



DECAIMENTO POLINOMIAL DA ENERGIA PARA KLEIN-GORDON-SCHRÖDINGER COM AMORTECIMENTO NÃO LINEAR EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPACTAS

Thales Maier Souza¹, César Augusto Bortot²

¹ Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, Brasil (thales.maier@ufsc.br)

² Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, Brasil

Resumo: Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico das soluções de um sistema acoplado de Klein–Gordon–Schrödinger (KGS) com região de amortecimento efetivo localmente distribuída em uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, e de dimensão menor ou igual a três. O sistema estende resultados anteriores obtidos em domínios euclidianos para o contexto geométrico de variedades compactas. Sob a condição de controle geométrico (GCC) imposta à região de amortecimento, estabelecemos uma taxa uniforme de decaimento da energia. A análise baseia-se no método dos multiplicadores adaptado ao contexto das variedades, incorporando construções geométricas adequadas que permitem excluir efeitos dissipativos em regiões que satisfazem condições geométricas locais específicas.

Palavras-Chave: Klein-Gordon-Schrödinger; Variedades Riemannianas; Equações Diferenciais em Variedades.

INTRODUÇÃO

As equações de Klein–Gordon–Schrödinger descrevem um modelo clássico da interação entre um campo conservativo complexo de nêutrons e o méson neutro de Yukawa na teoria quântica de campos, para mais detalhes sobre a modelagem física, ver Yukawa (1955).

Sabe-se, de acordo com Tang e Ding (2008), que tanto as equações não lineares de Klein–Gordon quanto de Schrödinger, com interações cúbicas, possuem amplas aplicações em diversos campos da física, tais como óptica não linear, plasmas não lineares, matéria condensada, entre outros. Além disso, o sistema de Klein–Gordon–Schrödinger pode descrever a dinâmica de ondas eletrostáticas acopladas do tipo “upper-hybrid” e “ion-cyclotron” em um magnetoplasma uniforme.

Neste trabalho, consideramos o seguinte sistema de Klein–Gordon–Schrödinger com amortecimento localmente distribuído,

$$(1) \quad \begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha|\psi|^2\psi = \phi\psi & \text{em } M \times (0, \infty) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2X_\omega & \text{em } M \times (0, \infty) \\ \psi(0) = \psi_0, \phi(0) = \phi_0, \phi_t(0) = \phi_1, \end{cases}$$

onde (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão $n \leq 3$, e g denota sua métrica Riemanniana. O subconjunto aberto $\omega \subset M$, com $\text{meas}(\omega) > 0$, representa a região onde o efeito

dissipativo é efetivo, além disso ω satisfaz as condições geométricas de controle (CGC). Aqui, $\alpha > 0$ é uma constante, e χ_ω denota a função característica de ω .

Observação 1. Observe que o par (ω, T_0) satisfaz a condição de controle geométrico (CGC) se toda geodésica de M , percorrida com velocidade unitária e iniciada no instante $t = 0$, entra no conjunto aberto ω antes do tempo T_0 .

Os resultados apresentados neste trabalho podem ser vistos como uma extensão daqueles obtidos por Bisognin et al. (2008), em que os autores consideraram um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com bordo suave. Em contraste, neste trabalho consideramos uma variedade Riemanniana.

Vale também destacar que, neste caso, não obtivemos decaimento exponencial da energia como em Bortot et al. (2022). Naquele trabalho, os autores introduziram um termo dissipativo localizado mais forte que, além disso, exerce um efeito regularizante sobre a equação de Schrödinger. Um problema interessante, que vai além da busca por taxas de decaimento exponencial, consiste em investigar a introdução de um termo dissipativo localizado na equação de Schrödinger e analisar como essa localização influencia nas taxas de decaimento.

FERRAMENTAS E METODOLOGIA

A fim de obter os resultados desejados, as ferramentas utilizadas nos trabalhos anteriormente mencionados foram fundamentais.

As principais contribuições deste trabalho podem ser resumidas como segue:

1. Primeiramente, estendemos de forma significativa os resultados de Bisognin et al. (2008) para o contexto de uma variedade Riemanniana compacta com amortecimento localizado. Por meio de argumentos geométricos e do uso de um multiplicador adequado $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, dotado de propriedades apropriadas, juntamente com a condição de controle geométrico, estabelecemos estimativas quantitativas de decaimento da energia.

2. Consideramos um termo de amortecimento não linear da forma $\alpha|\psi|^2\psi$ na equação de Schrödinger, bem como um amortecimento localizado $a(x)\phi_t$ na equação de onda. Existem poucos resultados disponíveis na literatura sobre o decaimento polinomial associado à dissipação não linear natural $i|\psi|^2\psi$ atuando na equação de Schrödinger, o que evidencia a dificuldade de se obter taxas de decaimento nesse contexto.

Vale ressaltar que os resultados de continuação única estão intimamente relacionados à existência desse multiplicador. A ideia geral consiste em construir uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e definir um subconjunto aberto $V \subset M$ tal que $\text{meas}(V) \geq \text{meas}(M) - \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, de modo que f satisfaça condições relacionadas ao seu hessiano, gradiente e laplaciano em V . Assim, podemos definir ω (ver Figura 1) como o subconjunto aberto tal que

$$\omega \supset (M \setminus V).$$

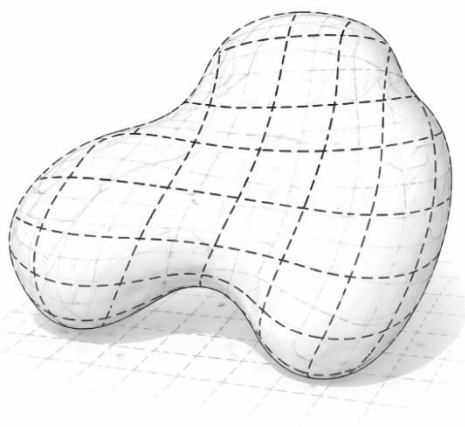


Figura 1. A região em branco representa uma área arbitrariamente grande livre de dissipação, enquanto a região em preto corresponde ao conjunto ω , onde o efeito dissipativo atua. Essa região pode ser escolhida

arbitrariamente pequena, estando ambas distribuídas sobre toda a variedade M .

RESULTADOS

Faremos uso dos espaços de Sobolev padrão em variedades Riemannianas. Definimos

$$V := \{y \in H^1(M); \int_M y(x) dM = 0\}$$

$$H := \{y \in L^2(M); \int_M y(x) dM = 0\}$$

A energia associada ao problema (1) é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_M |\psi|^2 + |\nabla \phi|^2 + |\phi_t|^2 dM. \quad (2)$$

Teorema 1. Dados $(\psi_0, \phi_0, \phi_1) \in \{V \cap H^2(M)\}^2 \times V$ o problema (1) possui única solução regular satisfazendo

$$\psi \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V \cap H^2(M)),$$

$$\psi_t \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(M)),$$

$$\phi \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V \cap H^2(M))$$

Demonstração: Ver Cavalcanti et al. (2000).

Teorema 2. Suponha que ω satisfaça as condições de controle geométrico (CGC) e que $\alpha > \alpha_0^{-1}/2$. Então, existe uma constante $C = C(E(0))$ tal que a seguinte taxa de decaimento é válida:

$$E(t) \leq \frac{C E(0)}{1+t}, \quad \forall t \geq 0,$$

para toda solução regular do problema (1).

Demonstração: Para demonstrar o decaimento da energia é suficiente mostrar a seguinte desigualdade:

$$\int_s^T E^2(t) dt \leq C E(s), \quad \forall 0 \leq s < T < \infty, \quad (2)$$

para alguma constante positiva C que não depende de T .

Esta desigualdade é provada usando a técnica de multiplicadores, a saber, os multiplicadores utilizados são $E(t)\bar{\psi}$ e $E(t)\langle q, \nabla \phi \rangle$, em que $q \in (W^{1,\infty}(M))^n$. Posteriormente fazendo $q = \nabla f$ são geradas todas as estimativas de energia desejadas de modo a concluir a desigualdade (2).

Uma vez demonstrada a desigualdade (2) aplicamos o Teorema 9.1 devido a Komornik e concluímos a demonstração do Teorema 2.

Observação 2. Suponha que (M, g) satisfaça as condições de “pinching” localmente, isto é, existem subconjuntos $V_1, \dots, V_n$ e constantes positivas $A_i, B_i > 0$ tais que $A_i \leq \sec g \leq B_i$ em $V_i, i = 1, \dots, n$.

Dessa forma, podemos livrar de efeitos dissipativos o conjunto $\bigcup_{i=1}^n V_i$ (ver Figura 2).

Os detalhes desta construção podem ser encontrados na Seção 5.2 de Bortot et al. (2018).

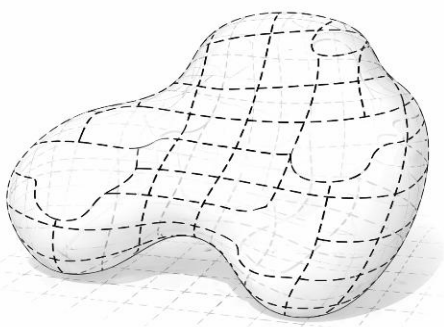


Figura 1. É possível deixar livre de amortecimento subconjuntos abertos de M onde a curvatura seccional satisfaz condições de “pinching” localmente.

CONCLUSÃO

Podemos concluir que os principais objetivos relacionados à estabilidade polinomial da energia associada ao sistema acoplado de Klein–Gordon–Schrödinger foram alcançados. Como perspectivas futuras, pretende-se investigar condições que permitam aprimorar a região na qual a dissipação de energia deve atuar de forma efetiva, buscando obter taxas de decaimento mais gerais ou otimizadas. Nesse contexto, acredita-se que características geométricas específicas de determinadas variedades Riemannianas desempenharão um papel fundamental na compreensão dos mecanismos de dissipação e na obtenção de resultados mais refinados de estabilidade.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Professor Marcelo Moreira Cavalcanti pelas discussões relacionadas ao problema e perspectivas futuras.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. F., CAVALCANTI, M. M., ZANCHETTA, J. P. Exponential decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping. *Communications on Pure and Applied Analysis*, v.17, p.2039-2061, 2018.
- BISOGNIN, V., CAVALCANTI, M. M., CALVALCANTI V. N. D., SORIANO J. Uniform decay for the Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping. *Nonlinear Differential Equation and Applications*, v.15, p. 91-113, 2008.

BORTOT C. A., SOUZA, T. M., ZANCHETTA, J. P. Asymptotic behavior of the coupled Klein–Gordon–Schrödinger systems on compact manifolds. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 45, p. 2254-2275, 2022.

BORTOT, C. A.; CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D.; PICCIONE, P. Exponential asymptotic stability for the Klein–Gordon equation on non-compact Riemannian manifolds. *Applied Mathematics & Optimization*, v. 78, p. 219-265, 2018.

CAVALCANTI, M. M, CALVALCANTI V. N. D. Global existence and uniform decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations. *Nonlinear Differential Equation and Applications*, v. 7, p. 285-307, 2000.

KOMORNIK, V. Exact controllability and stabilization: The multiplier method. Masson–John Wiley, Paris, 1994.

TANG, X., DING, W. The general Klein–Gordon–Schrödinger system: modulational instability and exact solutions. *Physica Scripta*, v.77 015004, 2008.

YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. I. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v.1, p. 1-10, 1955.