

## ANÁLISE DE INCERTEZAS NA SIMULAÇÃO ESTRUTURAL DE COMPONENTES FABRICADOS EM MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS.

**Antonio de Assis Brito Neto<sup>1</sup>, Milton Evangelista de Oliveira Filho<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, Brasil (antonio.brito@ufsc.br)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, Brasil (milton.evangelista@ufsc.br)

**Resumo:** Os materiais compostos laminados são amplamente utilizados em aplicações de alto desempenho. Para tornar a simulação do comportamento estrutural de tais materiais mais realista, torna-se necessário incorporar as incertezas dos parâmetros de entrada do modelo de simulação. Com base em métodos probabilísticos, como o Método de Simulação de Monte Carlo associado ao Método da Superfície de Resposta será identificado os efeitos desta variabilidade dos parâmetros de entrada na resposta do modelo.

**Palavras-chave:** Incerteza; Monte Carlo; Material Composto.

### INTRODUÇÃO

A indústria tem buscado empregar materiais leves e resistentes nas mais variadas aplicações que exigem um elevado desempenho estrutural, ou seja, estruturas com grande capacidade de suportar carga possuindo baixo peso próprio. Em especial, destacam-se as aplicações relacionadas às áreas de transporte, como a engenharia aeroespacial, automotiva, naval, etc. Neste contexto, o uso de tais materiais contribuem para o desenvolvimento de componentes estruturais, como chassis veiculares, mais leves e eficientes. Entre estes materiais de alto desempenho, destaca-se os materiais compostos (Agarwal, 2006). Sendo este definido como material composto aquele formado pela combinação, em escala macroscópica, de mais de um material. Esta composição tem como objetivo obter um novo material que possa combinar as propriedades de ambos materiais para se ter um novo material com melhores características que os materiais utilizados de forma isolada (Mendonça, 2005). Dentre os materiais compostos destacam-se os materiais compostos laminados, formados pela associação de fibras de materiais como o carbono, o Kevlar, a fibra de vidro, etc. Além de sua leveza e resistência, os materiais compostos laminados apresentam boa resistência à fadiga e a corrosão, dependendo das condições de projeto e uso (Gibson, 2016) e (Jones, 1999).

Devido as características dos processos construtivos e da forma de utilização dos componentes em materiais compostos, é uma realidade a presença de incertezas na definição dos parâmetros de entrada que são necessários a modelagem do comportamento

estrutural do componente. Diante disto, é primordial incorporar as diversas fontes de incertezas na simulação estrutural para quantificar a sua influência nos resultados obtidos pela análise. As fontes de incerteza na análise estrutural estão basicamente relacionadas com as propriedades do material, a geometria da peça, o carregamento aplicado e as condições de contorno do problema (Figura 1) (Defilto e Gomes, 2016). Sendo assim, tem-se como principal objetivo do trabalho apresentar a metodologia utilizada para análise, quantificação e propagação das incertezas presentes no processo de modelagem de problemas estruturais em materiais compostos laminados. Isto possibilitará responder importantes questões necessárias à confiabilidade e à eficiência de projetos de componentes estruturais, tais como:

- 1- Qual a influência de um determinado nível de incerteza de um parâmetro de entrada na resposta de um modelo de simulação?
- 2- Quais os níveis de incerteza permitidos dos parâmetros de entrada de um modelo de simulação para se obter um determinado nível de incerteza na resposta do modelo?
- 3- Quais as fontes de incerteza que deverão ser prioritariamente minimizadas para se obter níveis de incerteza da resposta do modelo dentro dos requisitos do projeto do componente estrutural?

O projeto probabilístico tem como finalidade principal incorporar as incertezas dos parâmetros de entrada na resposta do modelo de simulação. Dentre as teorias existentes para fazer a incorporação destas incertezas ao modelo tem-se o Método de Simulação de Monte Carlo, os Métodos de Primeira Ordem (FOSM/FOM), os Método de Segunda Ordem

(SOSM), Amostragem de Hipercubo Latino, entre outros (Low, 2014). Devido a sua facilidade de implementação e robustez, neste trabalho, a propagação das incertezas presentes na definição dos parâmetros de entrada do modelo de simulação será feita através da utilização do Método de Simulação de Monte Carlo - SMC. Com base na distribuição estatística dos parâmetros que compõem o modelo, valores aleatórios para estes parâmetros são gerados e repetidas simulações são realizadas para compor a resposta do modelo de simulação (Figura 2). No entanto, repetir a simulação “n” vezes pode tornar o uso do método, dependendo do modelo analisado (como exemplo temos os modelos fornecidos pelo Método de Elementos Finitos), computacionalmente oneroso. Para tornar o SMC mais rápido, pode-se associar o SMC ao uso do Método de Superfície de Resposta para contornar o problema do modelo de simulação lento (Fang *et al*, 2012). O Método de Superfície de Resposta, trabalhado com uma amostra dos parâmetros de entrada, ajusta uma superfície aos dados de saída do modelo e com base nesse novo modelo matemático ajustado as novas simulações serão realizadas com um custo computacional significativamente menor que o do modelo original. De forma resumida, o método de Superfície de Resposta gera um modelo polinomial, com base nos dados de entrada e saída do modelo original, o qual a simulação do SMC sobre este novo modelo é muito mais rápida.

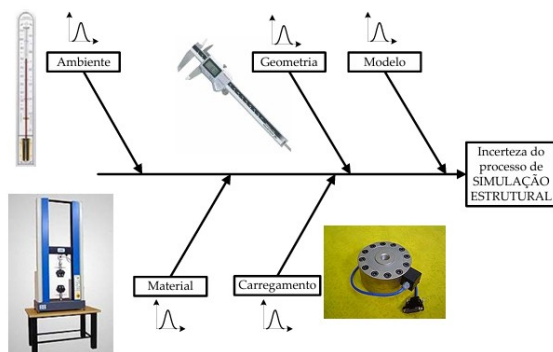


Figura 1. Fontes de incertezas presentes na simulação estrutural.

O SMC será implementado no Software Matlab (solução analítica) e paralelamente no Software de Elementos Finitos Ansys (solução numérica). Ambos os softwares possuem geradores de números aleatórios segundo o tipo de distribuição estatística dos parâmetros de entrada. Como o software Matlab possui a capacidade de vetorizar o problema, em vez de utilizar um laço (um for ou while, por exemplo), o problema se torna muito mais rápido de ser realizado, permitindo a realização de um grande número de simulações com pouco tempo de processamento computacional. Teoricamente, quanto maior o

número de simulações, melhor será a composição da resposta do modelo. No entanto, para que não seja necessário um número excessivo de simulações, será avaliada a estabilização da resposta do modelo durante a análise. Ou seja, quando a resposta do modelo apresentar um determinado nível de variação preestabelecido, pode-se encerrar a análise, pois certamente não haverá uma mudança significativa na resposta do modelo. Será realizado uma comparação entre os resultados obtidos utilizando um modelo analítico do problema e um modelo numérico com base no Método de Elementos Finitos.

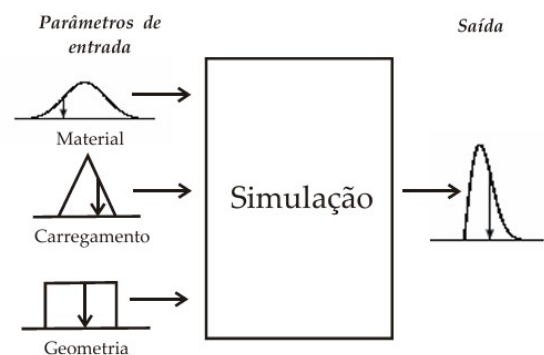


Figura 2. Propagação de incertezas através do processo de simulação.

Como já exposto, este trabalho fará uso de modelos analíticos e numéricos do comportamento estrutural do material composto. O método numérico utilizado é o Método de Elementos Finitos com base no software comercial ANSYS (ANSYS, 2026). Devido à complexidade da utilização do software de elementos finitos na simulação de problemas de peças em material composto laminado, torna-se necessário ter certeza da correta entrada de dados na simulação computacional, bem como garantir o correto alinhamento do laminado em cada face da geometria da peça analisada. Ou seja, para validar o uso deste software de elementos finitos em nossa análise, tornou-se necessário simular problemas da mecânica dos sólidos em material composto laminado, problemas estes sujeitos a diversos tipos de carregamentos e condições de contorno (como placas tracionadas, placas fletidas, placas apoiadas com carregamento transversal, vasos de pressão, etc.) cujas soluções analíticas são conhecidas para comparar estes resultados com a simulação numérica. Estas formulações para as soluções analíticas destes problemas podem ser encontradas em (Kollar, 2003) e (Buragohain, 2017). Para realizar essas simulações analíticas, torna-se necessário conhecer e aplicar a Teoria Clássica do Laminado (TCL) (Pereira, 2012) e (Barbero, 2011). Esta teoria é usada para calcular a matriz de rigidez ABD do laminado. Esta matriz é fundamental para a solução do problema de tração/flexão de placas e cascas laminadas, bem como no desenvolvimento da formulação do Método

de Elementos Finitos para materiais compostos (Brito Neto, 2024). Portanto, para validação das simulações numéricas, bem como obter uma segunda forma de análise através da solução analítica do problema, torna-se necessário apresentar, brevemente, a Teoria Clássica dos Laminados.

A TCL é baseada na teoria de placas finas e, portanto, assume, entre outras hipóteses, que o laminado é formado por lâminas ortotrópicas perfeitamente coladas entre si. Esta teoria será capaz de informar para o caso de placas e cascas a relação entre as cargas de tração e flexão aplicadas a placa e as correspondentes deformações que surgem como resposta a esta solicitação. Na TCL, a hipótese de pequenas deformações é assumida, as deformações  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são negligenciadas, a espessura  $t$  da placa permanece constante e muito menor que as demais dimensões, ou seja, largura e comprimento. Desde que a espessura da lâmina é pequena comparada a largura e comprimento da placa, cada lâmina está em estado plano de tensão (Barbero, 2014). Portanto, a relação constitutiva de tensão-deformação no sistema de coordenadas da lâmina é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais e de cisalhamento nas direções da lâmina e  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são as deformações nas direções do laminado, respectivamente. Sendo os termos da matriz  $Q$ , denominada de matriz de rigidez local, dados em função das propriedades do material na forma:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, Q_{66} = G_{12} \quad (2)$$

onde os termos são definidos em função dos parâmetros do material  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$ , ou seja, do módulo de elasticidade na direção longitudinal do material, do módulo de elasticidade na direção transversal das lâminas, do módulo de cisalhamento e dos coeficientes de Poisson, respectivamente. Quando o material analisado é um laminado formado por lâminas com diferentes orientações, a matriz local deve ser multiplicada por uma matriz de rotação de maneira que todas as lâminas sejam apresentadas com o mesmo referencial e não mais em relação às suas coordenadas principais (Peres, 2019). A relação da tensão na direção de referência do laminado é na direção do laminado é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (3)$$

sendo  $m = \cos(\theta)$ ,  $n = \sin(\theta)$  e  $\theta$  é o ângulo de orientação do laminado. Esta matriz que relaciona as duas tensões no sistema local e global é a matriz de transformação  $T$ . Aplicando-se esta matriz de transformação para relacionar as matrizes de rigidez nos dois sistemas de coordenadas obtém-se a matriz de rigidez reduzida transformada sendo dada por

$$\bar{Q} = T^{-1}QT \quad (4)$$

As deformações são consideradas contínuas ao longo da espessura do laminado e dependem das deformações e curvatura da superfície central. As tensões no sistema de referência são definidas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] \quad (5)$$

sendo  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  e  $\varepsilon_{xy}^0$  chamadas de deformações de membrana,  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ , e  $\kappa_{xy}$  sendo as curvaturas.

As forças normais e momentos fletores por unidade de comprimento nas lâminas são dadas por

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6)$$

Substituindo as tensões da Eq. (4) nas Eq. (6), temos:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

onde a matriz 6x6 apresentada na Eq. (7) é definida com a matriz de rigidez ABD. Com os termos desta matriz definidas por

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij})}_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij})}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij})}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (8)$$

Para a solução de um determinado problema de viga, placa ou casca em material composto laminado, conhecendo-se os carregamentos submetidos ao componente, ou seja, as forças normais por unidade de comprimento  $N_x$ ,  $N_y$  e cisalhante  $N_{xy}$  e os momentos fletores por unidade de comprimento  $M_x$ ,  $M_y$ , e  $M_{xy}$ , pode-se resolver o sistema dado pela Eq. (7) e obter as deformações e curvaturas da placa. Substituindo os valores da deformação de membrana e as curvaturas na Eq. (4), pode-se determinar as tensões no laminado.

## MATERIAL E MÉTODO

O procedimento para análise de incertezas consiste em identificar as fontes de incertezas, definir os parâmetros do modelo com comportamento estocástico, quantificar as características de sua incerteza (tipo de distribuição e seus parâmetros como média e desvio padrão), além de propagar estas incertezas dos parâmetros de entrada através do modelo e analisar os resultados. A figura 3 apresenta uma visão geral da análise. Neste trabalho, a modelagem de uma viga caixão em material composto laminado (figura 4) será feita analiticamente, implementada no software Matlab®, utilizando a Teoria Clássica dos Laminados e numericamente através do Método de Elementos Finitos, utilizando o software Ansys, ambas as análises utilizam o Método de Simulação de Monte Carlo e o Método da Superfície de Resposta para a análise da propagação de incertezas. Desta forma, pretende-se avaliar a influência das incertezas dos parâmetros de entrada na resposta da modelagem numérica e na solução analítica do problema.

Para a análise numérica, implementou-se um algoritmo na linguagem APDL com base no pacote Probabilistic Design Systems (PDS) do software comercial de elementos finitos Ansys® para a propagação de incertezas através do modelo de elementos finitos [Kumar, 2015]. Como dito anteriormente, essa ferramenta usa o método de simulação de Monte Carlo para quantificar a influência da incerteza dos parâmetros de entrada na

resposta da simulação. O algoritmo considera o método de elementos finitos como uma “caixa preta”, isto é, os erros oriundos da solução numérica são considerados como intrínsecos ao problema (Kannan, *et al*, 2020). Os parâmetros de entrada (geometria, propriedades do material, condições de contorno, carregamento, etc.) são definidos de forma paramétrica no modelo do software. Os parâmetros que definem o comportamento estatísticos das variáveis de entrada do modelo de simulação são definidos como entrada e são caracterizados por seu tipo de distribuição (Gaussiana, lognormal, uniforme, etc.) e com os seus respectivos parâmetros da distribuição (média e desvio padrão). A correlação entre as variáveis de entrada também pode ser definida (Reh, *et al*, 2006). Neste algoritmo do software ANSYS entra-se com um modelo de solução do problema determinístico e em seguida define-se quais parâmetros terão comportamento estocástico e quais são as variáveis de resposta do modelo. Com essas definições, o algoritmo irá simular o problema repetidas vezes. Para cada iteração, o programa gera um valor para cada parâmetro de entrada com base nas características e tipo de distribuição estatística de cada variável. Esta operação é repetida numa quantidade definida pelo usuário. Por fim, o software fornece uma matriz com os dados de entrada gerados e as respectivas resposta do modelo. Diante destas informações, pode-se calcular as propriedades da resposta do modelo, bem como uma análise de sensibilidade identificando os parâmetros de entrada que tem maior influência sobre a resposta do modelo, além de uma análise de estabilização da resposta do modelo com o número de simulações.

O algoritmo implementado no software Matlab para simulação através do método SMC é realizado vetorizando o problema e fazendo uso de funções para gerar números aleatórios com base no tipo de distribuição do parâmetro. O software Matlab é uma ferramenta poderosa para implementação do método, por ser um algoritmo vetorizado, sendo o tempo de simulação muito pequeno para um número de iterações da ordem de 100.000. O programa Matlab possui geradores de números aleatórios de acordo com o tipo de função de densidade de probabilidade desejada (por exemplo a função `normrnd`, que gera número aleatórios com distribuição normal e `lognrnd` que gera números aleatórios com base na distribuição lognormal), o que facilitou muito a análise. Uma das grandes vantagens do uso do programa, como já foi dito, é a possibilidade de vetorização do problema, ou seja, pode-se trabalhar com os dados como vetores e através da manipulação destes vetores tem-se a possibilidade de obter uma simulação muito mais rápida e eficiente do que a simulação utilizando comandos “for” por exemplo. Desta forma, o uso do MATLAB fornece uma grande vantagem na análise

de problemas que envolvam o método de simulação de Monte Carlo com modelos analíticos.

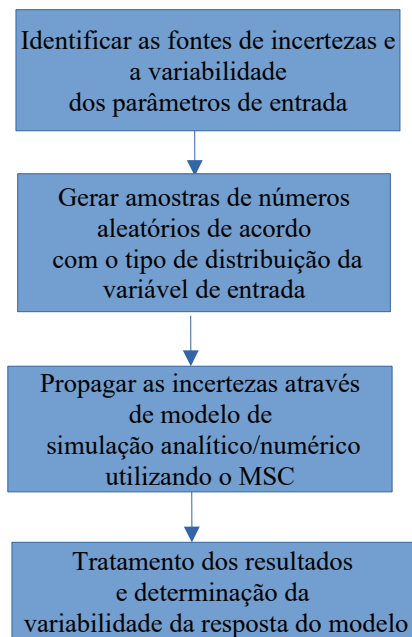


Figura 3. Fluxograma da metodologia para propagar as incertezas dos parâmetros de entrada através do modelo de simulação.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

O estudo de caso consistiu na análise de uma viga caixão em material composto laminado (figura 4). Este modelo possui solução analítica. Vale ressaltar que a solução analítica de problemas mais complexos em material composto é rara de se encontrar e complexa. A solução analítica possibilita a análise computacional no software Matlab utilizando o método SMC. Poderia ter sido utilizado uma peça com uma geometria complexa, no entanto, estaríamos impedidos de realizar uma análise com base numa solução analítica, ou seja, só poderia ser utilizado métodos numéricos. Dois estudos de caso foram realizados, onde analisou-se uma barra sob tração pura e uma viga sob flexão. Para estas duas situações, existem solução analítica fornecidas pela Teoria Clássica dos Laminados - TCL, o que facilita o uso da técnica de SMC utilizando modelos analíticos para confrontar com a técnica utilizando modelos numéricos.

Os dados dos materiais, carregamento e geometria, bem como suas incertezas são apresentados na Tabela 1. O material simulado é o Epoxy Carbon UD (230 GPa) Wet, os dados do material foram retirados da própria biblioteca de materiais do software Ansys. Optou-se por adotar uma distribuição normal e um

desvio padrão de 10% para todas as variáveis de entrada do modelo para termos mais facilidade em obter uma visão de quanto será a variação da resposta frente a uma variação de 10% dos parâmetros de entrada. Posteriormente, com a análise de sensibilidade, notaremos que existem parâmetros que praticamente não influenciam na resposta do modelo.

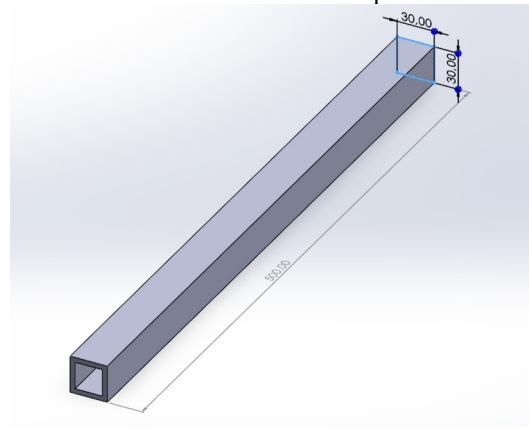


Figura 4. Viga caixão em material composto laminado (dimensões em mm).

Tabela 1. Parâmetros de entrada do material simulado.

| Parâmetro                             | Média  | Desvio padrão (%) |
|---------------------------------------|--------|-------------------|
| Módulo de elasticidade – $E_x$ (GPa)  | 123,34 | 10                |
| Módulo de elasticidade – $E_y$ (GPa)  | 7,78   | 10                |
| Módulo de elasticidade – $E_z$ (GPa)  | 7,78   | 10                |
| Coefficiente de Poisson $\nu_{xy}$    | 0,27   | 10                |
| Coefficiente de Poisson $\nu_{yz}$    | 0,42   | 10                |
| Coefficiente de Poisson $\nu_{xz}$    | 0,27   | 10                |
| Módulo de cisalhamento $G_{xy}$ (GPa) | 5,109  | 10                |
| Módulo de cisalhamento $G_{yz}$ (GPa) | 3,081  | 10                |
| Módulo de cisalhamento $G_{xz}$ (GPa) | 5,109  | 10                |

Tabela 2. Valores dos parâmetros de entrada da simulação da barra tracionada.

| Grandeza                | Valor médio | Desvio Padrão (%) | Tipo de distribuição |
|-------------------------|-------------|-------------------|----------------------|
| Carga aplicada – $P$    | 100 N       | 10                | Normal               |
| Espessura da viga – $h$ | 1 mm        | 10                | Normal               |
| Largura da seção – $b$  | 30 mm       | 10                | Normal               |
| Altura da seção – $a$   | 30 mm       | 10                | Normal               |

Tabela 3. Valores dos parâmetros de entrada da simulação da viga sob flexão.

| Grandeza              | Valor médio | Desvio Padrão (%) | Tipo de distribuição |
|-----------------------|-------------|-------------------|----------------------|
| Carga aplicada – P    | 100 N       | 10                | Normal               |
| Espessura da viga – h | 1 mm        | 10                | Normal               |
| Largura da seção - b  | 30 mm       | 10                | Normal               |
| Altura da seção - a   | 30 mm       | 10                | Normal               |

Devido a complexidade da simulação em material composto utilizando-se o ANSYS, tornou-se necessário realizar a validação do uso do software para a simulação de peças em materiais compostos laminados. Desta forma, foi realizada, através de uma simulação determinística dos dois problemas propostos, ou seja, a análise de uma viga caixão tracionada e a análise de uma viga caixão bi-apoiada com carga distribuída. Com base na TCL, a solução analítica da tensão em cada lâmina da viga tracionada é dada pela equação (ref):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = [\bar{Q}]^k \begin{Bmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \\ A'_{16} \end{Bmatrix} \frac{N_v}{p} \quad (10)$$

sendo Q a matriz constitutiva da lâmina,  $A_{11}$  termos da matriz de rigidez em membrana do laminado,  $N_v$  a carga aplicada e p o perímetro da seção.

A extremidade da barra possui uma concentração de tensão devido a aplicação da carga, mas ao longo da barra a tensão na lâmina externa (o mesmo acontece nas lâminas internas devido ao tipo de carregamento) se mantém uniforme.

Sendo a solução analítica das tensões na viga bi-apoiada sob flexão dada pela equação (ref)

$$N_x(x, z) = \frac{M_v(x)H}{I_{yy}} z$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}][A']\{N\} \quad (9)$$

onde  $M_v$  é o momento aplicado, H é a altura da seção,  $I_{yy}$  o momento de inércia e z a coordenado do ponto analisado.

Os resultados dos métodos analíticos e numéricos, apresentados na Tabela 2, foram excelentes, o que confirma que toda a entrada de dados, definição dos eixos de orientação do laminado, determinação das condições de contorno do problema, necessários à simulação, foram entrados de forma correta.

Tabela 4. Resultado da validação do cálculo da tensão máxima utilizando um método determinístico.

| Problema                                           | Simulação analítica Matlab | Simulação Ansys APDL | Erro (%) |
|----------------------------------------------------|----------------------------|----------------------|----------|
| Tensão máxima em viga caixão tracionada            | 208,33 kPa                 | 208,33 kPa           | 0        |
| Tensão máxima em viga caixão bi-apoiada sob flexão | 2,07 MPa                   | 2,08 MPa             | 0,05     |

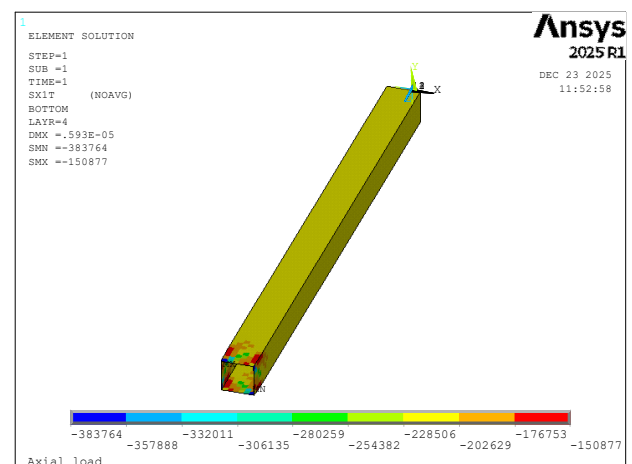


Figura 5. Tensões na barra tracionada em material composto laminado.

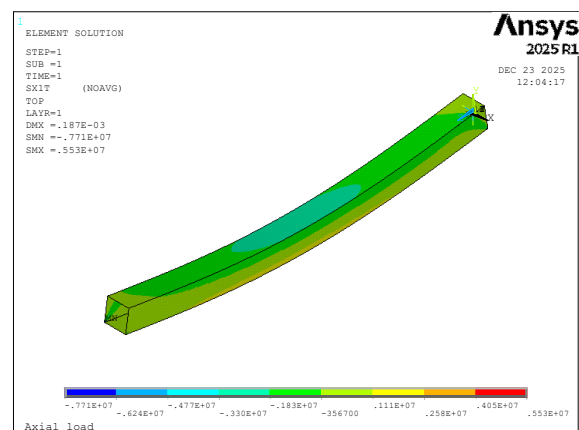


Figura 6. Tensões na viga flexionada em material composto laminado.

O método de elementos finitos é um método de solução numérica, seu uso na análise probabilística foi feito utilizando a ferramenta PDS (Probabilistic Design System) do software Ansys através do uso do Método de Simulação de Monte Carlo - MSMC. Sabe-se que a grande desvantagem do uso do SMC em problemas numéricos é a necessidade da

simulação do problema repetidas vezes, o que torna o seu uso, algo computacionalmente mais oneroso. Para superar este problema, se fez uso do método da Superfície de Resposta associado ao SMC, o que foi feito utilizando o software MATLAB. Tornando-se esta associação entre os dois métodos algo vantajoso, pois tem-se como resultado simulações mais rápidas, pois a SMC irá realizar os cálculos em cada “loop” sobre o modelo analítico fornecido pela regressão multilinear dos dados, ao invés de necessitar utilizar o modelo numérico da análise, pois este modelo tem um maior custo computacional.

Também utilizou-se o método da Superfície de Resposta (MSR) para diminuir o custo computacional da análise de incerteza. O método corresponde a um conjunto de técnicas estatísticas e matemáticas usado para modelar, analisar e otimizar a relação entre variáveis de entrada (fatores) e uma resposta de interesse de um sistema ou modelo. A ideia central é aproximar o comportamento do modelo real (muitas vezes complexo e computacionalmente oneroso) por um modelo matemático simples, geralmente um polinômio, válido em uma região de interesse do espaço de parâmetros. Foram realizadas 1000 simulações no Ansys para compor a superfície de resposta. Ou seja, com os parâmetros de entrada gerados e a resposta do modelo foi ajustado um polinômio quadrático com termos de interação. Sobre este polinômio ajustado é que se utiliza para fazer o método de Monte Carlo. O Método no software Matlab, consegue fazer 10.000 simulações em aproximadamente 20 segundos utilizando um computador com uma configuração não muito elevada.

Tabela 4. Resultados da análise de incerteza para a tensão máxima.

| Análise                                    | Valor médio | Incerteza (%) |
|--------------------------------------------|-------------|---------------|
| Barra tracionada - Monte Carlo - Analítico | 209,99 kPa  | 16,77         |
| Barra tracionada - RSM - Analítico         | 210,16 kPa  | 16,78         |
| Barra tracionada - RSM - Numérico          | 210,91 kPa  | 18,60         |
| Viga Flexão - Monte Carlo - Analítico      | 2,13 MPa    | 22,25         |
| Viga Flexão - RSM - Analítico              | 2,13 MPa    | 22,43         |
| Viga flexão - RSM - Numérico               | 2,05 MPa    | 23,10         |

O resultado tanto pelo SMC puro, quanto o método associado ao método da Superfície de Resposta

fornecerem uma excelente concordância. A incerteza da resposta do modelo em ambos os métodos foi da ordem de 18%, para uma incerteza nos parâmetros de entrada da ordem de 10%. Dependendo da aplicação, esta incerteza poderá comprometer a funcionalidade da estrutura, bem como a sua segurança. Ou seja, o que vai dizer se esta incerteza de 18% da resposta é um valor significativo ou não será a aplicação do componente. Para a barra tracionada a diferença entre o modelo analítico e o modelo numérico utilizando o MEF é muito pequeno, da ordem de 0,4%. Com relação a viga sob flexão, a diferença entre o resultado analítico e numérico foi da ordem de 3%. Desta forma, podemos observar a concordância do método SMC aplicado tanto sobre o modelo analítico quando sobre o modelo numérico.

A análise de sensibilidade, utilizando metodologia que define os Coeficientes de Spearman, permitem identificar os parâmetros que tem maior influência na dispersão dos dados de saída do modelo. A figura (7) apresenta os coeficientes para a viga tracionada e a figura (8) apresentam os coeficientes para a viga flexionada. Na barra tracionada, o parâmetro força aplicada fornece a maior sensibilidade ao modelo, ou seja, incertezas na aplicação da carga provocarão as maiores variações na resposta do modelo (tensão máxima no laminado). A largura e espessura possuem a mesma sensibilidade, assim como os ângulos de orientação do laminado. Incertezas nos parâmetros do material não provocam muita variação na tensão do material composto. Já na viga sob flexão, o parâmetro carregamento também fornece maior sensibilidade ao modelo. Os ângulos de orientação no laminado também possuem certa relevância na sensibilidade. A altura da seção também fornece uma certa sensibilidade na resposta do modelo, tendo os outros parâmetros do modelo uma menor importância da variação da resposta do modelo. Através da análise de sensibilidade é possível analisar quais parâmetros devem ter sua incerteza reduzida para diminuir a incerteza da resposta do modelo, bem como, pode-se determinar também parâmetros que não tem uma influência relevante na resposta do modelo, ou seja, em tais parâmetros pode-se relaxar um pouco a variabilidade do parâmetro que não terá grande influência sobre a resposta do modelo.

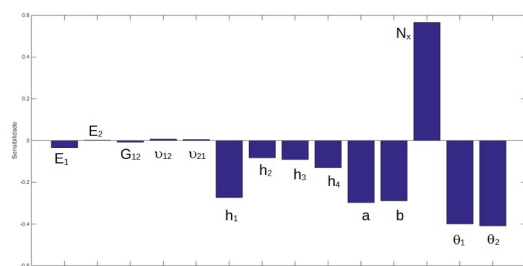


Figura 7. Análise de Sensibilidade da barra tracionada.

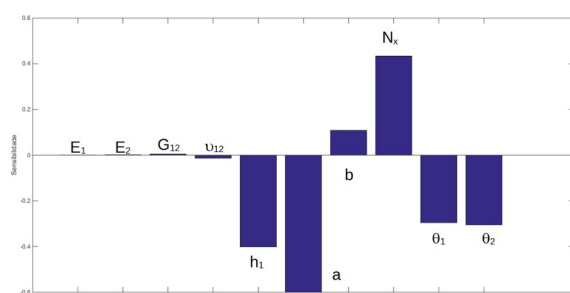


Figura 8. Análise de sensibilidade da viga sob flexão.

### CONCLUSÃO

A ferramenta principal de análise deste trabalho é o Método de Simulação de Monte Carlo utilizando na análise tanto um modelo analítico (a qual faz uso da TCL) quanto um modelo numérico (que utiliza o MEF). A análise dos resultados obtidos com as simulações demonstrou a concordância entre as respostas fornecidas pelos dois modelos analisados. Esta compatibilidade dos resultados serviu para a validação dos resultados, ou seja, estas comparações fornecem uma forma de avaliar a confiabilidade e veracidade dos resultados obtidos. Analisando os resultados, verificou-se uma pequena discrepância entre os valores médios da simulação, valores máximos da ordem de 4%, e observou-se 9% nas diferenças nas incertezas, isto se deve ao fato de que existem diferenças na concepção do modelo analítico e no modelo numérico, o que pode causar um certo desvio entre os valores médios obtidos e nas incertezas. A figura 9 apresenta a estabilização da resposta do modelo tanto para os valores médios quando para a incerteza. Esta análise é importante para otimizar o número de simulações necessária, já que a resposta do modelo se encontra estabilizada, o que é demonstrado pela figura 9 após  $6.10^3$  simulações.

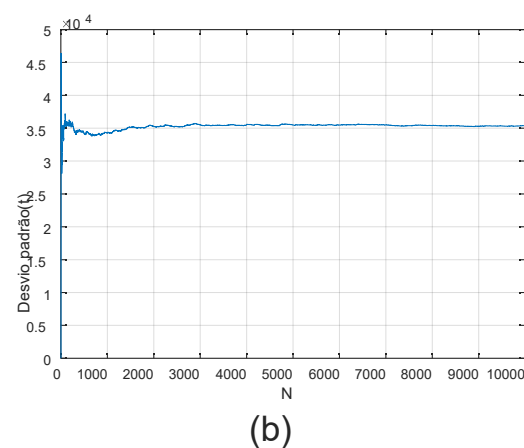
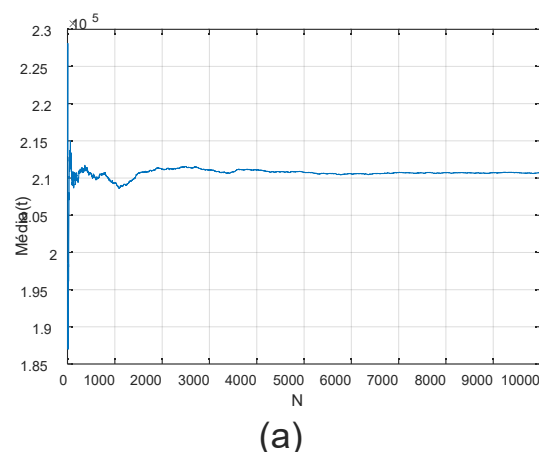


Figura 9. Estabilização da resposta (a) estabilização da média. (b) estabilização do desvio padrão.

Sem dúvida, o método de Simulação de Monte Carlo é um método robusto e adequando para a análise de incertezas. O uso deste método é em tese computacionalmente oneroso, no entanto, ao se utilizar o método com nossos modelos analíticos implementados no software MATLAB, o qual possui a capacidade de trabalhar com vetores, o uso do método tornou-se viável e o tempo de simulação não foi um empecilho para a aplicação do método. Desta forma, um elevado número de repetições realizadas para compor a resposta do modelo pode ter sido utilizado. Entretanto, a Simulação de Monte Carlo sobre o modelo numérico de elementos finitos é de elevada demanda computacional. Logo, a incorporação do Método da Superfície de Resposta à análise traz consigo a possibilidade de melhorar a rapidez da simulação sem o comprometimento dos resultados da análise. Desta forma, com o uso do MSR pode-se realizar um maior número de simulações, sem que houvesse um elevado tempo de simulação. Para problemas com geometria não trivial, ou seja, geometrias que não possuem solução

analítica definidas, não irá existir a possibilidade de solução analítica para ser avaliado no software Matlab, o que implica na análise de tais casos apenas utilizando o modelo fornecido pelo Método de Elementos Finitos.

Este trabalho demonstrou a necessidade de se incorporar as incertezas presentes na análise do comportamento estrutural de componentes fabricados em material composto laminado. Pois tanto o alinhamento das fibras, quanto a espessura das camadas (sujeitos a imprecisões devido ao processo de fabricação), quanto as propriedades do material possuem incertezas que devem ser incorporadas a simulação para se ter uma ideia de quanto estas incertezas influenciam nos resultados da análise. Um dos resultados principais foi a análise de sensibilidade, na qual foi possível estabelecer os parâmetros que tem maior influência na dispersão dos dados. Esta análise é de extrema importância para sabermos onde atuar para minimizar a incerteza da resposta do modelo sem desprender esforços na incerteza de parâmetros que não tem relevância na resposta do modelo.

#### REFERÊNCIAS

- Agarwal, B. D. *et al*, 2006, “Analysis and Performance of Fiber Composite”, Wiley.
- Ansys, 2024, [www.ansys.com.br](http://www.ansys.com.br), acessado em 20 de fevereiro de 2026.
- Barbero, E.J. , 2011, “Introduction to Composite Materials Design”, CRC Press.
- Barbero, E.J. , 2014, “Finite Element Analysis of Composite Materials using Ansys”, CRC Press, segunda edição.
- Buragohain, M.K. , 2017, “Composite Structures: Design, Mechanics, Analysis, Manufacturing, and Testing”, CRC Press.
- Defilto, V.F. e Gomes, W. J. S., 2016, Análise da confiabilidade estrutural de problemas baseados na mecânica dos sólidos, REEC – Revista Eletrônica de Engenharia Civil, vol. 12, Nº 2, pg 14-25.
- Fang, S. *et al*, 2012, A stochastic model updating method for parameter variability quantification based on response surface models and Monte Carlo simulation, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 33.
- Gibson, R.F. , 2016, “Principles of Composite Material Mechanics”, CRC Press, quarta edição.
- Jones, R. M. , 1999, “Mechanics of Composite Materials”, segunda edição, Taylor e Francis.
- Kannan, V, *et al*, 2020, Probabilistic design of plate with point load, Journal of Critical Reviews, vol. 7.
- Kaw, A. K. , 2006, “Mechanics of Composite Materials”. CRC Press.
- Kollar, L.P., Springer, G.S. , 2003, “Mechanics of Composite Mechanics”, Cambridge.
- Kumar, V. K., e Bhat, M. R., 2015, Probabilistic stress variation studies on composite single lap joint using Monte Carlo simulation, Composite Structures, Vol. 121.
- Low, B. K., 2014, FORM, SORM, and spatial modeling in geotechnical engineering, Structural Safety, vol. 49.
- Mendonça, P. T. R. , 2005, Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche: Projeto e Análise. Manole.
- Pereira, J.C.C., 2012, “Mecânica dos Materiais Compostos Laminados”, Apostila, UFSC.
- Peres, A.P. , 2019, “Um Estudo Comparativo de Critérios de Falha Aplicadas ao Dano Progressivo de Materiais Laminados”, Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Reh, S, *et al*, 2006, Probabilistic finite element analysis using Ansys, Structural Safety, vol. 28, pg 17-43.