

# DIFERENÇAS FINITAS: DO RACIOCÍNIO VISUAL À FORMALIZAÇÃO ALGÉBRICA — UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Rubens Vilhena Fonseca<sup>1</sup>, Nicolle Karolinne Palheta Alfonso<sup>2</sup>, Daniel Paulo do Nascimento Souza<sup>3</sup>, Richard Campos Vilhena Fonseca<sup>4</sup>, Arthur Sanches Amaral Lima<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil (rubens.vilhena@uepa.br)

<sup>2</sup>Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil

<sup>3</sup>Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil

<sup>4</sup>Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil

<sup>5</sup>Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil

*Resumo:* Apresenta-se uma sequência didática que articula as fases visual, aritmética e algébrica do pensamento matemático através do método das diferenças finitas, para a formação de professores do Ensino Médio. Diagramas em cascata, tabelas e gráficos conduzem do concreto ao formal, articulando o Teorema Polinomial das Diferenças, aplicações reais (pizza, círculos, queda livre), recursos computacionais e a BNCC.

*Palavras-chave:* Diferenças finitas; Raciocínio visual; Formação de professores; Pensamento algébrico; Funções polinomiais

## INTRODUÇÃO

O raciocínio visual desempenha um papel muito mais importante no trabalho dos matemáticos do que é geralmente reconhecido. Zimmerman e Cunningham (1991) e Dreyfus (1991) apontam para o enorme potencial de abordagens visuais para a aprendizagem significativa em Matemática. Neste artigo adotamos esse princípio: cada conceito matemático é apresentado simultaneamente por meio de uma tabela numérica, um gráfico da função e um gráfico das diferenças finitas por ordem.

Alguns tópicos da álgebra superior podem, com as devidas transposições didáticas, ser aplicáveis já na escola básica. Um exemplo paradigmático é o *Teorema da Diferença Polinomial*: dado um conjunto de valores de uma função numa progressão aritmética, as diferenças sucessivas entre termos consecutivos revelam o grau do polinômio. Essa determinação pode ainda ser usada no aprofundamento do estudo de progressões aritméticas (Souza, 2013).

Do ponto de vista histórico, o método é milenar. Li Shun-Fêng utilizou-o no século VII; Newton sistematizou-o no XVII; Babbage, no XIX, projetou máquinas que calculavam polinômios por diferenças sucessivas — precursoras dos computadores modernos (Samson, 2005). Apesar dessa riqueza, o tema raramente aparece na formação de professores brasileiros.

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema da Diferença Polinomial e sua aplicação a questões do

Ensino Médio, por meio de uma sequência didática investigativa com ênfase visual, articulada às habilidades EM13MAT303, EM13MAT305 e EM13MAT401 da BNCC (Brasil, 2018).

## MATERIAL E MÉTODOS

O referencial teórico apoia-se em Beji (2018), Larson e Boswell (2015), Usiskin et al. (2004) e Souza (2013). A metodologia é a *sequência didática investigativa* (4 fases) para formação inicial ou continuada de professores do Ensino Médio. A visualização é um componente central: para cada exemplo são produzidos um gráfico da função correspondente aos pontos, uma tabela de diferenças e um gráfico de linhas das diferenças por ordem.

### O Método e o Teorema

**Definições.** Seja  $f$  uma função avaliada sobre uma progressão aritmética (PA) de razão  $s$ .

Define-se recursivamente:

$$\Delta^0 y_i = y_i, \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

### Teorema da Diferença Polinomial

(Beji, 2018; UCSMP, 2008; Richeson, 2018)

A função  $y = f(x)$  é um polinômio de grau  $n$  se, e somente se, para qualquer PA de valores de  $x$ , a  $n$ -ésima diferença dos valores correspondentes de  $y$  é constante e não nula, e a  $(n-1)$ -ésima diferença não é constante. Essa constante vale:

$$s^n \cdot a_0 \cdot n!,$$

onde  $a_0$  é o coeficiente líder e  $s$  é a razão da PA.

### Prova por indução (esboço)

Adaptado de Richeson (2018) e Beji (2018).

#### Caso base ( $n = 1$ ):

Seja  $p(x) = cx + b$ . Então:

$$p(x + s) - p(x) = cs = s^1 \cdot c \cdot 1!$$

#### Passo indutivo:

Suponha o resultado válido para grau  $n - 1$ .

Seja um polinômio de grau  $n$ :

$$p(x) = cx^n + dx^{n-1} + (\text{termos de ordem inferior}).$$

$$\text{Então: } p(x + s) - p(x) = cns x^{n-1} + (\text{termos de ordem inferior}).$$

Esse polinômio auxiliar tem grau  $n - 1$  e coeficiente líder  $cns$ .

Pela hipótese de indução, após mais  $n - 1$  diferenças, a constante será:

$$cns \cdot s^{n-1} \cdot (n - 1)! = c \cdot s^n \cdot n!. \quad (1)$$

Portanto, o processo completo de  $n$  níveis de diferenças produz a constante:

$$s^n \cdot c \cdot n!. \quad \square$$

### Sequência Didática — Fases

Fase 1 — Exploração Lúdica: professores vivenciam os três Desafios matemáticos (Seção Resultados), sem explicação prévia, descobrindo o método pelo raciocínio visual e aritmético. O apelo visual — visualizar as diferenças como "degraus decrescentes" — é o ponto de entrada (Zimmerman; Cunningham, 1991).

Fase 2 — Formalização: enuncia-se o Teorema, apresenta-se a prova por indução, explora-se a fórmula  $s^n \cdot a_0 \cdot n!$  com exemplos de razão  $s \neq 1$  (incluindo o exemplo de Richeson, 2018), e apresenta-se o contra-exemplo exponencial.

Fase 3 — Aplicações e Modelagem: trabalham-se os problemas visuais (pizza, círculos, diagonais, queda livre) articulando tabela numérica, gráfico da função e gráfico das diferenças. Cada aplicação segue o princípio de que o raciocínio visual pode constituir a essência da matemática rigorosa (Dreyfus, 1991).

Fase 4 — Computação e Transposição Didática: usando recursos computacionais como o Mathematica e Python é possível automatizar o cálculo e a a visualização, liberando o professor para se concentrar na interpretação pedagógica.

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados estão organizados em grupos progressivos: exemplos canônicos do Teorema; aplicações motivadoras (pizza, círculos, diagonais, queda livre); atividade lúdica dos Desafios; extensão ao caso complexo; e discussão pedagógica. Em todos os casos são apresentados: legenda da tabela de diferenças, tabela, gráfico da função e gráfico das diferenças por ordem.

#### Exemplo 1 — Função Linear (grau 1)

A função  $y = 4x + 5$  produz, para a PA,  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  (razão  $s = 1$ ), primeiras diferenças todas iguais a 4. A constante teórica é  $s^1 \cdot 4 \cdot 1! = 4$ .

Tabela 1. Diferenças de 1ª ordem para  $y = 4x + 5$  ( $a_0 = 4$ ,  $s = 1$ ).

| x | y = 4x + 5 | $\Delta^1$ |
|---|------------|------------|
| 1 | 9          | —          |
| 2 | 13         | 4          |
| 3 | 17         | 4          |
| 4 | 21         | 4          |
| 5 | 25         | 4          |

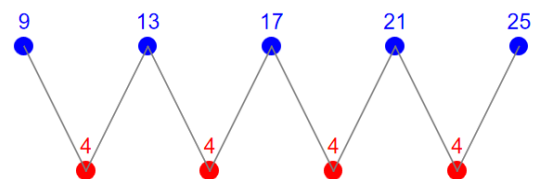


Figura 1. Diagrama de diferenças finitas para  $y = 4x + 5$ : a primeira diferença estabiliza em 4.

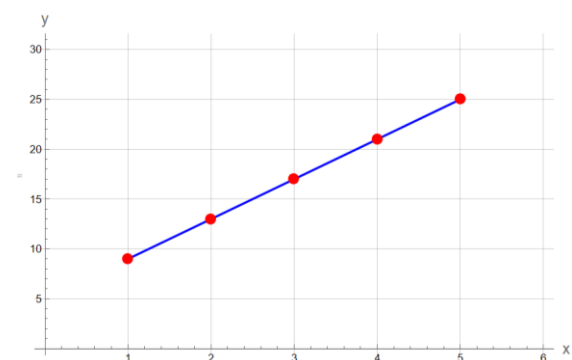


Figura 2. Curva de  $y = 4x + 5$  com pontos amostrais.

#### Exemplo 2 — Função Quadrática (grau 2)

Para  $y = 5x^2$ , as primeiras diferenças (5, 15, 25, 35, 45, 55) formam uma PA de razão 10 — o que conecta imediatamente o método com progressões aritméticas (EM13MAT303). As segundas diferenças são constantes e iguais a 10 =  $1^2 \cdot 5 \cdot 2!$

Tabela 2. Diferenças de 1ª e 2ª ordem para  $y = 5x^2$  ( $a_0 = 5$ ,  $s = 1$ ).

| x | $y = 5x^2$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|---|------------|------------|------------|
| 1 | 5          | —          | —          |
| 2 | 20         | 15         | —          |
| 3 | 45         | 25         | 10         |
| 4 | 80         | 35         | 10         |
| 5 | 125        | 45         | 10         |
| 6 | 180        | 55         | 10         |

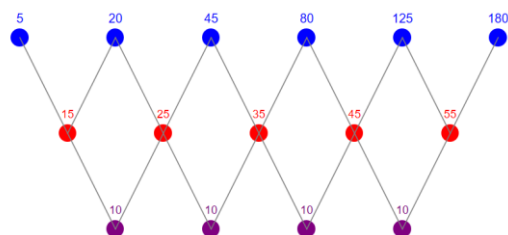


Figura 3. Diagrama de diferenças finitas para  $y = 5x^2$ :  $\Delta^1$  forma uma PA de razão 10;  $\Delta^2 = 10$  constante.

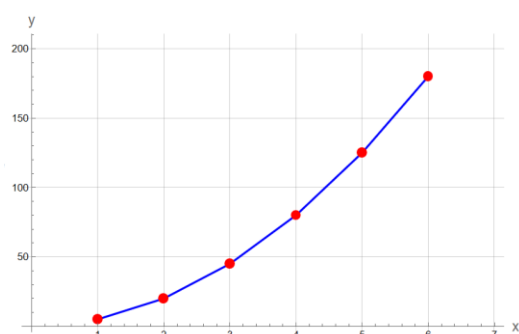


Figura 4. Curva de  $y = 5x^2$

### Exemplo 3 — Função Cúbica (grau 3)

A Tabela 3 exibe as três ordens de diferenças para  $h(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ , avaliada em  $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . As terceiras diferenças são todas iguais a 6 =  $1^3 \cdot 1 \cdot 3!$ . Observe que bastaria ter a tabela de valores — sem conhecer a fórmula — para determinar o grau 3 e o coeficiente líder  $a_0 = 1$ . Esta é a essência do método como ferramenta de descoberta.

Tabela 3. Diferenças para  $h(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$  ( $a_0 = 1$ ,  $s = 1$ ).

| x  | $h(x)$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|----|--------|------------|------------|------------|
| -1 | 34     | —          | —          | —          |
| 0  | 50     | 16         | —          | —          |
| 1  | 56     | 6          | -10        | —          |
| 2  | 58     | 2          | -4         | 6          |
| 3  | 62     | 4          | 2          | 6          |
| 4  | 74     | 12         | 8          | 6          |
| 5  | 100    | 26         | 14         | 6          |

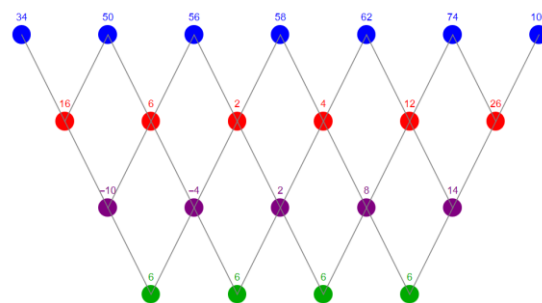


Figura 5. Diagrama de diferenças finitas para  $h(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ :  $\Delta^3 = 6$  constante.

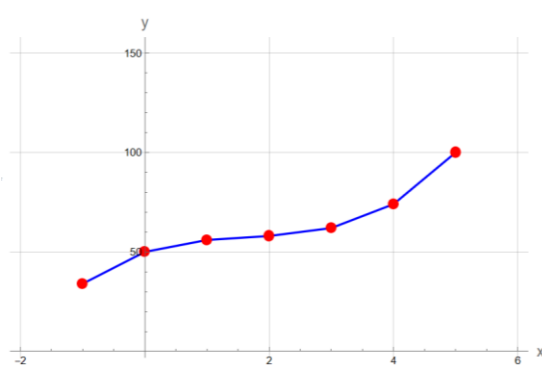


Figura 6. Curva de  $h(x)$

### Exemplo 4 — Razão $s = 2$ (Richeson, 2018)

Richeson (2018) apresenta o seguinte exemplo revelador:  $f(x) = 7x^3 + 4x^2 - 2x + 15$  avaliada na PA 0, 2, 4, 6, 8 (razão  $s = 2$ ). A constante das 3ªs diferenças deve ser  $s^3 \cdot c \cdot 3! = 2^3 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ . Na Tabela 4 observa-se que as terceiras diferenças não são ainda constantes (variam entre 318 e 342), pois precisaríamos de mais pontos e porque os dados podem vir de medidas experimentais sujeitas a pequenos erros. Mesmo assim, a faixa estreita em torno de 336 revela a **tendência** para o valor teórico e funciona como uma verificação elegante de que estamos, de fato, diante de um comportamento cúbico.

Tabela 4. Diferenças para  $f(x) = 7x^3 + 4x^2 - 2x + 15$  com razão  $s = 2$ .

| x (s=2) | $f(x)$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---------|--------|------------|------------|------------|
| 0       | 15     | —          | —          | —          |
| 2       | 83     | 68         | —          | —          |
| 4       | 399    | 316        | 248        | —          |
| 6       | 1281   | 882        | 566        | 318        |
| 8       | 3071   | 1790       | 908        | 342        |

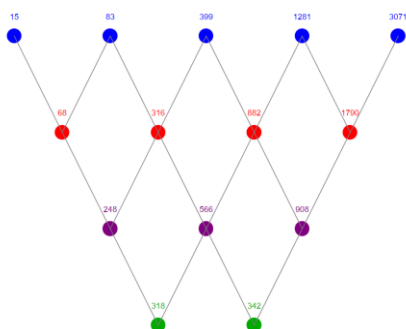


Figura 7. Diagrama de diferenças finitas para  $f(x) = 7x^3 + 4x^2 - 2x + 15$  com  $s = 2$ . A constante teórica é  $2^3 \cdot 7 \cdot 3! = 336$ .

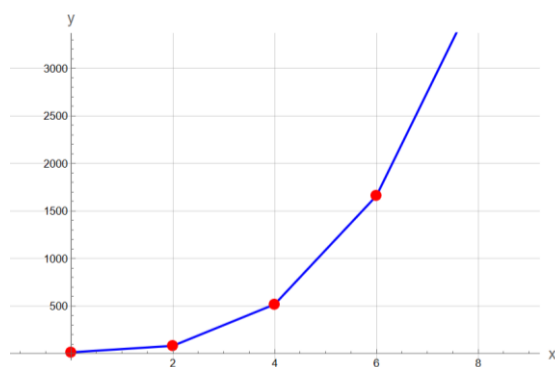


Figura 8. Curva de  $f(x)$  avaliada nos pontos da PA de razão  $s = 2$ .

### Aplicação 1 — Cortes de Pizza

O problema dos cortes de pizza é um exemplo clássico de como a Matemática conecta desenho, contas e fórmulas. A pergunta é: qual é o número máximo de pedaços que podemos obter ao cortar uma pizza com  $n$  cortes retos, cada corte atravessando toda a pizza e cruzando todos os cortes anteriores? Se não fizermos nenhum corte, temos 1 pedaço; com 1 corte, obtemos 2 pedaços; com 2 cortes, 4 pedaços; com 3 cortes, 7 pedaços; e assim sucessivamente (Samson, 2005).

Quando colocamos esses valores em uma tabela e calculamos as diferenças entre termos consecutivos, vemos que as **segundas diferenças** são todas iguais a 1 (ver Tabela 5). Isso mostra que a sequência  $P(n)$  (número máximo de pedaços) é dada por um polinômio de 2º grau. Em geral, para um polinômio quadrático  $P(n) = an^2 + bn + c$ , tomado com passo 1, a segunda diferença é sempre  $2a$ . Assim, se a segunda diferença é 1, então  $2a = 1$ , logo  $a = \frac{1}{2}$ .

No caso da pizza de Steiner, essa ideia leva naturalmente à fórmula

$$P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Essa expressão também pode ser escrita como  $P(n) = \binom{n+1}{2} + 1$ : o termo  $\binom{n+1}{2}$  conta certas combinações relacionadas aos cortes, e o +1 representa o pedaço inicial da pizza. A fórmula reproduz exatamente os números da tabela (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) e explica por que o gráfico de  $P(n)$  é uma parábola voltada para cima.

Tabela 5. Diferenças finitas para os pedaços de pizza com  $n$  cortes.

| $n$ (cortes) | $P(n)$ pedaços | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|--------------|----------------|------------|------------|
| 0            | 1              | —          | —          |
| 1            | 2              | 1          | —          |
| 2            | 4              | 2          | 1          |
| 3            | 7              | 3          | 1          |
| 4            | 11             | 4          | 1          |
| 5            | 16             | 5          | 1          |
| 6            | 22             | 6          | 1          |

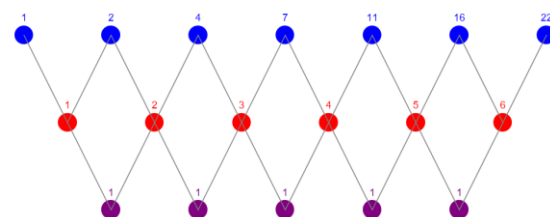


Figura 9. Diagrama de diferenças finitas para os pedaços de pizza  $P(n)$ :  $\Delta^2 = 1$  constante  $\rightarrow$  grau 2.

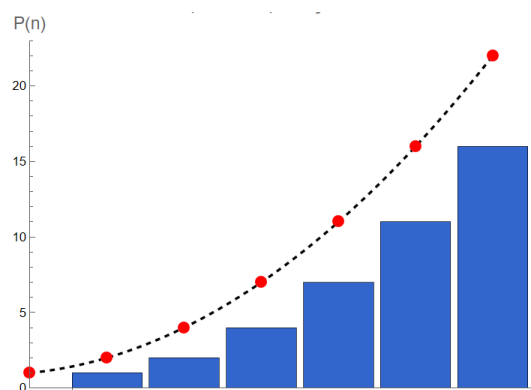


Figura 10. Número máximo de pedaços  $P(n)$  com  $n$  cortes: barras + modelo quadrático

Tomando os pontos (0, 1), (1, 2) e (2, 4) e ajustando um polinômio quadrático  $P(n) = an^2 + bn + c$ , obtemos a expressão

$$P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Esta fórmula pode ser escrita também como

$$P(n) = \binom{n+1}{2} + 1,$$

pois  $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$  é o número de pares de cortes (ou seja, o número de interseções internas possíveis entre as retas) e o termo adicional +1 corresponde ao pedaço inicial da pizza, antes de qualquer corte.

Para  $n = 6$  cortes, temos

$$P(6) = \frac{6^2 + 6 + 2}{2} = \frac{36 + 6 + 2}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

pedaços de pizza.

### Aplicação 2 — Interseção de Círculos

Dois círculos se interceptam no máximo em 2 pontos; três, em 6; quatro, em 12; cinco, em 20. A Tabela 6 exibe as diferenças.

Tabela 6. Diferenças finitas para interseções de  $n$  círculos.

| $n$<br>(círculos) | $I(n)$<br>interseções | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|-------------------|-----------------------|------------|------------|
| 2                 | 2                     | —          | —          |
| 3                 | 6                     | 4          | —          |
| 4                 | 12                    | 6          | 2          |
| 5                 | 20                    | 8          | 2          |
| 6                 | 30                    | 10         | 2          |

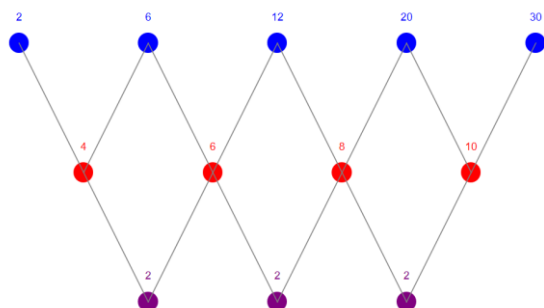


Figura 11. Diagrama de diferenças finitas para  $I(n) = n(n-1)$ :  $\Delta^2 = 2$  constante  $\rightarrow$  grau 2.

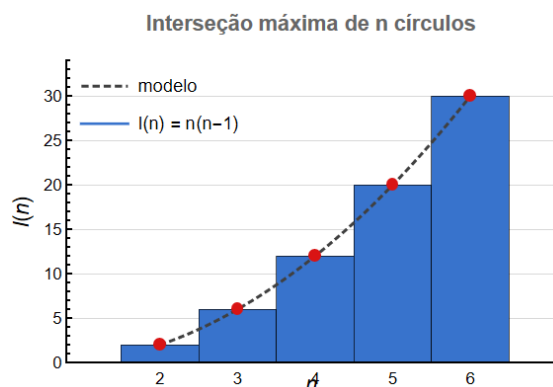


Figura 12. Interseções máximas  $I(n)$  de  $n$  círculos: barras + modelo

As segundas diferenças serem todas iguais a 2 mostra que estamos diante de uma sequência **quadrática**, isto

é, descrita por um polinômio de grau 2 em  $n$ . No caso da sequência  $I(n) = 2, 6, 12, 20, 30, \dots$ , obtém-se a fórmula

$$I(n) = n(n-1),$$

que vale, por exemplo,  $I(2) = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $I(3) = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $I(4) = 4 \cdot 3 = 12$  e assim por diante.

Uma forma combinatória de entender essa expressão é a seguinte: quando acrescentamos um novo círculo, ele pode cruzar **cada um** dos  $n-1$  círculos já desenhados em exatamente dois pontos, produzindo  $2(n-1)$  novas interseções. Por isso, as primeiras diferenças da sequência de interseções são 2, 4, 6, 8, ..., uma progressão aritmética de razão 2; ao calcular as segundas diferenças dessa progressão (diferença das diferenças), obtemos sempre o valor 2, o que confirma que o modelo adequado para  $I(n)$  é um polinômio de grau 2.

### Aplicação 3 — Diagonais de Polígonos Convexos

A Tabela 7 relaciona o número de lados  $n$  com o número de diagonais  $d$ . As segundas diferenças são constantes e iguais a 1  $\rightarrow$  grau 2.

Tabela 7. Diferenças finitas para as diagonais de polígonos convexos

| $n$ | $d(n)$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|-----|--------|------------|------------|
| 3   | 0      | —          | —          |
| 4   | 2      | 2          | —          |
| 5   | 5      | 3          | 1          |
| 6   | 9      | 4          | 1          |
| 7   | 14     | 5          | 1          |
| 8   | 20     | 6          | 1          |

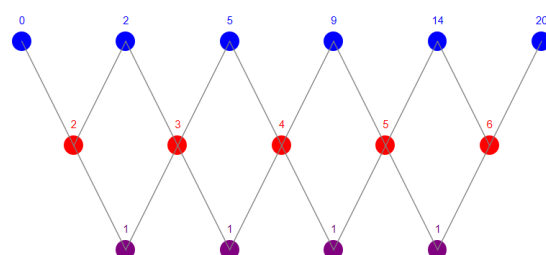


Figura 13. Diagrama de diferenças finitas para  $d(n) = n(n-3)/2$ :  $\Delta^2 = 1$  constante  $\rightarrow$  grau 2

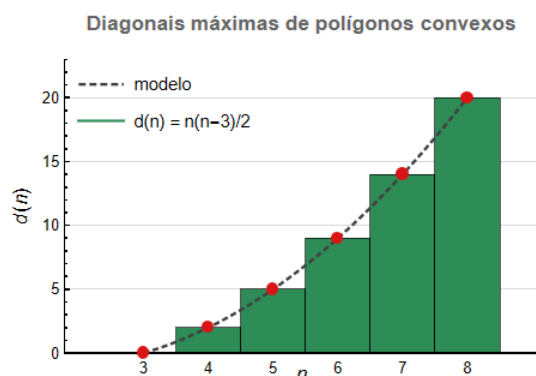


Figura 14. Diagonais  $d(n)$  de polígonos convexos: barras + modelo

Considerando os vértices  $(3, 0)$ ,  $(4, 2)$  e  $(5, 5)$ , podemos procurar um polinômio de 2º grau da forma  $d(n) = an^2 + bn + c$  que modele o número de diagonais de um polígono convexo com  $n$  lados. Substituindo cada par  $(n, d)$  na expressão e resolvendo o sistema de equações, encontramos  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{3}{2}$  e  $c = 0$ . Assim, obtemos a fórmula:

$$d(n) = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Essa fórmula também pode ser entendida por um raciocínio combinatório. Em um polígono de  $n$  lados, a partir de cada vértice conseguimos traçar  $n - 3$  diagonais (não podemos ligar o vértice a si mesmo nem aos dois vértices adjacentes, pois esses formam lados, não diagonais). Como existem  $n$  vértices, parece haver  $n(n - 3)$  diagonais; porém, cada diagonal foi contada duas vezes (uma vez a partir de cada extremidade). Por isso, dividimos por 2 e chegamos novamente a

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Dessa forma, temos **dois caminhos independentes** que levam à mesma expressão: um algébrico (ajuste do polinômio a partir da tabela de valores) e outro combinatório (contagem de diagonais a partir dos vértices). Essa concordância entre métodos diferentes é um exemplo importante de “demonstração por múltiplas representações”, e ajuda a reforçar a confiança dos alunos na fórmula encontrada ((EM13MAT401).

#### Aplicação 4 — Modelo de Queda Livre

A Tabela 8 apresenta dados de queda livre coletados com sensor de movimento (Usiskin et al., 2004). As segundas diferenças ( $\Delta^2 \approx -0,025$ ) são aproximadamente constantes  $\rightarrow$  modelo quadrático.

Tabela 8. Queda livre — diferenças finitas (Usiskin et al., 2004).

| $t$ (s) | $h$ (m) | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|---------|---------|------------|------------|
| 0,00    | 2,000   | —          | —          |
| 0,05    | 1,988   | -0,012     | —          |
| 0,10    | 1,951   | -0,037     | -0,025     |
| 0,15    | 1,890   | -0,061     | -0,024     |
| 0,20    | 1,804   | -0,086     | -0,025     |
| 0,25    | 1,694   | -0,110     | -0,024     |

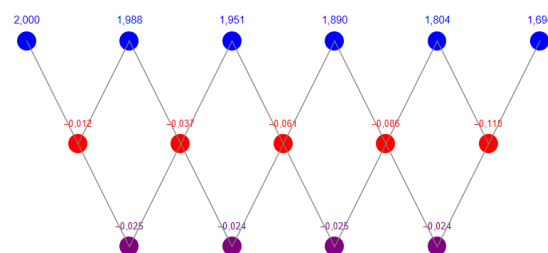


Figura 15. Diagrama de diferenças finitas para dados de queda livre:  $\Delta^2 \approx -0,025$  constante  $\rightarrow$  modelo quadrático.

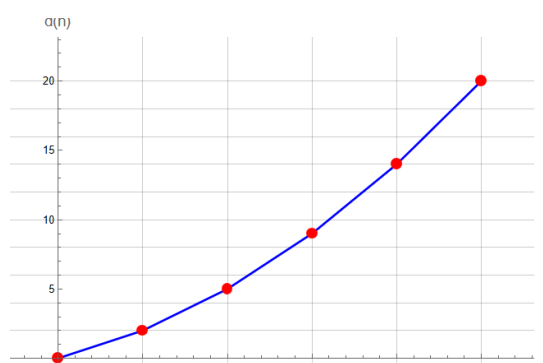


Figura 16. Curva do modelo  $h(t) \approx -4,9t^2 + 2$  ajustado aos dados experimentais

Quando analisamos a tabela da queda livre e calculamos as diferenças entre alturas sucessivas, percebemos que as **segundas diferenças** são quase constantes (todas em torno de  $-0,025$ ). Em Matemática, isso é um forte indício de que a função altura  $h(t)$  se comporta como um polinômio **quadrático** no tempo. Ajustando um modelo  $h(t) = at^2 + bt + c$  aos dados, obtemos aproximadamente  $h(t) \approx -4,9t^2 + 2$ , o que coincide com a expressão da Física para o movimento de queda livre  $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h_0$ . Com  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  e altura inicial  $h_0 = 2 \text{ m}$ . Assim, o simples cálculo de segundas diferenças na tabela não só revela o “formato parabólico” de  $h(t)$ , mas também conecta diretamente a Matemática ao modelo físico de queda com aceleração praticamente constante, criando uma oportunidade clara de interdisciplinaridade entre Matemática e Física ((EM13MAT305).

### O Contra-Exemplo: Função Exponencial

Para delimitar o alcance do Teorema, é essencial apresentar um contra-exemplo. A Tabela 9 exibe as diferenças para  $y = 3^x$ : elas crescem exponencialmente e nunca se estabilizam.

Tabela 9.  $y = 3^x$ : diferenças que não se estabilizam

| x | $3^x$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|-------|------------|------------|------------|
| 1 | 3     | —          | —          | —          |
| 2 | 9     | 6          | —          | —          |
| 3 | 27    | 18         | 12         | —          |
| 4 | 81    | 54         | 36         | 24         |
| 5 | 243   | 162        | 108        | 72         |

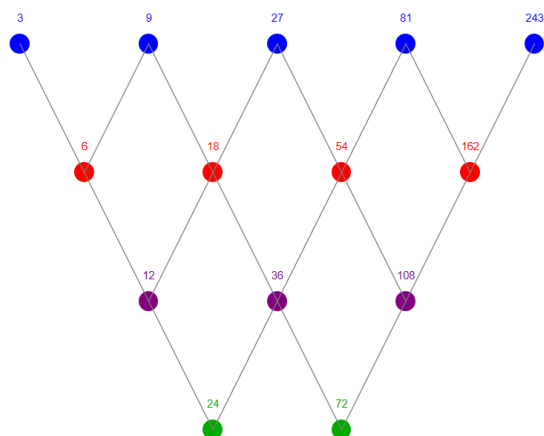


Figura 17. Diagrama de diferenças finitas para  $y = 3^x$ : as diferenças crescem em todos os níveis — nunca se estabilizam.

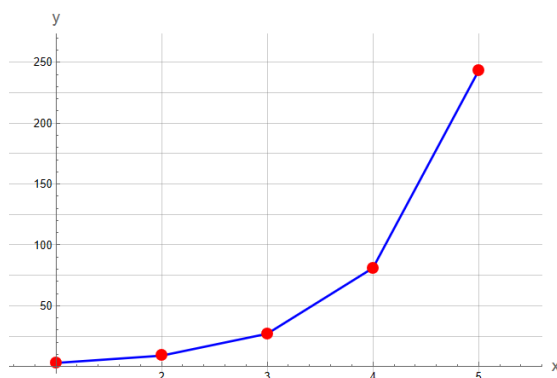


Figura 18. Curva de  $y = 3^x$

Quando aplicamos o método das diferenças à função  $y = 3^x$  (com  $x = 1, 2, 3, 4, 5$ ), as coisas se comportam de modo bem diferente dos casos quadráticos e cúbicos. As primeiras diferenças já crescem rápido, as segundas diferenças crescem ainda mais e, mesmo na terceira diferença, os valores continuam aumentando, sem tendência a “ficar constantes” em nenhum nível. Visualmente, o gráfico

de diferenças mostra uma escadinha que só sobe, sem nunca se estabilizar.

Esse contraste é importante para os alunos entenderem o alcance do Teorema: “diferenças de ordem  $k$  constantes caracterizam funções polinomiais de grau  $k$ ”. Isso **vale apenas** para funções polinomiais; a função exponencial  $y = 3^x$  não é polinômio de grau nenhum e, por isso, não se encaixa nesse critério. Assim, o contraexemplo da exponencial serve para mostrar que o método das diferenças é uma ferramenta poderosa, mas com limite bem definido: ele identifica e descreve padrões polinomiais, enquanto funções como as exponenciais ficam fora desse quadro.

### Extensão ao Caso Complexo

É possível levar a ideia de diferenças finitas para além dos números reais e trabalhar também com **coeficientes e razões complexas** (Beiji, 2018). Considere, por exemplo, o polinômio quadrático  $w(x) = (2 + i)x^2 - ix + 1$ , com passo  $s = 1$  e ponto inicial  $x_0 = -1$ . Construindo a tabela de valores e diferenças, obtemos:

- $w(-1) = 2 - 2i$
- $w(0) = 1$
- $w(1) = 2 + i$
- $w(2) = 5 + 3i$

A partir desses valores, calculamos as primeiras diferenças  $\Delta^1 w$  e as segundas diferenças  $\Delta^2 w$ . O resultado é que as **segundas diferenças são constantes** e valem  $4 + 2i$ , exatamente igual a  $2(2 + i) \cdot 1^2 \cdot 2!$ , isto é,  $2as^2 \cdot 2!$  com  $a = 2 + i$  e  $s = 1$ . Isso mostra que a fórmula geral das diferenças finitas para polinômios continua válida mesmo quando trabalhamos com números complexos.

Um detalhe interessante para discutir com os alunos mais avançados é que o passo  $s$  nem precisa ser real: podemos escolher um passo complexo e ainda assim a identidade se mantém, desde que a função seja polinomial. Nesse contexto “puro” de polinômios, o método das diferenças é **exato**, diferentemente das aproximações numéricas usadas em equações diferenciais parciais (EDPs), em que o passo  $s$  deve ser real e pequeno para garantir boa aproximação (Burden, 2015).

A Tabela 10 mostra as diferenças para  $w(x) = (2+i)x^2 - ix + 1$  com coeficientes complexos.

Tabela 10 – Diferenças complexas

| m | $x_0 + ms$ | $w(x)$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ |
|---|------------|--------|------------|------------|
| 0 | -1         | $2-2i$ | —          | —          |
| 1 | 0          | 1      | $-1+2i$    | —          |
| 2 | 1          | $2+i$  | $1-i$      | $2-3i$     |
| 3 | 2          | $5+3i$ | $3+2i$     | $2-3i$     |

**Atividade Lúdica — Os Desafios do Jovem Newton**

Em vez de pedir a um aluno para "pensar em um número", pedimos para "pensar em uma fórmula polinomial com coeficientes inteiros" e informar apenas os valores em  $x = 0, 1, 2$  (e, no caso cúbico,  $x = 3$ ). O professor afirma que vai adivinhar a fórmula. A seguir o mecanismo é explicado visualmente — a mesma apresentação em tabela com "degraus" que nosso personagem histórico Newton certamente apreciaria.

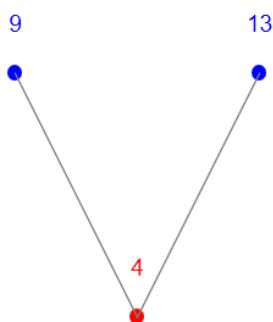
Certa vez um professor de Matemática conheceu um pescador em Ponta de Pedras, terra natal do escritor paraense Dalcídio Jurandir (1909–1979). O pescador lhe contou que um livro antigo narrava episódios da infância de Newton, levado pelas águas do Tapajós num naufrágio. Depois de uma aula sobre polinômios, o jovem Newton vai ao recreio e propõe uma versão sofisticada do jogo "adivinha um número" — aqui transcrita em linguagem matemática.

**Desafio 1 — Adivinhe a Função Afim**

"Pense numa função afim com coeficientes inteiros" e informe  $f(0)$  e  $f(1)$ . Exemplo:  $f(x) = 4x + 9 \rightarrow f(0) = 9, f(1) = 13$ :

Tabela 11. Desafio 1 —  $f(x) = 4x + 9$ .

|            | $x = 0$ | $x = 1$ |
|------------|---------|---------|
| $f(x)$     | 9       | 13      |
| $\Delta^1$ | —       | 4       |

Figura 19. Diagrama de diferenças — Desafio 1:  $a = \Delta^1 = 4, b = f(0) = 9$ .

A 1ª diferença é o coeficiente  $a = 4$ ; o valor em  $x = 0$  é  $b = 9$ . Logo  $f(x) = 4x + 9$ .

**Desafio 2 — Adivinhe a Função Quadrática**

"Pense numa função quadrática com coeficientes inteiros" e informe  $f(0), f(1), f(2)$ . Exemplo:  $f(x) = 6x^2 + 4x + 7$ :

Tabela 12. Desafio 2 —  $f(x) = 6x^2 + 4x + 7$ .

|            | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ |
|------------|---------|---------|---------|
| $f(x)$     | 7       | 17      | 39      |
| $\Delta^1$ | —       | 10      | 22      |
| $\Delta^2$ | —       | —       | 12      |

O coeficiente  $a = \Delta^2/2 = 12/2 = 6$ ;  $b = \Delta^1(x=0) - a = 10 - 6 = 4$ ;  $c = f(0) = 7$ . Logo  $f(x) = 6x^2 + 4x + 7$ .

Este é o mesmo princípio apresentado visualmente em Fonseca e Pinheiro (2018) como "desafio mental": a aritmética das diferenças explica completamente o fenômeno, mas os alunos mais curiosos desejarão uma demonstração formal — o que é exatamente o caminho para o aprofundamento do pensamento algébrico (ver Figura 20).

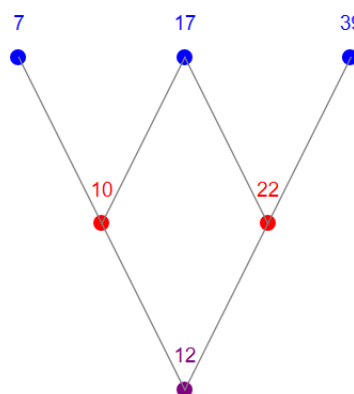


Figura 20. Diagrama de diferenças — Desafio 2

**Desafio 3 — Adivinhe a Função Cúbica**

"Pense numa função cúbica com coeficientes inteiros" e informe  $f(0), f(1), f(2), f(3)$ . Exemplo:  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ :

Tabela 13. Desafio 3 —  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ .

|            | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| $f(x)$     | 50      | 56      | 58      | 62      |
| $\Delta^1$ | —       | 6       | 2       | 4       |
| $\Delta^2$ | —       | —       | -4      | 2       |
| $\Delta^3$ | —       | —       | —       | 6       |

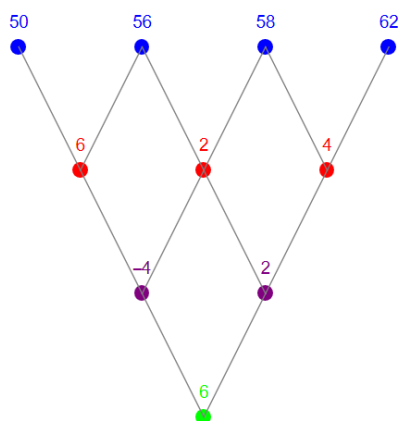


Figura 21. Diagrama de diferenças — Desafio 3: coeficientes lidos na diagonal esquerda (50; 6; -4; 6).

Usando os coeficientes diagonais (50; 6; -4; 6) na fórmula de Newton-Gregory obtém-se  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 50$ . Conclusão natural: poucos colegas deviam querer brincar com o Newton.

#### Discussão — Implicações Pedagógicas e BNCC

Os resultados demonstram que o método das diferenças finitas, quando apresentado com ênfase visual, oferece uma ponte fértil entre a escola básica e a matemática superior. Identificam-se cinco contribuições centrais:

(i) **Pensamento algébrico antes da formalização** (EM13MAT303): o trabalho visual com padrões numéricos — identificar a ordem de constância das diferenças — desenvolve a capacidade de generalização antes de qualquer símbolo.

(ii) **Contextualização histórica**: de Li Shun-Fêng à máquina de Babbage, o método é apresentado como produção humana e culturalmente contextualizada, conforme as orientações da BNCC para o uso da história da Matemática.

(iii) **Demonstração por múltiplas representações** (EM13MAT401): a verificação de  $d(n) = n(n-3)/2$  por diferenças finitas e por argumento combinatório exemplifica a articulação entre diferentes registros de representação.

(iv) **Integração com a Física** (EM13MAT305): a modelagem da queda livre a partir de dados experimentais viabiliza trabalho interdisciplinar.

(v) **Literacia computacional**: o Mathematica e o Python automatizam a visualização, permitindo ao professor concentrar-se na interpretação pedagógica em vez dos cálculos mecânicos.

#### CONCLUSÃO

O método das diferenças finitas constitui uma das pontes mais ricas entre a escola básica e a matemática superior. O presente trabalho demonstrou que é possível conduzir professores da Educação Básica a:

compreender o Teorema da Diferença Polinomial de forma lúdica e visual; verificar sua consistência por meio de tabelas numéricas, gráficos de funções e gráficos de diferenças em múltiplos exemplos (funções lineares, quadráticas, cúbicas, sequências de pizza e círculos, dados de queda livre); reconhecer sua extensão ao campo complexo; e articulá-lo com as habilidades da BNCC para o Ensino Médio.

A ênfase visual — um gráfico da função correspondente aos pontos, uma tabela de diferenças e um gráfico de linhas das diferenças por ordem para cada exemplo — revelou-se um recurso pedagógico central: o raciocínio visual pode constituir a essência da matemática rigorosa, e não apenas um apoio intuitivo (Dreyfus, 1991). Como desdobramento, pretende-se aplicar a sequência em oficinas de formação continuada de professores da rede pública estadual do Pará, avaliando o desenvolvimento do pensamento algébrico e das concepções sobre demonstração matemática.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Matemática da UEPA pelo apoio institucional e aos professores participantes dos grupos de estudo que motivaram esta proposta.

#### REFERÊNCIAS

- Beji, S. (2018). A Fundamental Relationship of Polynomials and Its Proof. *Advances in Pure Mathematics*, 8, 559–563. Disponível em: <https://doi.org/10.4236/apm.2018.86033> (Acesso livre).
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> (Acesso livre).
- Burden, R. L. (2015). *Análise Numérica*. São Paulo: Cengage Learning.
- Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. *Proceedings of the 15th Conference of the PME*, Assisi, v. 1, pp. 33–48.
- Fonseca, R. V.; Pinheiro, G. (2018). Aritmética e Álgebra: a possibilidade de estabelecer uma dialética entre o concreto e o abstrato. *[Artigo não publicado]*. UEPA, Belém.
- Larson, R.; Boswell, L. (2015). *Big Ideas Math: Algebra 2*. Big Ideas Learning. Disponível em: <https://www.bigideaslearning.com/programs/big-ideas-math> (site do editor).
- Richeson, D. (2018). Finite differences of polynomials. *Division by Zero — Blog de Matemática*. Disponível em:



<https://divisbyzero.com/2018/02/13/finite-differences-of-polynomials/> (Acesso livre).

Samson, D. (2005). Number Patterns, Cautionary Tales and Finite Differences. *Learning and Teaching Mathematics*, 3, 3–8. Disponível em: [http://www.amesa.org.za/amesal\\_n3\\_a2.pdf](http://www.amesa.org.za/amesal_n3_a2.pdf) (Acesso livre).

Souza, J. R. (2013). *Matemática discreta: tópicos para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — UEL. Disponível em: <https://repositorio.uel.br/items/440d8711-829c-4050-b583-4c30b28a50c1> (Acesso livre).

UCSMP. (2008). *UCSMP Advanced Algebra*. Scott Foresman.

Usiskin, Z. et al. (2004). *Discovering Advanced Algebra: An Investigative Approach*. Key Curriculum Press.

Zimmerman, W.; Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America.