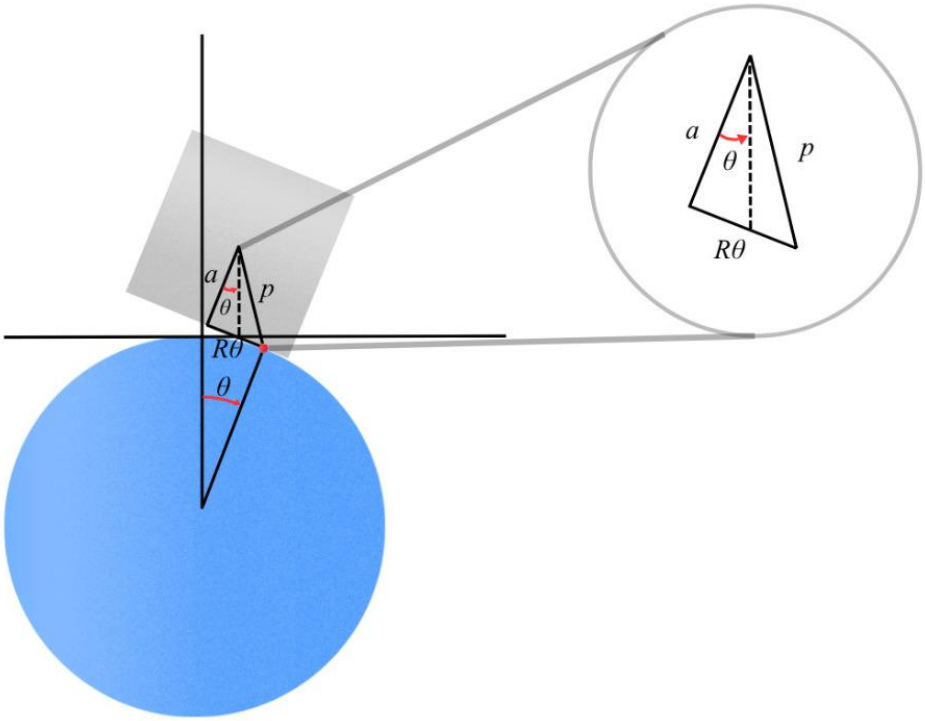


Figura 4: Cubo girando sobre o cilindro por um ângulo θ

No limite da estabilidade, o centro do cubo estará acima do ponto de contato, e a linha tracejada será o lado p do triângulo retângulo destacado na Figuta 4. Nesse caso, os lados a e $R\theta$ serão os catetos deste triângulo, e o lado p a hipotenusa. Com base na trigonometria desse triângulo, temos:

$$R\theta = a\,tg\theta, \tag{6}$$

$$a^2 + (R\theta)^2 = p^2. \tag{7}$$

Reunindo (6) e (7) e levando em conta que deseja-se a condição de equilíbrio, temos:

$$a^2 + (a\,tg\theta)^2 < p^2. \tag{8}$$

Ou seja, a linha vertical forma um ângulo θ com o lado a, e seu comprimento equivale ao lado esquerdo de (8). Enquanto este comprimento for menor do p, que liga o centro do cubo ao ponto de contato no cilindro, o equilíbrio será estável. Note que não há problema em substituir (7) no lado direito de (8). Então, temos:

$$a^2 + (a\,tg\theta)^2 < a^2 + (R\theta)^2 \rightarrow$$

$$a^2(1 + tg\theta)^2 < a^2 + (R\theta)^2 \rightarrow$$

$$1 + tg^2\theta < 1 + \left(\frac{R\theta}{a}\right)^2 \rightarrow$$

$$tg\theta < \frac{R\theta}{a}. \qquad (9)$$

Estranhamente, a relação (9) é um pouco diferente da relação (5). Será que fizemos algo errado? Se voltarmos à relação (5) e refletirmos bem, será possível perceber que ela nos responde apenas se o ponto é mínimo ou máximo. Mas o gráfico de energia potencial, no primeiro caso, não cresce para sempre; eventualmente chega a um ponto máximo. Então, vamos encontrar uma equação para os pontos de máximo, ou seja, a primeira solução não trivial para $\frac{dU(\theta)}{d\theta} = 0$, e determinar até onde o gráfico é crescente. Temos:

$$\frac{dU}{d\theta} = Mg(R\theta\,cos\theta - a\,sen\theta) = 0 \rightarrow$$

$$R\theta\,cos\theta = a\,sen\theta \rightarrow$$

$$tg\theta = \frac{R\theta}{a}. \qquad (10)$$

Seja θ^* a solução da equação (10), na faixa $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Na Figura 3, θ^* é aproximadamente 1,2. Quando o equilíbrio é estável, $U(0)$ é um ponto de mínimo, e $U(\theta)$, como na Figura, 3 é crescente até θ^*. Ou seja, devemos ter $\theta < \theta^*$, para que o equilíbrio seja estável, assim,

$$\frac{dU}{d\theta} > 0 \rightarrow$$

$$tg\theta < \frac{R\theta}{a}. \qquad (11)$$

3 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Finalmente, obtivemos a mesma relação através das duas abordagens. O ângulo θ não é tão fácil de ser visualizado na prática. Mas perceba que o termo direito da relação (11) corresponde à razão entre a porção do cubo que rolou sobre o cilindro e o comprimento a. Podemos tomar essa razão, mais fácil de ser observada, como novo parâmetro, definido como Z. Na primeira figura, por exemplo, Z é 0. Na segunda, em torno de 0,7. Assim, a partir da relação de equilíbrio é possível determinar, para cada razão entre as dimensões dos objetos, até onde ele irá girar, com o parâmetro indo de 0 (início) quando o equilíbrio for instável, até 1 (vértice do cubo).

Este exercício revela a importância de brincar com problemas de física, mesmo os já resolvidos. Explorando outras abordagens e refletindo sobre cada etapa, algumas vezes podemos até ir além do que já está estabelecido.

REFERÊNCIAS

TAYLOR, John R. Mecânica Clássica. Porto Alegre: Bookman, 2013.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. Física para Cientistas e Engenheiros. Rio de Janeiro: LTC, 2009