



Estabilidade Orbital de Detritos Espaciais: Aplicação do Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) em Simulações Computacionais

Gabrielly da Paixão Pereira¹, Jean Paulo dos Santos Carvalho²

¹IFBA - Campus Feira De Santana (zeusninaemel@gmail.com)

²Universidade federal do Recôncavo da Bahia, Feira de Santana, Brasil

Resumo: O ambiente orbital terrestre tem crescimento acelerado de detritos espaciais, com mais de 40 mil objetos, elevando o risco da Síndrome de Kessler. Este trabalho investiga a estabilidade orbital via Teorema KAM em sistemas perturbados. Realizamos simulações no Maple, analisamos órbitas sob perturbação de um pequeno parâmetro. Os resultados indicam que pequenas perturbações preservam estabilidade, então é necessário a inclusão de uma maior perturbação para criar estratégias de mitigação.

Palavras-chave: Detritos espaciais; Teorema KAM; Dinâmica orbital; Sistemas dinâmicos; Simulação computacional.

INTRODUÇÃO

A era espacial, iniciada em 4 de outubro de 1957 com o lançamento do Sputnik 1 pela União Soviética, marcou o início de uma ocupação acelerada do ambiente orbital terrestre. Desde então, mais de 17.000 lançamentos foram realizados, resultando em uma população orbital que, em janeiro de 2025, ultrapassava 40.000 objetos catalogados, com massa total superior a 13.000 toneladas e área combinada acima de 300.000 m² (ESA, 2025). Embora esse avanço tenha impulsionado o desenvolvimento tecnológico e científico global, trouxe consigo um problema crescente: os detritos espaciais.

O ambiente orbital terrestre apresenta um crescimento acelerado da população de detritos espaciais, com mais de 40.000 objetos catalogados e massa total superior a 13.000 toneladas em janeiro de 2025 (ESA, 2025). Esse cenário aumenta o risco de colisões em cascata, conhecido como Síndrome de Kessler. O presente trabalho investiga a estabilidade orbital de detritos em sistemas dinâmicos perturbados por meio da aplicação do Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). A partir de revisão bibliográfica e dados da Agência Espacial Europeia (ESA, 2025), contextualiza-se o problema dos detritos espaciais e os fundamentos de mecânica orbital. O Teorema KAM é utilizado para analisar a persistência de movimentos quase-periódicos em sistemas hamiltonianos quase-integráveis sob pequenas perturbações. Simulações numéricas foram realizadas no software Maple, resolvendo equações diferenciais perturbadas e visualizando órbitas estáveis versus caóticas ao variar o parâmetro de perturbação ϵ . Os resultados confirmam que, para pequenas perturbações, grande parte das órbitas mantém estabilidade, alinhando-se à longevidade observada de objetos como o Vanguard

1. Conclui-se que o Teorema KAM oferece base matemática robusta para identificar regiões orbitais estáveis e subsidiar estratégias de mitigação e sustentabilidade do ambiente espacial.

De acordo com a definição da Agência Espacial Europeia (ESA), detritos espaciais são “todos os objetos artificiais, incluindo fragmentos e elementos deles, em órbita terrestre ou reentrando na atmosfera, que são não funcionais” (ESA, 2025). Esses objetos incluem satélites desativados, estágios de foguetes, fragmentos de colisões e explosões, entre outros. Eventos marcantes, como a colisão entre os satélites Iridium 33 e Cosmos 2251 em 2009, geraram mais de 2.000 fragmentos catalogados que ainda orbitam a Terra, ilustrando o risco real de cascata de colisões (NASA, 2010; Kelso, 2009).

Donald J. Kessler, em 1978, postulou a Síndrome de Kessler: uma reação em cadeia na qual colisões geram novos fragmentos que provocam novas colisões, potencialmente tornando certas regiões orbitais inabitáveis. Estudos recentes da ESA (2025) indicam que, na faixa de 500–600 km de altitude — preferida por constelações comerciais —, a densidade de detritos de 1 cm aproxima-se da densidade de payloads ativos, elevando o índice de risco ambiental para cerca de 4 vezes o limiar de sustentabilidade orbital.

Nesse contexto, o estudo da estabilidade orbital ganha relevância científica e estratégica. A mecânica orbital clássica, baseada no problema de dois corpos e nas Leis de Kepler, fornece a primeira aproximação do movimento, mas não captura completamente os efeitos das perturbações reais (potencial gravitacional da Terra, arrasto atmosférico e pressão de radiação solar etc.). Para compreender a transição entre

estabilidade e caos em sistemas perturbados, recorre-se à teoria de sistemas dinâmicos, especialmente aos sistemas hamiltonianos quase-integráveis.

O presente trabalho, desenvolvido no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq e UFRB), tem como objetivo geral analisar a estabilidade orbital de detritos espaciais por meio da aplicação do Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM).

Especificamente, busca-se: (a) contextualizar historicamente e quantitativamente o problema dos detritos espaciais com base em relatórios oficiais da ESA e literatura especializada; (b) apresentar os fundamentos matemáticos da dinâmica orbital e da teoria de sistemas dinâmicos, com ênfase no livro *Caos e planetas: dinâmica caótica de sistemas planetários* (Ferraz-Mello, 2021); (c) aplicar o Teorema KAM por meio de simulações computacionais no software Maple; e (d) discutir as implicações dos resultados para a sustentabilidade do ambiente orbital terrestre.

MATERIAL E MÉTODOS

Adotou-se uma abordagem qualitativa-quantitativa, com revisão bibliográfica sistemática de relatórios da Agência Espacial Europeia (ESA, 2025), do livro *Caos e planetas: dinâmica caótica de sistemas planetários* (Ferraz-Mello, 2021) e de referências clássicas de mecânica orbital (Vallado, 2013; Curtis, 2020). Os dados quantitativos sobre população orbital, fragmentações e projeções de risco foram extraídos do modelo MASTER 2024 da ESA.

Para a análise teórica, estudaram-se sistemas dinâmicos hamiltonianos quase-integráveis e o Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), que garante a persistência de toros invariantes sob pequenas perturbações (ε) (Kolmogorov, 1954; Arnold, 1963; Moser, 1962; Ferraz-Mello, 2021).

As simulações numéricas foram implementadas no software Maple, por meio da integração numérica de equações diferenciais do problema de dois corpos perturbado, na forma:

$$H = H_0(I) + \varepsilon \cdot H_1(I, \theta)$$

Variou-se o pequeno parâmetro de perturbação ε (0; 0,01; 0,1; 0,5) para gerar gráficos da evolução das coordenadas x e y das órbitas e visualizar a transição entre movimentos quase-periódicos e caóticos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados da ESA (ESA, 2025) revelam que, na faixa de 500–600 km de altitude (região preferida por constelações comerciais), a densidade de detritos de 1

cm aproxima-se da densidade de payloads ativos, elevando o índice de risco ambiental para aproximadamente 4 vezes o limiar de sustentabilidade orbital. As simulações realizadas no Maple corroboram os princípios do Teorema KAM:

- Para $\varepsilon = 0$ (sistema não perturbado), observam-se órbitas regulares com amplitudes constantes nas coordenadas x e y (ver Figura 1).
- Para $\varepsilon = 0,01$ (pequena perturbação), mantém-se o comportamento quase-periódico, preservando o toro invariante característico do Teorema KAM (ver Figura 2).
- Para $\varepsilon = 0,5$ (perturbação forte), verifica-se forte variação nas coordenadas, indicando transição para comportamento caótico (ver Figura 3).

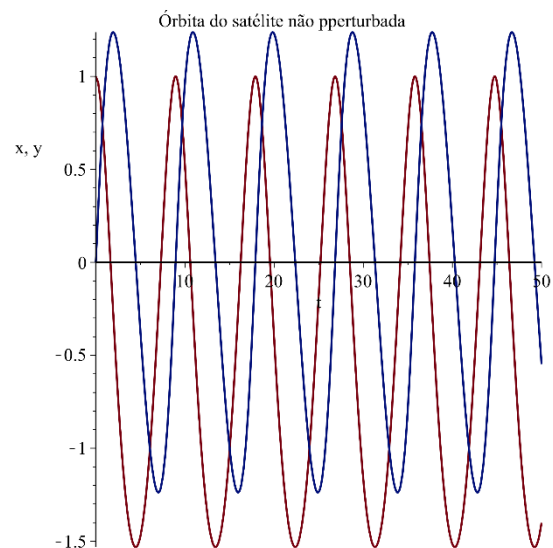


Figura 1 – Simulação no Maple: sistema pouco perturbado ($\varepsilon = 0$) – órbita periódica estável (toro KAM preservado). Fonte: Elaboração da autora (2025), com base em simulações realizadas no software Maple.

Esses resultados explicam a longevidade de objetos como o Vanguard 1 (mais de 67 anos em órbita) e alertam para a instabilidade em regiões ressonantes, onde o Teorema KAM não se aplica plenamente. A abordagem matemática contribui para a identificação de regiões orbitais mais seguras e para o planejamento de estratégias de mitigação de detritos espaciais.

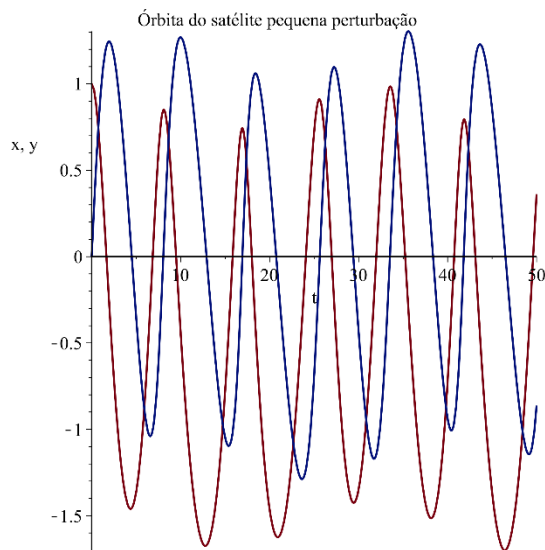


Figura 2 – Simulação no Maple: sistema pouco perturbado ($\varepsilon = 0,01$) – órbita quase-periódica estável (toro KAM preservado). Fonte: Elaboração da autora (2025), com base em simulações realizadas no software Maple.

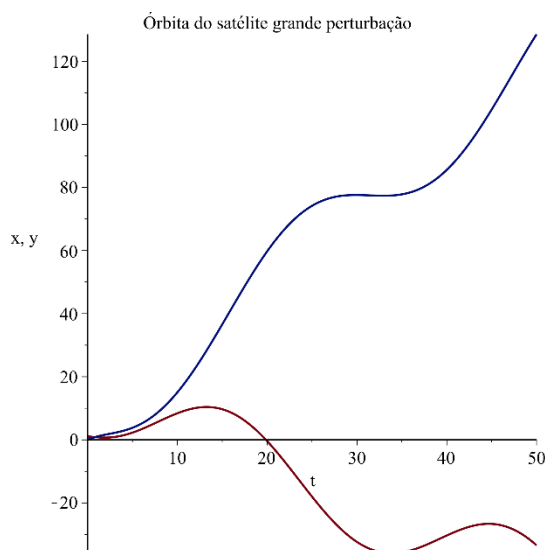


Figura 3 – Simulação no Maple: sistema fortemente perturbado ($\varepsilon = 0,5$) – transição para comportamento caótico. Fonte: Elaboração da autora (2025), com base em simulações realizadas no software Maple.

CONCLUSÃO

O Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) revela-se uma ferramenta matemática poderosa para compreender a estabilidade orbital de detritos espaciais em sistemas perturbados. As simulações computacionais no Maple demonstraram de forma

visual a diferença entre movimentos quase-periódicos (estáveis) e caóticos, dependendo da intensidade da perturbação ε .

Os resultados preliminares indicam que a aplicação do Teorema KAM oferece uma base sólida para subsidiar o desenvolvimento de estratégias de mitigação e promover a sustentabilidade do ambiente orbital terrestre. Como próximos passos, sugere-se a integração das simulações com dados reais de elementos orbitais (TLEs) e a extensão do modelo para perturbações mais complexas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Criação e Inovação da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e ao CNPq pelo apoio financeiro por meio do Programa PIBIC-EM. Agradecemos especialmente ao orientador Prof. Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho pela orientação e acompanhamento contínuo durante o desenvolvimento do projeto. O autor Jean Carvalho agradece ao CNPq (processo 408221/2025-9).

REFERÊNCIAS

- ARNOLD, V. I. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. **Russian Mathematical Surveys**, v. 18, n. 5, p. 9-36, 1963.
- CURTIS, H. D. **Orbital mechanics for engineering students**. 4. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2020.
- EUROPEAN SPACE AGENCY. **ESA's Annual Space Environment Report**. Issue/Revision 9.1. Darmstadt: ESA/ESOC, 21 out. 2025.
- FERRAZ-MELLO, Sylvio. **Caos e planetas: dinâmica caótica de sistemas planetários**. São Paulo: Livraria da Física, 2021.
- KELSO, T. S. Analysis of the Iridium 33-Cosmos 2251 collision. In: **Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference**, 2009.
- KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 98, n. 4, p. 527-530, 1954.
- MOSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. **Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen**, v. 1962, n. 1, p. 1-20, 1962.



NASA. The collision of Iridium 33 and Cosmos 2251: the shape of things to come. **NASA Technical Reports**, 2010.

VALLADO, D. A. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. 4. ed. Hawthorne: Microcosm Press, 2013.