

# ANÁLISE DE FERMENTAÇÃO DE BACTÉRIAS EM BIODIGESTORES POR MEIO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Weverton Gonçalves Ewald<sup>1</sup>, Fabiana Maria Ferreira<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Alegre, Brasil (weverton.ewald@edu.ufes.br)

<sup>2</sup>Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Alegre, Brasil

**Resumo:** Em busca de meios sustentáveis e renováveis para a obtenção de energia, surge a produção biogás por meio de biodigestores, os quais operam a partir da fermentação de materiais orgânicos, que podem ter diversificadas origens. Neste trabalho, apresenta-se o comportamento dinâmico que ocorre dentro de um biodigestor, permitindo mensurar a quantidade de biogás produzida e a concentração de bactérias presentes no sistema, por meio da análise de equações diferenciais não lineares.

**Palavras-chave:** Biodigestores; Hartman-Grobman; Sistemas não Lineares.

## 1 INTRODUÇÃO

A fermentação de matéria orgânica é um processo bioquímico conhecido por promover a proliferação de microrganismos, sobretudo bactérias, que atuam como agentes decompositores. Durante essa atividade metabólica, um dos subprodutos gerados é o biogás, reconhecido como uma fonte energética renovável e promissora. No entanto, em um aparente paradoxo, a própria produção e acúmulo desse biogás no meio de fermentação pode exercer um efeito letal sobre as populações bacterianas que o originaram.

Semelhantemente, é crucial compreender que a proliferação bacteriana dentro de um biodigestor ocorre em um sistema físico limitado. Esse ambiente confinado impõe um volume máximo que o biogás pode ocupar, estabelecendo, portanto, um limite teórico para a quantidade específica do gás que pode ser produzida. Para modelar matematicamente essa interação dinâmica entre a população de bactérias e a acumulação de biogás ao longo do tempo, recorre-se a sistemas de equações diferenciais. Um modelo representativo desse comportamento é expresso pelo sistema de equações diferenciais dada em 1, adaptada da obra de [Bassanezi e Jr. 1988], que descreve a taxa de variação

das variáveis de estado do sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - h(y, t). \end{cases} \quad (1)$$

Tal sistema modela o funcionamento de biodigestores, focando na interação entre bactérias e biogás, a fim de otimizar o seu funcionamento. Considere as seguintes variáveis e parâmetros:

- $x = x(t)$ : Quantidade de bactérias que produzem biogás;
- $y = y(t)$ : Quantidade de biogás produzida;
- $p$ : Constante positiva e fator de impedimento da proliferação das bactérias;
- $k$ : Constante positiva que descreve a produção de biogás em função da quantidade de bactérias;
- $h(y, t)$ : Função que descreve a retirada de biogás durante o processo de fermentação;
- $t$ : Tempo;
- $F(x)$ : Função que descreve a proliferação de bactérias.

Diante desse modelo, é possível analisar com precisão a função  $h(y, t)$ , a qual descreve o cerne do funcionamento dinâmico das reações microbianas dentro do reator. Esta função, que mapeia a taxa de produção ou conversão dos substratos, pode ser analisada sob duas condições operacionais distintas:

- Caso 1: Sistema sem retirada de biogás, em que o gás se acumula livremente até atingir um equilíbrio ou saturação, também chamado de processo em batelada [Fogler 2016], influenciando diretamente a atividade microbiana, como previamente discutido.
- Caso 2: Sistema com retirada contínua ou controlada de biogás. Esta condição, de maior aplicabilidade prática, permite operar o biodigestor em regimes otimizados. Neste cenário, é particularmente relevante o estudo de estratégias de retirada, que podem ser modeladas mediante a aplicação de diferentes porcentagens de remoção de forma gradativa ao longo do tempo, visando maximizar a produção sem comprometer a estabilidade da população bacteriana.

Diante disso, ambos os cenários foram estudados inicialmente para avaliar a viabilidade e a eficiência do sistema. Após análises comparativas, constatou-se que o Caso 2, que prevê a retirada ativa do biogás, proporciona um funcionamento significativamente superior do biodigestor. Esta conclusão baseia-se na capacidade dessa operação de mitigar a inibição bacteriana causada pelo acúmulo excessivo do produto final [Gerardi 2003], mantendo assim as condições metabólicas mais favoráveis no meio.

Portanto, o foco da investigação aprofunda-se na análise desse cenário mais vantajoso, especificamente no regime de retirada parcial do biogás durante o processo de fermentação. Este modelo operacional busca um equilíbrio crítico: remover uma parcela do gás de forma contínua ou periódica para estimular a produção bacteriana, sem, no entanto, comprometer a pressão interna necessária para a dinâmica do reator ou a estabilidade do próprio consórcio microbiano [Tanaka 2022]. O estudo desse equilíbrio é fundamental para a maximização do rendimento global do sistema.

Desse modo, ao longo do presente trabalho, será realizada uma análise detalhada da dinâmica populacional no interior do biorreator, bem como dos efeitos associados ao seu comportamento. Essa abordagem permitirá otimizar e validar modelos de projeção de biodigestores, considerando a finalidade específica a que se destina.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

Com o propósito de aprofundar a compreensão do comportamento dinâmico do biodigestor, direciona-se a atenção ao Caso 2, no qual se admite a retirada contínua de biogás ao longo do tempo. Nesse cenário, torna-se essencial analisar como tal mecanismo de extração influencia a evolução das variáveis do sistema, especialmente a quantidade de bactérias e o volume de gás acumulado, o que é formalmente representado pelo sistema de equação diferencial apresentado a seguir.

A colheita do gás produzido por um biodigestor pode ser efetuada de vários modos, o que é traduzido pela função  $h(y, t)$  do Sistema (2). Observe o caso em que a retirada é proporcional à quantidade existente, ou seja, isto é,  $h(y, t) = \beta y$ , onde  $\beta$  é a taxa de colheita. O sistema de equações para  $F(x) = \alpha x$  é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - \beta y, \end{cases} \quad (x > 0) \quad (2)$$

sendo  $\alpha, p, k, \beta$  constantes positivas, com significados anteriormente explícitos.

O sistema (2) é classificado como um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não lineares. Para o seu tratamento analítico, procede-se à linearização do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio, o qual de um sistema dinâmico é um ponto do espaço de estados no qual as derivadas temporais se anulam, de modo que a dinâmica permanece constante ao longo do tempo, conforme o [Hirsch 2013], de modo a expressá-lo em uma forma canônica apropriada para o estudo subsequente.

No Caso 2, a análise da estabilidade do sistema não linear foi conduzida empregando o Teorema de Hartman–Grobman, tomando como referência a matriz Jacobiana associada ao modelo e sua estrutura linearizada. Essa abordagem permite comparar diretamente o comportamento local do sistema original com sua aproximação linear. Restringindo para a dimensão dois, ou no plano, estabelece que a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $X_0 = (x_0, y_0)$  e o retrato de fase de um sistema não-linear, localmente em torno de  $X_0$ , podem ser determinados através da linearização do sistema em torno desse ponto de equilíbrio.

As condições sob as quais o Teorema de Hartman–Grobman se aplica são:

1. O determinante da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio  $X_0$  deve ser diferente de zero:

$$\det(A) = \det(J(X_0)) \neq 0$$

2. Cada autovalor da matriz  $A = J(X_0)$  deve possuir parte real não nula.

Se essas condições são satisfeitas, então o retrato de fase do sistema não-linear, localmente em torno de  $X_0$ , é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema linearizado em  $X_0$ , dado por

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (3)$$

onde:

$$\begin{aligned} a &= f_x(x_0, y_0), & b &= f_y(x_0, y_0), \\ c &= g_x(x_0, y_0), & d &= g_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Em notação vetorial, o sistema linearizado é dado por,

$$X_0 = AX,$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana do sistema calculada no ponto  $(x_0, y_0)$ , dada por:

$$A = J(X_0) = J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

No Caso 1 (sem retirada de biogás), não foi possível prosseguir com este mesmo método de linearização, pois a análise dos autovalores do sistema linearizado resultou em pelo menos um autovalor nulo, violando a segunda condição do Teorema.

Para o Caso 2 em análise, procede-se à linearização do sistema, em conformidade com o Teorema de Hartman–Grobman mencionado anteriormente. Diante disso, obtém-se o seguinte estudo de caso.

A partir (2), determinam-se as isóclinas, ou seja, busca-se encontrar os pontos de equilíbrio. Com isso, observa-se a matriz Jacobiana  $A$  correspondente ao sistema linearizado em torno do ponto  $X_0 = (x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} A = J(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x - pxy) & \frac{\partial}{\partial y}(\alpha x - pxy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(kx - \beta y) & \frac{\partial}{\partial y}(kx - \beta y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha - py_0 & -px_0 \\ k & -\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  será determinada pela análise dos autovalores desta matriz Jacobiana, desde que as condições do Teorema de Hartman–Grobman sejam satisfeitas.

Dessa forma, obtém-se os seguintes pontos de equilíbrio:  $(0, 0)$  e  $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$ .

Analisando de forma individual, assume os valores do ponto de equilíbrio na matriz Jacobiana para identificar o comportamento dinâmico nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio encontrados. Perante isso, inicia-se com o primeiro valor de ponto de equilíbrio encontrado, sendo o  $(0, 0)$ :

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ k & -\beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

posteriormente, com o objetivo de determinar os distintos autovalores associados à matriz (4), os quais são obtidos por meio de  $\det(J(0, 0) - \lambda Id) = 0$ , dessa forma os autovalores do polinômio característico associado são  $\lambda_1 = \alpha$  e  $\lambda_2 = -\beta$  e, portanto, o ponto  $(0, 0)$  é um *ponto de sela*, conforme o [Boyce e DiPrima 2018], sendo a trajetória  $x = 0$  ( $y > 0$ ) a que converge para  $(0, 0)$ . Em tal problema, esta trajetória não está definida, uma vez que  $x > 0$  para todo  $t$ .

Mediante isso, analisa-se a natureza do ponto  $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$ . De forma análoga ao procedimento anteriormente adotado, reorganiza-se o sistema para obtenção da nova matriz Jacobiana, a qual assume a forma:

$$J\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right) = \begin{bmatrix} \alpha - \frac{p\alpha}{p} & -p\frac{\alpha\beta}{kp} \\ k & -\beta \end{bmatrix}.$$

Logo, as raízes da equação característica do sistema linearizado correspondente são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$  é assintoticamente estável; mais precisamente, trata-se de um *nó estável* quando  $\beta \geq 4\alpha$  (autovalores reais e negativos) e de uma *espiral estável* quando  $\beta < 4\alpha$  (autovalores complexos conjugados com parte real negativa) [Boyce e DiPrima 2018].

Percebe-se que a dinâmica do biodigestor pode variar conforme os valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . No caso em que  $\beta < 4\alpha$ , procede-se da seguinte forma. Inicialmente, obtém-se o sistema linearizado pelo Teorema de Hartman–Grobman:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\alpha\beta}{k} y \\ y' = kx - \beta y. \end{cases} \quad (5)$$

Note que a dinâmica do sistema é em forma de espiral, uma vez que os autovalores da matriz associada são complexos. Porconsequinte, busca-se escrever  $y$  em função de  $x$ , tal procedimento, que consiste na transfor-



mação para coordenadas polares para a análise da trajetória em torno do ponto de equilíbrio, pode ser encontrado na página 340 de [Bassanezi e Jr. 1988]. Sendo fundamental para a análise computacional.

Considere o sistema autônomo,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = -bx + ay, \end{cases}$$

posteriormente, ao realizar a linearização do sistema, o qual resulta em raízes do polinômio característico, sendo:

$$\lambda_1 = a + bi \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a - bi.$$

Quando  $a = 0$  as curvas se reduzem a círculos concêntricos na origem. Neste caso, o ponto crítico é estável.

As isóclinas  $y = -\frac{a}{b}x$  e  $y = \frac{b}{a}x$  interceptam as espirais ortogonalmente, facilitando o seu traçado.

Realizando o procedimento para o sistema (5). As raízes do polinômio característico são:

$$\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

De forma que os valores de  $a$  e  $b$  são, respectivamente:

$$a = \frac{-\beta}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\beta)}}{2},$$

resolve-se, então, o valor do raio da circunferência.

$$\frac{a}{b} = \frac{-2\beta}{2\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\beta)}}.$$

Portanto, o valor de  $r$  será:

$$r = r_0 e^{\frac{\beta\theta}{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\beta)}}}$$

Esses vetores permitem a construção de duas soluções reais linearmente independentes do sistema linearizado, dadas por

$$X_1(t) = e^{at}(u \cos(bt) - v \sin(bt)),$$

$$X_2(t) = e^{at}(u \sin(bt) + v \cos(bt)),$$

as quais descrevem uma dinâmica do tipo espiral amortecida no plano de fase.

A solução geral do sistema linearizado na vizinhança do ponto de equilíbrio, no caso em que os autovalores são complexos conjugados, é obtida como uma combinação linear das duas soluções reais linearmente independentes previamente determinadas. As-

sim, pode-se escrever

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais determinadas pelas condições iniciais do sistema.

Substituindo as expressões explícitas de  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , obtém-se

$$X(t) = C_1 e^{at} \begin{pmatrix} \frac{a}{k} \cos(bt) + \frac{b}{k} \sin(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix} + C_2 e^{at} \begin{pmatrix} \frac{a}{k} \sin(bt) - \frac{b}{k} \cos(bt) \\ \sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Colocando o fator comum  $e^{at}$  em evidência, a solução geral assume a forma

$$X(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \frac{a}{k} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) \\ + \frac{b}{k} (C_1 \sin(bt) - C_2 \cos(bt)) \\ C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Portanto, as soluções explícitas para as variáveis de estado do sistema são dadas por

$$x(t) = \frac{e^{at}}{k} \left[ a(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) + b(C_1 \sin(bt) - C_2 \cos(bt)) \right]$$

$$y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)).$$

Essas expressões descrevem uma dinâmica oscilatória amortecida, caracterizando um ponto de equilíbrio do tipo espiral assintoticamente estável, uma vez que  $a < 0$ .

Para identificar o sentido de rotação da espiral, faz-se necessário o cálculo  $w$  [Rosa 2015]. Visto que, ao fazer a mudança de base, pode alterar o sentido e as circunferências em elipses, alterando a forma das trajetórias. O sentido não depende só do sinal de  $\beta$ , pois a mudança de base pode incluir reflexão, invertendo a rotação. Devido a isso, faz-se necessária a análise de sentido de rotação,

$$Aw = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha\beta}{k} \\ k & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\beta}{k}y \\ kx - \beta y \end{bmatrix}$$

$$w^\perp = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

O produto escalar é dado por:



$$Aw \cdot w^\perp = \left( -\frac{\alpha\beta}{k}y \right) (-y) + (kx - \beta y)(x)$$

$$Aw \cdot w^\perp = \frac{\alpha\beta}{k}y^2 + kx^2 - \beta xy$$

Para saber o sentido em que a espiral estará se deslocando, observa-se o valor referente ao resultado do produto escalar, sendo um valor positivo, se locomove com rotação anti-horário, se for negativo, a rotação é horária e se o produto resultar em valor igual a 0, afirma-se que  $w$  é um autovetor.

Outrora, no caso em que  $\beta \geq 4\alpha$ , o tratamento do problema é distinto daquele apresentado anteriormente. Nessa situação, procede-se à linearização do sistema de equações, utilizando a noção de autovalores e autovetores da matriz associada para determinar a solução geral do sistema. Em seguida, segue o processo de translação do plano, a fim de se obter a solução completa no espaço original das variáveis. Esse procedimento permite uma análise mais precisa do comportamento dinâmico.

Para o sistema linear de primeira ordem analisado, pode-se escrever o modelo na forma matricial

$$X(t) = A X(t)$$

onde  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  representa o vetor de estados e  $A$  é a matriz de coeficientes do sistema.

A solução geral de um sistema linear homogêneo é dada no [Boyce e DiPrima 2018], sendo,

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad (6)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A$ , e  $v_1$  e  $v_2$  os autovetores associados, os quais são responsáveis por transladar os eixos, demonstrando na forma não homogênea em relação a canônica.

No caso em estudo, os autovalores já são conhecidos:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\beta.$$

Substituindo esses valores na Equação (6), obtemos a solução explícita:

$$X(t) = C_1 e^{\alpha t} v_1 + C_2 e^{-\beta t} v_2.$$

A partir da análise da razão entre as equações diferenciais, obtém-se a relação direta entre as variáveis,

$$y = k x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

como indicado nos cálculos apresentados.

No caso particular analisado, substituindo-se,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

resulta em,

$$y = k C_1 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

sabendo que  $k = \frac{C_2}{C_1}$ , confirmando a coerência da relação encontrada. A expressão final destacada nos cálculos

$$y = C_2 e^{\lambda_2 t},$$

é compatível com a solução geral do sistema.

Para solucionar completamente o sistema, é necessário conhecer as condições iniciais,

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

a partir delas, substituem-se os valores na solução geral do sistema linearizado, permitindo a obtenção das constantes de integração e, conseqüentemente, a descrição explícita das trajetórias no tempo.

Observa-se que o resultado obtido encontra-se expresso na forma canônica. Entretanto, para uma análise mais fiel do comportamento do sistema, torna-se necessário considerá-lo sob uma perspectiva realista. Dessa forma, faz-se necessária a translação dos eixos de coordenadas, procedimento que pode ser realizado conforme o método apresentado em [Boyce e DiPrima 2018].

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

De acordo com [Oliveira et al. 2024], apresenta-se abaixo a tabela com valores experimentais,

| Parâmetro | Valor | Unidade             | Referência         |
|-----------|-------|---------------------|--------------------|
| $\alpha$  | 0.1   | $dia^{-1}$          | [Neba et al. 2020] |
| $\beta$   | 0.1   | $dia^{-1}$          | [Silva 2024]       |
| $k$       | 0.1   | $dia^{-1}$          | [Silva 2024]       |
| $p$       | 0.003 | $gL^{-1}$           | [Neba et al. 2020] |
| $x_0$     | 0.03  | $gL^{-1}$           | [Neba et al. 2020] |
| $y_0$     | 0     | $10^{-3} LgSV^{-1}$ | [Silva 2024]       |

Com os valores descritos acima, pode-se substituir os seus respectivos locais para o caso  $\beta < 4\alpha$ , gerando assim uma solução ideal para a dinâmica interacional entre bactérias e biogás.

Os gráficos apresentados a seguir foram gerados com o auxílio de ferramentas computacionais em *Python*, utilizando a função `solve_ivp`, a qual emprega métodos numéricos baseados em Runge-Kutta de quarta ordem para a resolução do sistema de equações diferenciais.

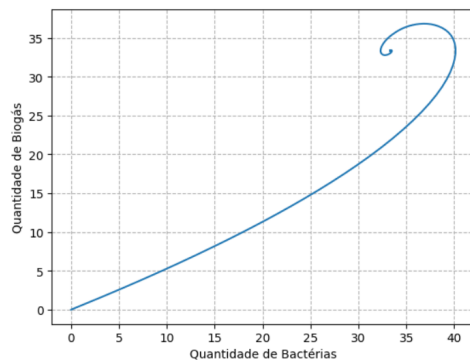


Figura 1 Gráfico do Sistema Não Linear.

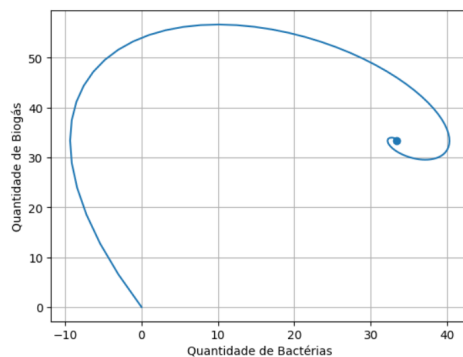


Figura 2 Gráfico do Sistema Linear.

Ao substituir os parâmetros descritos na Tabela 1 no sistema modelado, observa-se o comportamento dinâmico correspondente, conforme ilustrado no gráfico. Nota-se que as trajetórias no plano de fase convergem para o ponto de equilíbrio, caracterizando um regime assintoticamente estável [Boyce e DiPrima 2018] sob as condições consideradas.

A comparação entre as soluções do sistema linearizado e do sistema não linear revelou que, nas proximidades do ponto de equilíbrio, ambos os sistemas apresentam comportamentos semelhantes. Esta concordância valida a aplicação do Teorema de Hartman-Grobman, uma vez que as condições do teorema são satisfeitas (autovalores com parte real não nula). Para regiões mais afastadas do ponto de equilíbrio, no entanto, o sistema linearizado pode apresentar desvios em relação ao sistema original, o que reforça a importância da análise não linear para uma descrição mais fiel da dinâmica do biodigestor.

Observou-se que, para os parâmetros adotados, as trajetórias permanecem no primeiro quadrante, o que é fisicamente coerente, uma vez que tanto a quantidade de bactérias quanto a de biogás são grandezas essencialmente não negativas, confirmando a viabilidade biológica do modelo.

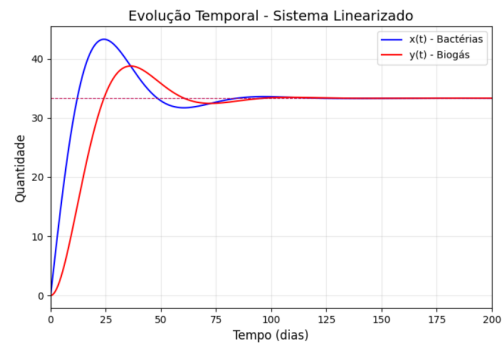


Figura 3 Evolução Temporal

Adicionalmente, a análise dos gráficos permite identificar o período de saturação do sistema em função do tempo. Observa-se que, após uma fase inicial, o sistema converge para um regime estacionário, no qual as variáveis de interesse tendem a valores constantes. Esse comportamento caracteriza a estabilização da dinâmica do biodigestor e fornece uma estimativa do tempo necessário para a operação em condições estáveis.

## 4 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, evidenciou-se a importância de analisar, inicialmente, o comportamento dos microrganismos ao serem inseridos em um biodigestor para a realização do processo de fermentação. A partir da resolução do sistema linearizado e de sua interpretação no plano de fase, foi possível tornar a dinâmica do modelo mais palpável, permitindo compreender o comportamento do biorreator ao longo do tempo [?] [Monteiro 2011].

Nesse contexto, a análise desenvolvida possibilita estimar o tempo necessário para que o sistema atinja o regime estacionário, bem como identificar as condições sob as quais a produção de biogás se estabiliza e a população bacteriana atinge níveis de saturação, evitando, assim, prejuízos operacionais ao produtor. Tais resultados estão em concordância com a literatura clássica de equações diferenciais e modelagem de sistemas dinâmicos [Boyce e DiPrima 2018].

Do ponto de vista aplicado, a modelagem matemática de biodigestores mostra-se uma ferramenta essencial para a compreensão e otimização do processo de produção de biogás, uma vez que a retirada controlada do gás influencia diretamente a atividade microbiana e a eficiência do sistema [Fogler 2016], [Neba et al. 2020].

Ademais, aplicações dessa natureza possuem grande relevância no cenário atual, especialmente no que se refere à busca por fontes de energia renováveis e sustentáveis. A utilização de modelos matemáticos



para descrever e prever o comportamento de sistemas biológicos complexos contribui significativamente para o avanço tecnológico na área, promovendo maior eficiência energética e viabilidade econômica dos biodigestores [Tanaka 2024].

## 5 REFERÊNCIAS

### Referências

- [Bassanezi e Jr. 1988]BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Editora Harbra, 1988.
- [Boyce e DiPrima 2018]BOYCE, W. E. .; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2018. Tradução da 10.<sup>a</sup> edição original: Boyce's Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.
- [Fogler 2016]FOGLER, H. S. *Elementos de Engenharia das Reações Químicas*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [Gerardi 2003]GERARDI, M. H. *The Microbiology of Anaerobic Digesters*. Hoboken: Wiley-Interscience, 2003. 177 p. (Wastewater Microbiology Series). ISBN 9780471206934.
- [Hirsch 2013]HIRSCH, S. S. e. R. L. D. M. W. . *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. 3. ed. Waltham, MA: Academic Press, 2013. Third edition. ISBN 978-0-12-382010-5.
- [Monteiro 2011]MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [Neba et al. 2020]NEBA, G. A. et al. Modeling of biogas production processes. *Renewable Energy*, 2020.
- [Oliveira et al. 2024]OLIVEIRA, G. dos S. et al. Análise dos parâmetros mais influentes para a produção de biogás considerando um modelo computacional adaptado. In: *XXVII Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC) e XV Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais (ECTM)*. Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2024.
- [Rosa 2015]ROSA, R. M. S. *Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ, 2015.
- [Silva 2024]SILVA, G. H. d. *Dados experimentais e modelagem de produção de biogás*. 2024.
- [Tanaka 2022]TANAKA, G. C. *Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia)) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, SP, 2022.
- [Tanaka 2024]TANAKA, G. C. *Modelagem matemática da biodigestão anaeróbica em um biodigestor indiano, análise de estabilidade assintótica e otimização de variáveis de controle através da heurística VNS*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia)) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, SP, jul 2024.