



MÓDULO DE VIA COMO PARÂMETRO PARA ESTIMATIVA DA FREQUÊNCIA NATURAL DE TRILHOS: ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA

Maria Rafaela Bezerra de Macêdo Ribeiro¹

José Antônio Fontes Santiago¹

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro/ COPPE — Brasil

RESUMO

A rigidez da via permanente exerce influência direta no comportamento dinâmico do trilho, afetando suas frequências naturais e sua resposta estrutural sob carregamentos operacionais. Este trabalho investiga a relação entre o módulo de via e a frequência natural do trilho por meio de abordagens analítica e numérica. O trilho é modelado como uma viga de Euler–Bernoulli sobre fundação elástica do tipo Winkler, com formulação implementada em MATLAB. Em paralelo, desenvolve-se um modelo em elementos finitos no SAP2000, cuja validação inicial é realizada a partir de um caso experimental, servindo de base para análises paramétricas subsequentes. Os resultados evidenciam elevada concordância entre os modelos, com diferenças inferiores a 4% para os modos analisados, além de indicarem aumento consistente das frequências naturais com o acréscimo do módulo de via. Verifica-se ainda que formulações simplificadas são adequadas para o modo fundamental, enquanto modelos completos são necessários para a análise modal global de modos superiores. Os resultados demonstram o potencial da análise modal como ferramenta para estimativa da frequência natural a partir do módulo de via.

Palavras-chave: *Módulo de via, Trilho, Frequência natural.*

1. INTRODUÇÃO

A dinâmica da via férrea desempenha papel fundamental na compreensão da resposta vibratória do sistema ferroviário, sendo o trilho o principal elemento responsável pela transmissão das cargas e excitações dinâmicas entre o veículo e a infraestrutura (ESVELD, 2001). Nesse contexto, a análise modal constitui uma ferramenta essencial para a identificação das frequências naturais e dos modos de vibração predominantes, permitindo avaliar a resposta do sistema frente às excitações induzidas pelo tráfego ferroviário (THOMPSON, 2008).

A excitação contínua decorrente da passagem dos trens confere ao trilho um comportamento dinâmico complexo, cuja quantificação ainda representa um desafio. Nesse sentido, a determinação das frequências naturais associadas ao sistema trilho–via surge como um parâmetro relevante para a caracterização do seu desempenho dinâmico. Além disso, a correlação entre essas frequências e a rigidez do sistema, usualmente representada pelo módulo de via, possibilita a inferência de propriedades estruturais fundamentais da via permanente. Formulações clássicas da mecânica das estruturas permitem representar o trilho como uma viga sob fundação elástica (TIMOSHENKO,



1946) e por meio dela entender como a interação da infraestrutura pode influenciar nas respostas dinâmicas.

Assim, este trabalho tem como objetivo investigar o comportamento modal de trilhos ferroviários por meio de modelagem numérica e analítica, avaliando as frequências naturais do trilho e sua relação com a rigidez da via, com validação a partir de dados experimentais. Nesse contexto, destaca-se o potencial do módulo de via como parâmetro para estimativa da frequência natural do trilho.

2. DESENVOLVIMENTO

Com o objetivo de sintetizar as etapas metodológicas adotadas nesta pesquisa e facilitar a compreensão quanto à organização da abordagem proposta, apresenta-se, na Figura 1, o fluxograma das principais etapas desenvolvidas.

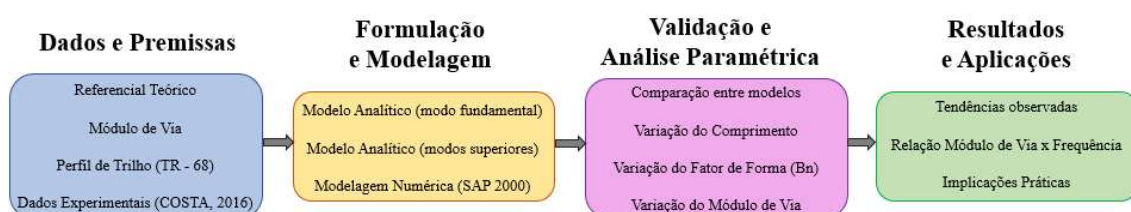


Figura 1. Fluxograma simplificado das etapas metodológicas e aplicação dos resultados.

A partir dessa organização, as seções seguintes detalham cada uma das etapas apresentadas, incluindo a formulação analítica, a modelagem numérica e os procedimentos de validação e análise.

2.1. Determinação Analítica da Frequência Natural do Trilho

A resposta dinâmica do trilho pode ser representada, em primeira aproximação, pelo comportamento de uma viga de Euler - Bernoulli apoiada sobre uma fundação elástica contínua, modelo este conhecido também como viga de Winkler da teoria de vigas sob base elástica (*Beam on Elastic Foundation – BOEF*), e que descreve a relação entre a rigidez flexional da viga e a rigidez da fundação, conforme expresso na Equação (1):

$$E.I \frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} + k \cdot y(x,t) + m \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Onde, E é o módulo de elasticidade do trilho, I é o momento de inércia da seção transversal, k representa a rigidez da fundação (módulo de via), m é a massa por unidade de comprimento do trilho e $y(x,t)$ é o deslocamento vertical ao longo do tempo. A equação combina o efeito da flexão de viga com a reação elástica do apoio, permitindo caracterizar a vibração livre do sistema.

A partir da resolução da equação diferencial homogênea, as frequências naturais geradas, quanto à flexão vertical podem ser obtidas considerando as condições de contorno e os modos de vibração associados. Para um modelo de viga de Euler – Bernoulli com *BOEF*, Irvine (2014) expressa a frequência natural pela Equação (2) como:



$$f_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot (B_n^4 + \lambda)}{m \cdot L^4}} \quad (2)$$

Sendo B_n , um parâmetro adimensional que depende do modo de vibração e das condições de contorno, L é o comprimento da viga equivalente e m , a massa linear. O termo λ (Equação 3) representa a influência da rigidez da fundação e é definido, segundo Subbaratnam (2023) como:

$$\lambda = \frac{k \cdot L^4}{E \cdot I} \quad (3)$$

Essa formulação mostra que a frequência natural depende diretamente da rigidez flexional do trilho ($E \cdot I$) e da rigidez da fundação (k), além das propriedades geométricas e de massa do sistema. Em condições onde o apoio é suficientemente rígido, o termo λ tende a aumentar, elevando as frequências naturais do sistema. Por outro lado, reduções no módulo de via — causadas por degradação do lastro, compactação insuficiente ou falhas de assentamento — resultam em diminuição das frequências naturais, alterando a resposta dinâmica e favorecendo fenômenos de ressonância.

Para modos mais simples de vibração (por exemplo, o 1º modo de vibração), a Equação (4) pode ser simplificada para a forma clássica apresentada por Matsuoka *et al.* (2022):

$$f_{n1} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

O que também evidencia a dependência direta entre a frequência natural e a rigidez da via. Essa aproximação é útil em análises preliminares e na interpretação de ensaios experimentais, bem como para calibração de modelos numéricos.

Quanto à forma modal das frequências associadas, Ike (2023), também parte da mesma equação diferencial apresentada por Irvine (2014). A solução assume comportamento harmônico que é resultado da equação diferencial de quarta ordem cuja solução geral é composta por funções trigonométricas e hiperbólicas.

As formas modais associadas são expressas na Equação (5) como:

$$\phi_n(x) = \cosh(\alpha_n \cdot x) - \cos(\alpha_n \cdot x) - \Lambda_n \cdot [\sinh(\alpha_n \cdot x) - \sin(\alpha_n \cdot x)] \quad (5)$$

Sendo, $\alpha_n = B_n / L$, e Λ_n definido pela Equação (6):

$$\Lambda_n = \frac{\cosh(B_n) - \cos(B_n)}{\sinh(B_n) - \sin(B_n)} \quad (6)$$

Onde o B_n encontrado está associado as constantes de Bernoulli para uma viga bi-engastada (engaste nas extremidades), com $B_1 = 4,73004$, $B_2 = 7,85321$, $B_3 = 10,9956$, ... e $B_n = \pi \cdot (n + 0.5)$, sendo n o número do modo correspondente.

2.2. Estudo de Caso e Modelagem Numérica do Trilho

Como análise inicial entre os métodos em questão para avaliação das formas modais e frequências naturais, foram considerados os monitoramentos de campo realizados por Costa (2016) na Estrada de Ferro Carajás (EFC), utilizando um vagão hopper descarregado, com carga vertical de 40 kN por roda. Para esse monitoramento, foram obtidos deslocamento de 2,1 mm e módulo de via de 6,3 MPa, sendo o perfil de trilho do tipo TR-68. Esse estudo de caso também tem sido adotado em análises complementares de deslocamentos e esforços, conforme apresentado em Ribeiro (2023) e em trabalhos subsequentes (RIBEIRO *et al.*, 2024; RIBEIRO *et al.*, 2025). A composição trafegava a uma velocidade considerada pseudoestática de 2,5 km/h, não implicando em majorações dinâmicas relevantes. As Figuras 2 e 3 apresentam, respectivamente, a campanha experimental e o registro do monitoramento.



Figura 2. Campanha experimental. Fonte: Costa (2016).

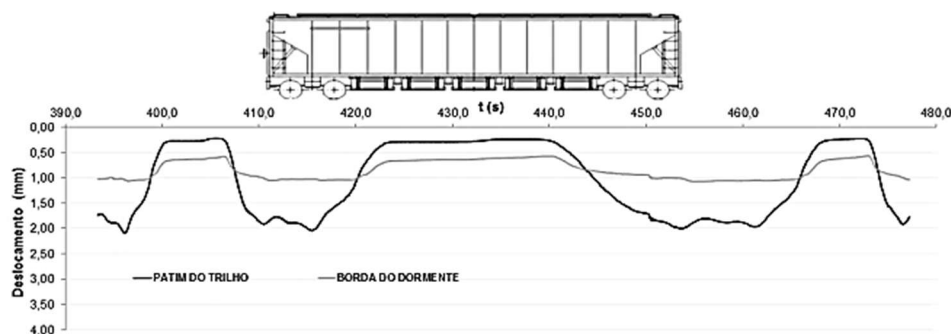


Figura 3. Deslocamentos experimentais. Fonte: Costa (2016).

Destaca-se que a frequência natural do trilho está associada às propriedades do sistema trilho–apoio (massa–mola) e não depende diretamente da condição instantânea de carregamento. No entanto, o valor do módulo de via obtido experimentalmente pode ser influenciado pelas condições sob as quais foi determinado. Em particular, níveis reduzidos de carregamento podem resultar em menor mobilização das camadas da via, influenciando a rigidez equivalente obtida. Ainda assim, o módulo de via é adotado como parâmetro representativo da rigidez do sistema trilho–apoio, devendo essa condição ser considerada na interpretação dos resultados. Cabe mencionar que análises complementares conduzidas para condições de carregamento mais elevadas, associadas a módulos de via superiores, indicam comportamento consistente com as tendências observadas neste estudo.



Adicionalmente, destaca-se que o modelo adotado considera uma representação idealizada da via por meio de apoio elástico contínuo, não contemplando descontinuidades locais, como a eventual presença de dormentes sem suporte (gaps) entre a base do dormente e o lastro. Tais descontinuidades podem alterar o comportamento da via sob carregamento, influenciando localmente a rigidez do sistema. Ainda assim, a abordagem adotada permite capturar, de forma adequada, o comportamento global do sistema trilho–apoio para fins de análise modal. Para fins de modelagem, essa rigidez foi representada por molas discretas distribuídas ao longo do trilho, conforme descrito na sequência.

Para a concepção do modelo numérico utilizando o software SAP 2000 foi adotado o elemento do tipo *frame* e molas com rigidez equivalentes à de 6,3 MPa espaçadas a cada 0,6 m (valor este equivalente ao espaçamento entre dormentes), gerando um valor de 3,78 MPa, com a condição bi-engastada nas extremidades. O módulo de elasticidade E do trilho foi 210.000 MPa e o momento de inércia obtido pela modelagem da seção foi próximo de $3,92 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$, conforme é definido no PIM – 01 (Procedimento de Inspeção de Materiais) da norma do DNIT (2015). Nas Figuras 4 e 5, seguem as dimensões do perfil adotado e da modelagem realizada com o deslocamento obtido para essa primeira análise obtida em campo.

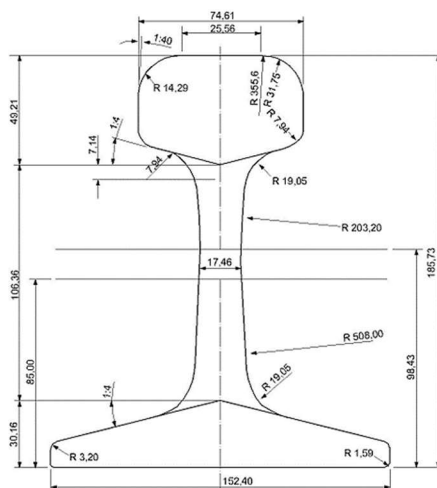


Figura 4. Perfil TR – 68. Fonte: DNIT (2015)

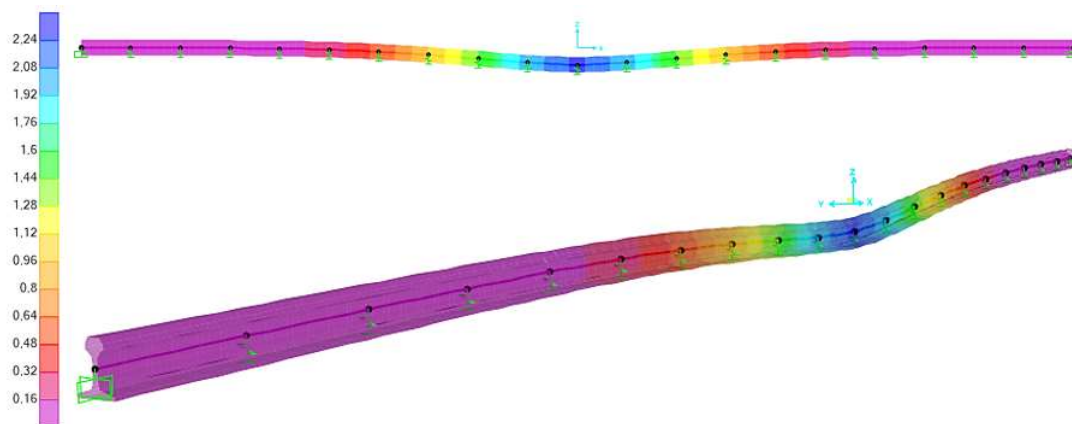


Figura 5. Deslocamentos obtidos para o trilho em mm.



A Figura 5 apresenta o modelo numérico desenvolvido, destacando a discretização adotada e a configuração das condições de contorno. Observa-se que o trilho foi modelado com comprimento total de 12 m, discretizado em 21 nós, com a incorporação de molas distribuídas representando a rigidez da via. Tal comprimento adotado foi com base em análises preliminares que indicaram sua representatividade para a resposta global do sistema, conforme discutido na Seção 3. A comparação entre os deslocamentos obtidos numericamente e os valores experimentais indicou uma diferença de 6,25%, evidenciando a adequada representação do comportamento estrutural do sistema pelo modelo proposto.

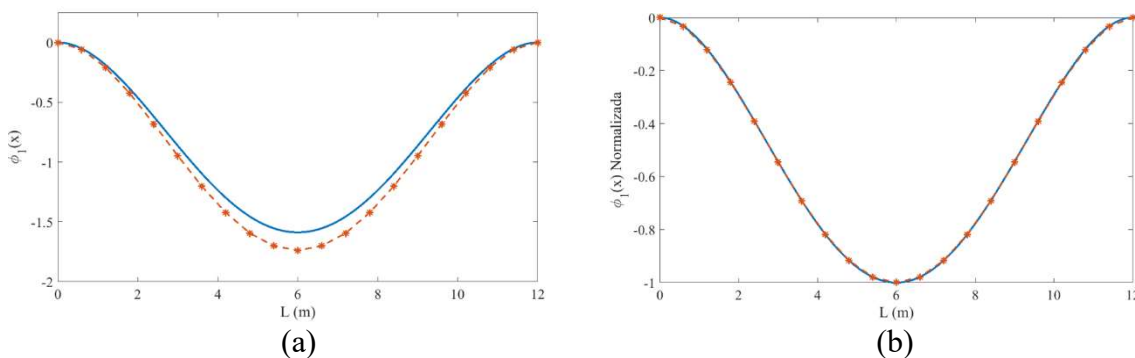
3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise dos resultados obtidos nessa seção permite avaliar a influência da rigidez (módulo de via) no comportamento dinâmico do trilho, bem como a consistência entre as abordagens analítica e numérica adotadas.

Na Figura 6, são apresentados o comparativo entre as formas modais obtidas pelos modelos analítico, dado pela Equação 5 (linha azul contínua) e numérico pelo SAP 2000 (linha laranja pontilhada) para os três primeiros modos de vibração, considerando tanto as amplitudes não normalizadas quanto as formas normalizadas. Observa-se elevada concordância entre os perfis modais, evidenciando que o modelo numérico é capaz de reproduzir adequadamente o comportamento dinâmico previsto pela formulação analítica.

Nota-se que, embora existam diferenças nas amplitudes absolutas nos resultados não normalizados, as formas modais apresentam padrões geométricos equivalentes, o que confirma a consistência da análise. Após a normalização, as curvas tornam-se praticamente coincidentes, reforçando que a comparação entre modos de vibração deve ser realizada com base em suas formas relativas, e não em valores absolutos de deslocamento.

Ressalta-se também que, os deslocamentos associados às formas modais apresentados não correspondem a deslocamentos físicos reais do trilho, sendo apenas representações relativas da forma de vibração, usualmente normalizadas.



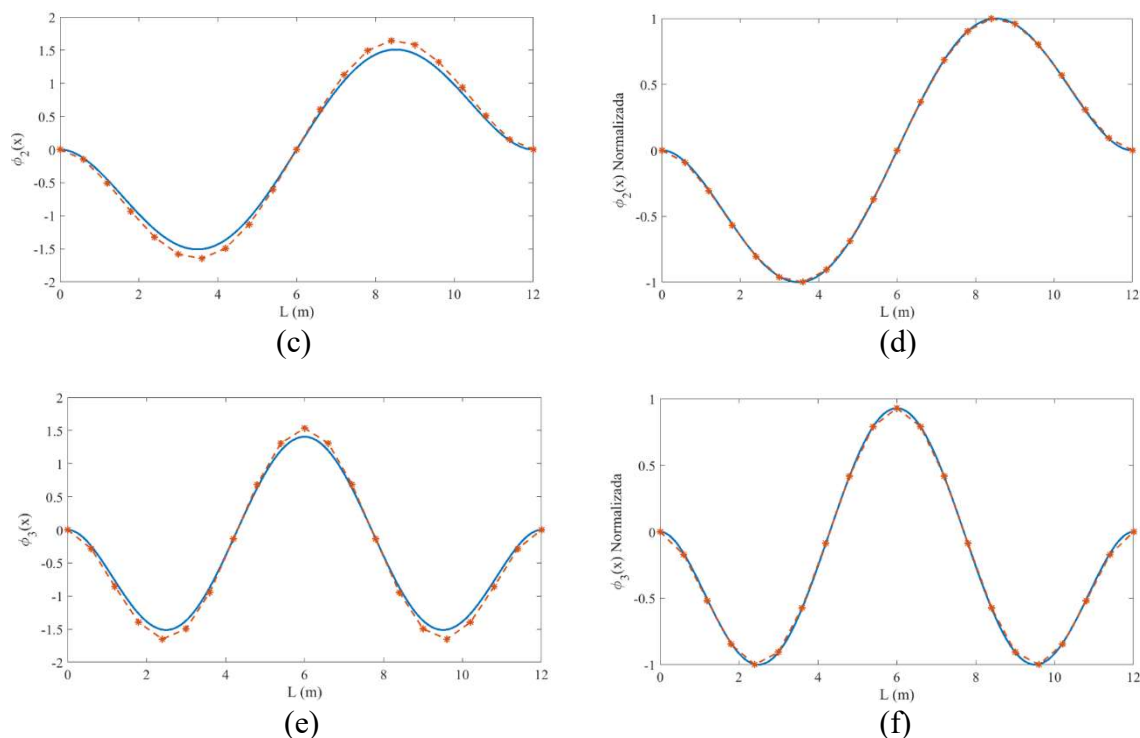


Figura 6. Comparativo dos deslocamentos das formas modais em mm. Em (a), (c) e (e) não-normalizada; Em (b), (d) e (f) normalizadas para os 1°, 2° e 3° modos, respectivamente.

A Tabela 1 apresenta a comparação entre as frequências naturais obtidas pelos modelos analítico e numérico, bem como entre as diferentes formulações adotadas. Os resultados evidenciam excelente concordância entre as abordagens, com diferenças inferiores a 4% para os três primeiros modos de vibração. Para o primeiro modo, observa-se elevada aderência entre os valores obtidos, sendo 48,46 Hz pela formulação clássica (Equação 4), 49,19 Hz pela formulação analítica adotada (Equação 2) e 49,15 Hz pelo modelo numérico desenvolvido no SAP2000, resultando em diferenças inferiores a 1,5%.

De forma complementar, a comparação entre a formulação clássica da frequência natural e a expressão analítica adotada neste estudo evidencia que, para o modo fundamental, o comportamento dinâmico do sistema pode ser adequadamente representado por uma aproximação simplificada do tipo massa-mola. No entanto, essa formulação apresenta limitações, uma vez que não permite a determinação das frequências associadas aos modos superiores, ao contrário do modelo analítico completo, que possibilita a análise modal do sistema para diferentes modos de vibração.

Tabela 1. Comparativo entre as frequências naturais obtidas para os 3 primeiros modos de vibração.

Modo	Frequência Natural (Hz)		
	Analítico	Numérico	Diferença (%)
1°	49,19	49,15	0,08
2°	52,92	53,66	1,38
3°	63,63	66,20	3,88



A seguir, as Figuras 7 e 8 apresentam resultados obtidos a partir da formulação analítica adotada neste trabalho, conforme descrito pela Equação (2), permitindo avaliar a influência dos parâmetros do sistema nas frequências naturais do trilho.

Para a Figura 7, são demonstradas a variação das frequências naturais em função do parâmetro adimensional B_n e do comprimento L do trilho, sendo as curvas da esquerda para direita o 1º, 2º e 3º modo, respectivamente. Observa-se que o aumento do comprimento resulta na redução das frequências naturais, comportamento coerente com a teoria de vigas, uma vez que sistemas mais flexíveis apresentam menores frequências de vibração. Além disso, verifica-se que modos superiores apresentam frequências mais elevadas, com comportamento assintótico, conforme foi demonstrado.

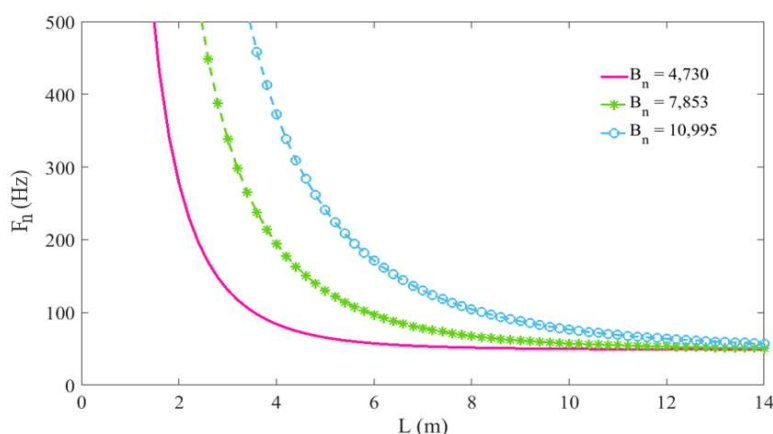


Figura 7. Variação da frequência natural variando B_n para cada modo de vibração, e em função do comprimento do trilho.

Analisando a Figura 8, são evidenciadas a influência direta do módulo de via nas frequências naturais do sistema. Observa-se que o aumento da rigidez da via resulta em elevação significativa das frequências naturais, demonstrando a sensibilidade do comportamento dinâmico do trilho às condições de apoio. Esse resultado reforça a possibilidade de utilização das frequências naturais como parâmetro para inferência da qualidade da rigidez da via, evidenciando o potencial da análise modal como ferramenta de avaliação estrutural.

Adicionalmente, verifica-se que, para comprimentos inferiores a aproximadamente 12 m, ocorre um aumento progressivo das frequências naturais, associado à maior rigidez global do sistema para modelos mais curtos. Esse efeito pode levar à identificação de frequências locais que não representam adequadamente o comportamento dinâmico do trilho em escala real. Tal influência do comprimento L nas respostas modais, também pode ser observada na Figura 7, onde para valores menores que 12 m foi constatado esse aumento da frequência natural. Dessa forma, a escolha do comprimento do modelo numérico deve ser realizada com cautela, sendo adotado, no presente estudo, o comprimento de 12 m por fornecer resultados globais mais representativos, já que, a partir desse comprimento convergem para uma estabilização. Esse comportamento é observado tanto nos resultados numéricos quanto nas análises analíticas, evidenciando a consistência entre as abordagens adotadas.

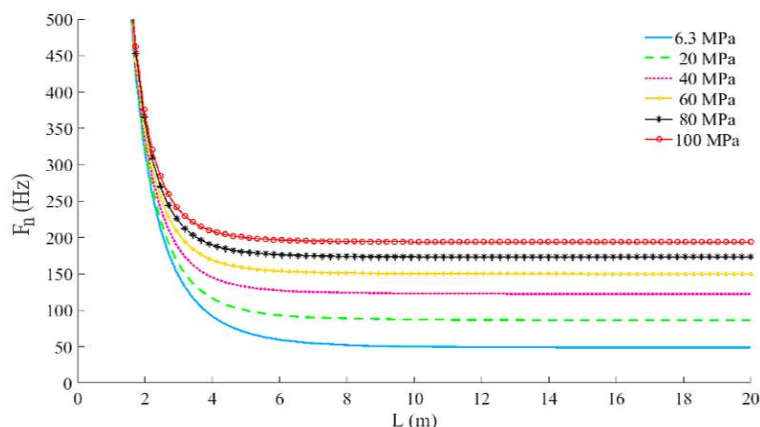


Figura 8. Variação da frequência natural variando o módulo de via para o 1º modo de vibração, e em função do comprimento do trilho.

4. CONCLUSÃO

A rigidez da via permanente exerce influência direta no comportamento dinâmico do trilho, impactando significativamente suas frequências naturais. A partir das análises desenvolvidas, observou-se elevada concordância entre os modelos analítico e numérico, com diferenças reduzidas para os modos avaliados, validando a abordagem adotada.

Verifica-se que formulações simplificadas são adequadas para a estimativa do modo fundamental, enquanto modelos mais completos são necessários para a representação do comportamento modal global do sistema, especialmente para modos superiores.

Os resultados indicam que o módulo de via pode ser utilizado como parâmetro direto para estimativa da frequência natural do trilho, evidenciando a influência da rigidez de suporte nas características dinâmicas do sistema.

De forma complementar, destaca-se a importância da adequada definição do comprimento a ser adotado, evitando a superestimação de frequências associadas a efeitos locais. Como continuidade, recomenda-se a ampliação das análises experimentais, visando à consolidação das correlações propostas em diferentes condições de operação.

Nesse contexto, ao estabelecer uma relação direta entre o módulo de via e a frequência natural do trilho, este trabalho demonstra o potencial de utilização de parâmetros obtidos em campo para inferir propriedades dinâmicas fundamentais, permitindo estimar a frequência natural do trilho sem necessidade de instrumentação dinâmica.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj).



6. REFERÊNCIAS

COSTA, R. C. **Proposição de dispositivo de medidas “in situ” para avaliação do comportamento mecânico de lastro ferroviário: estudo de caso na Estrada de Ferro Carajás**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Transportes. Universidade de São Paulo. 176 f. São Paulo, 2016.

DEPARTAMENTO DE INFRAESTRUTURA DE TRANSPORTES. **Procedimento de Inspeção de Materiais: PIM 01 – Trilho para Linha Férrea**. Rio de Janeiro, 2015.

ESVELD, C. **Modern railway track**. 2. ed. Zaltbommel: MRT-Productions, 654 p. Netherlands, 2001.

IKE, C. C. Free vibration of thin beams on Winkler foundations using generalized integral transform method. **Engineering and Technology Journal** 41 (11) (2023) 1286 – 1297. DOI: <https://doi.org/10.30684/etj.2023.140343.1462>

IRVINE, T. **Bending frequency of a beam on elastic foundation**. Revision B, pp. 1 – 12, 2014.

MATSUOKA, K.; KAJIHARA, K.; TANAKA, H. Identification of vibration modes and wave propagation of operational rails by multipoint hammering and reciprocity theorem. **Materials** 2022, 15, 811, pp. 1 - 23. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma15030811>

SUBBARATNAM, B. Dynamic stability of beam on elastic foundation including higher transition foundation. **Challenges in Foundation Engineering – Case Studies and Best Practices** 2020. Intech Open, pp. 1 – 20. DOI: <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.113009>

RIBEIRO, M. R. B. M. **Análise Numérica – Analítica do Comportamento Estrutural de Pavimentos Ferroviários**. Dissertação de Mestrado. Programa de Engenharia Civil – COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro. 135 f. Rio de Janeiro, 2023.

RIBEIRO, M. R. B. M.; FILHO, M. R. S.; SANTIAGO, J. A. F. **Analytical Models for Railway Track Based on Numerical and Experimental Data**. XLV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, pp. 1-7. Maceió, 2024. DOI: <https://doi.org/10.55592/cilamce.v6i06.10281>

RIBEIRO, M. R. B. M.; FILHO, M. R. S.; SANTIAGO, J. A. F. **Structural Analysis of Railway Pavements Considering Track Modulus and Rail Effects**. XLVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. pp. 1-7. Vitória. 2025. DOI: <https://doi.org/10.55592/cilamce2025.v5i.13992>

THOMPSON, D. J. **Railway noise and vibration: Mechanisms, Modelling and Means of Control**. Oxford: Elsevier, 536 p. 2008.

TIMOSHENKO, S. **Strength of Materials: Part II – Advanced Theory and Problems**. D. Van Nostrand Company, Inc. 2º ed. 263 p. Toronto, New York and London, 1946.



TRACK MODULUS AS A PARAMETER FOR ESTIMATING THE NATURAL FREQUENCY OF RAILS: ANALYTICAL AND NUMERICAL APPROACH

ABSTRACT

The stiffness of the permanent way directly influences the dynamic behavior of the rail, affecting its natural frequencies and its structural response under operational loads. This work investigates the relationship between the track modulus and the rail's natural frequency using analytical and numerical approaches. The rail is modeled as an Euler-Bernoulli beam on a Winkler-type elastic foundation, with the formulation implemented in MATLAB. In parallel, a finite element model is developed in SAP2000, whose initial validation is performed using an experimental case, serving as a basis for subsequent parametric analyses. The results show high agreement between the models, with differences of less than 4% for the analyzed modes, and indicate a consistent increase in natural frequencies with the increase in track modulus. It is also found that simplified formulations are adequate for the fundamental mode, while complete models are necessary for the global modal analysis of higher modes. The results demonstrate the potential of modal analysis as a tool for estimating the natural frequency from the track modulus.

Keywords: *Track modulus; Rail; Natural frequency.*