Produtos Tensoriais de Módulos Simples de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: Construção e Decomposição

Lucas Cavalcante Marques
Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET/UFAM)
lucascavalcante3002@gmail.com

Fernando Júnior Soares dos Santos
Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET/UFAM)
fernando.santos@ufam.edu.br

Wanessa Ferreira Tavares
Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET/UFAM)
wanessa.tavares@ufam.edu.br

Resumo

Este trabalho analisa a decomposição do produto tensorial de módulos de dimensão finita da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Inicialmente, define-se uma ação natural de $\mathfrak{g}$ no espaço $V \otimes_{\mathbb{C}} W$, onde V e W são $\mathfrak{g}$-módulos, dada por $X(v \otimes w) = X_V(v) \otimes w + v \otimes X_W(w)$, para todo $X \in \{E, F, H\}$. Verifica-se que essa ação está bem definida e preserva as relações da álgebra, garantindo que o produto tensorial herda a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo. Além disso, mostra-se que essa construção é compatível com a decomposição em soma direta, permitindo reduzir o estudo ao caso de módulos simples. Como resultado central, para $m \leq n$, demonstra-se que $V^{(n)} \otimes_{\mathbb{C}} V^{(m)} \cong_{\mathfrak{g}} V^{(n-m+1)} \oplus V^{(n-m+3)} \oplus \cdots \oplus V^{(n+m-1)}$. A demonstração baseia-se na análise de vetores de peso máximo e nas propriedades estruturais das representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dessa forma, obtém-se uma descrição completa da decomposição do produto tensorial de módulos simples.

Palavras-Chave: Álgebras de Lie; Representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; Produto tensorial; Decomposição de módulos.

REFERÊNCIAS

HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972. v. 9. (Graduate Texts in Mathematics, v. 9).

MAZORCHUK, V. *Lectures on* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$*-Modules*. London: Imperial College Press, 2009. ISBN 978-1-84816-517-5.

SILVA, I. M. *Módulos de peso para* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021. Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.