TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO EM $\mathbb{R}^n$: INTEGRAL DE LEBESGUE, COMPARAÇÃO COM RIEMANN, TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA E EXEMPLOS FUNDAMENTAIS

Jheniffe Viana Picanço

Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET)

jheniffe.picanco@ufam.edu.br

Wanessa Ferreira Tavares

Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET)

wanessa.tavares@ufam.edu.br

Fernando Júnior Soares dos Santos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET)

fernando.santos@ufam.edu.br

RESUMO

Estudamos os fundamentos da Teoria da Medida e da Integração em $\mathbb{R}^n$, com ênfase na medida e na integral de Lebesgue em comparação com a integral de Riemann, destacando a mudança conceitual de integrar por partições do domínio para integrar por medida de conjuntos de nível. Nesse contexto, investigamos as condições necessárias para que uma função definida em um domínio de $\mathbb{R}^n$ seja integrável no sentido de Lebesgue. Essa abordagem amplia a classe de funções integráveis, como ilustra a função de Dirichlet, não integrável no sentido de Riemann, mas integrável no sentido de Lebesgue. Evidenciamos como principal vantagem técnica os teoremas de convergência, especialmente os Teoremas da Convergência Monótona e Dominada, que legitimam a troca entre limite e integral sob hipóteses gerais. Os teoremas TCM e TCD explicam por que a integral de Lebesgue constitui o arcabouço natural da Análise moderna: ela interage adequadamente com limites e fornece critérios verificáveis, substituindo exigências mais restritivas do cenário riemanniano. Essa estabilidade é um dos pilares na construção e completude dos espaços L^p, sustentando aplicações em Análise Funcional, Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais. A metodologia baseia-se em revisão teórica da literatura e discussões em seminários, permitindo avanços na compreensão estrutural da teoria e de suas conexões com esses espaços funcionais.

Palavras-Chave: Teoria da Medida; Integral de Lebesgue; Integral de Riemann; Teoremas de Convergência; Espaços L^p.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, R. C. D de. A integral de Lebesgue como o completamento da integral de Riemann. 2024. Trabalho de
Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)– Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Matemática.

BARTLE, R.G. The elements of integration and Lebesgue measure. New York: John Wiley Sons, 1995.

STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton:
Princeton University Press, 2005. (Princeton Lectures in Analysis, III).

TAO, Terence. An Introduction to Measure Theory. Versão preliminar. American Mathematical Society (AMS),
[2012]