



ENTRE PARALELOS E MERIDIANOS: A MATEMÁTICA PRÁTICA COM O TRANSFERIDOR ESFÉRICO¹

SILVA, Daniele Cristina de Cena²
ARRAIS, Ubiratan Barros³

1 Recorte do Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade SESI-SP de Educação

2 Licencianda do 4º ano de Matemática da Faculdade SESI-SP de Educação – daniiceena@gmail.com

3 Professor do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade SESI-SP de Educação – ubiratan.arrais@sesisp.org.br

RESUMO

A presente pesquisa constitui um recorte de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que está em fase final de redação e será publicado na biblioteca pública da Faculdade Sesi-SP de Educação no ao final de 2025 e tem por objetivo apresentar um projeto didático pedagógico, compondo a construção e a utilização de um transferidor esférico, que além de ser um recurso pedagógico a fim de auxiliar no ensino das Geometrias não euclidianas, em especial a geometria esférica, busca facilitar a compreensão sobre como medir superfícies curvas. A construção desse recurso manipulável possibilita aos estudantes uma compreensão concreta dos conceitos que tradicionalmente vêm sendo trabalhados no contexto abstrato, e por ser um recurso de baixo custo, pode ser construído em qualquer ambiente de ensino. A ideia é apresentar uma estratégia que venha auxiliar nas limitações de aprendizagens em geometria encontradas no ensino básico, propondo aos educadores uma opção aos estudantes na intenção de relacionar o tema tratado com a vivência cotidiana, tornando o aprendizado mais significativo. Ao utilizar o transferidor esférico, viabiliza aos estudantes um recurso de investigação prática, por meio de observações, diálogo e raciocínio espacial. Ademais, este recurso propicia o ensino interdisciplinar e integrador para a disciplina da Matemática, além de dialogar com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a Geografia, quando trabalhado latitudes e longitudes, que juntamente há conexão com a História das Navegações. Espera-se, portanto, contribuir para a aprendizagem dos estudantes, além de propor uma ferramenta alternativa para o ensino de conteúdos que geram dificuldades entre os estudantes e que pouco é discutido no ensino básico.

Palavras-chave: Transferidor Esférico; Geometrias Não-Euclidianas; Interdisciplinaridade.

INTRODUÇÃO

A base do ensino nas escolas brasileiras é a Geometria Euclidiana, fundamentada nos *Elementos de Euclides* (séc. III a.C.). Seus postulados, como a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° e a definição de retas paralelas, são frequentemente tratados como verdades absolutas. Contudo, essa abordagem ignora um fato crucial: vivemos em um mundo curvo, onde as regras euclidianas falham.

A Terra, por exemplo, é uma esfera, e rotas aéreas, coordenadas geográficas e o funcionamento do GPS dependem de uma Geometria Esférica, um modelo da Geometria Elíptica proposta por Riemann no século XIX. Nesta geometria, “retas” são círculos máximos, triângulos tem soma de ângulos maior que 180° , e não existem paralelas, pois duas geodésicas sempre se cruzam. Apesar de sua relevância prática, este tema é pouco explorado no Ensino Básico, perpetuando uma visão limitada da Matemática.

Este trabalho apresenta um projeto didático que explora a Geometria Esférica com o auxílio do Transferidor Esférico, um recurso que proporciona explorações acompanhadas de espanto pelo inusitado e inesperado.

JUSTIFICATIVA

Ao longo do percurso escolar, muitos estudantes encontram dificuldades para compreender e interpretar a Geometria, muitas vezes por ser um conteúdo pouco explorado. O estudo em questão, por meio de um projeto didático, trabalha a transição da Geometria Euclidiana para a Geometria Esférica, buscando expandir os conhecimentos dos alunos e trazendo de forma prática seus conceitos.

Nesse sentido, Geometria Esférica é aplicada na navegação aérea e marítima, a partir de estudos relacionados ao globo terrestre e às coordenadas geográficas. O projeto procura possibilitar que os estudantes entendam que a Matemática vai muito além da realização de cálculos, sendo uma ciência em constante evolução, desenvolvida a partir de questionamentos, debates e descobertas ao longo da história. O contato prático pode ajudar os alunos a enxergarem a Geometria de outra forma, percebendo-a como parte da sua realidade e não apenas como cálculos abstratos.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Geometrias Não-Euclidianas e o Transferidor Esférico

O projeto fundamenta-se na necessidade de ir além dos limites conceituais da Geometria Euclidiana, restrita a superfícies planas. A geometria Esférica justifica-se por sua capacidade de descrever situações em superfícies curvas, como a Terra.

1. A Crítica ao Quinto Postulado e o Surgimento das Novas Geometrias

A História da Matemática e o debate em torno do Quinto Postulado de Euclides (também conhecido também como o Postulado das Paralelas) são o ponto de partida. Muitos matemáticos tentaram prová-lo como teorema devido à sua complexidade. Coutinho (2001) apresenta o postulado original. A tentativa de negação desse Postulado possibilitou a descoberta de novas Geometrias, como a Hiperbólica e a Elíptica, da qual a Esférica é um modelo.

O artigo de Devito *et al.* (2006) reforça a necessidade de fugir da Geometria Euclidiana, reconhecendo que a geometria ensinada na escola não é suficiente. O diferencial deste projeto, além de trazer a discussão teórica e histórica sobre a negação do Quinto Postulado, é propor uma prática construtiva, elaborando uma ferramenta concreta, o Transferidor Esférico, onde o aluno pode realizar a medição dos ângulos e relacionar com os conceitos.

2. A Geometria Esférica e a Relação com o Projeto

Na Geometria Esférica, o conceito de reta é substituído pelo de círculo máximo (a intersecção da esfera com um plano que passa por seu centro). As características se contrapõem diretamente à Euclidiana:

- Paralelas: não existe nenhuma reta paralela que passe pelo ponto fora dela. (Geometria Elíptica, modelo de Riemann).
- Triângulos: A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° .

O Transferidor Esférico se torna uma ferramenta didática que possibilita aos alunos visualizarem e mensurar essas diferenças. A aplicação dos conceitos de ângulos e medidas em superfícies curvas é fundamental para as áreas como a Navegação Aérea e Marítima e na Geografia, no estudo de coordenadas geográficas. Embora haja propostas semelhantes, como no artigo de Thomaz e Franco (2008), o presente projeto propõe a construção do Transferidor Esférico como objeto central, transformando os conceitos abstratos em atividades práticas e promovendo um instrumento de medição direto.

CITAÇÕES E FUNDAMENTAÇÕES SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE

Esse projeto busca integrar a Matemática e a Geografia, principalmente no âmbito da cartografia e coordenadas geográficas. A ideia de interdisciplinaridade, defendida por autores como Ivani Fazenda e Hilton Japiassu, é crucial. Para eles, a interdisciplinaridade não é apenas uma técnica, mas uma atitude essencial para transformar a visão fragmentada do mundo em alcançar uma compreensão da realidade.

Ivani Fazenda (2011), define a interdisciplinaridade como um modo de ser, de pensar, de agir, uma postura de diálogo e colaboração entre saberes, uma abertura para o diferente. Hilton Japiassu (1976), um dos pioneiros no debate, considera-a como uma forma de enfrentar a fragmentação do conhecimento causada pela especialização excessiva da ciência. Ele enfatiza que o trabalho interdisciplinar deve se organizar em torno de um objeto de estudo concreto, garantindo que as disciplinas conversem entre si.

Neste contexto, a interdisciplinaridade faz conexão entre a Geometria Esférica e a Geografia, tornando o aprendizado mais próximo do cotidiano dos alunos e mostrando que a Matemática ajuda a compreender o mundo ao nosso redor.

PROBLEMÁTICA

Apesar de a Geometria Esférica ser amplamente utilizada para a compreender temas relacionados ao globo terrestre, navegação e coordenadas geográficas, esse conteúdo continua

pouco explorado no ensino básico e na formação de professores. Indaga-se de que forma recursos didáticos podem auxiliar na resolução de situações-problema, trazendo o contexto histórico da Matemática como contribuição para tornar o ensino da Geometria Esférica (e suas aplicações no globo terrestre) mais atraente e significativa para os alunos.

OBJETIVO GERAL

Aplicar uma proposta didática que, por meio da construção de um recurso didático pedagógico, auxilie no ensino da Geometria Esférica, possibilitando a compreensão de medidas em superfícies curvas a partir de situações problema.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Contextualizar o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas a partir dos debates a respeito do Quinto Postulado de Euclides.
- Fundamentar matematicamente a Geometria Esférica, destacando o conceito de Círculo Máximo e a Lei dos Cossenos Esféricos.
- Desenvolver e validar o Transferidor Esférico como recurso pedagógico.
- Promover a interdisciplinaridade entre as áreas de conhecimento, como a Matemática e a Geografia por meio das coordenadas geográficas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E MATEMÁTICA

1. O Encontro da Matemática com a superfície Curva

O principal desafio deste projeto é mostrar que a Geometria não se limita a simples desenhos em papel. É entender por que as regras da Geometria Plana não funcionam na Terra, exige uma nova matemática para navegação em nosso Planeta.

1.1. Axiomas e Postulados de Euclides

Segundo Coutinho (2001), a Geometria Euclidiana se sustenta em cinco Axiomas e cinco Postulados. O Quinto Postulado afirma que, “se uma reta secante a duas outras forma ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas se encontrarão se prolongadas”.

1.2. Euclides e o Inconformismo das Paralelas

O Quinto Postulado, ou Postulado das Paralelas, “Dado um ponto fora de uma reta, existe uma, e apenas uma, reta paralela a essa que passa pelo ponto”, gerou discórdia. A dificuldade histórica em prová-lo motivou matemáticos, como Bolyai⁴, Lobachevsky⁵, Gauss⁶ e Riemann a perguntarem: “E se negarmos essa regra?”. Bolyai e Lobachevsky fundaram a Geometria

4 Bolyai refere-se principalmente ao matemático húngaro János Bolyai (1802–1860), um dos fundadores da Geometria Não-Euclidiana (especificamente, a Geometria Hiperbólica).

5 Nikolai Lobachevsky (1792–1856) foi um matemático russo notório por ser, juntamente com János Bolyai, um dos fundadores da Geometria Não-Euclidiana, também chamada Geometria Hiperbólica ou Geometria de Lobachevsky.

6 Carl Friedrich Gauss (1777–1855) foi o primeiro a desenvolver e compreender completamente a consistência lógica da Geometria Não-Euclidiana (Geometria Hiperbólica), de forma independente de Bolyai e Lobachevsky.

Hiperbólica (infinitas paralelas), e Riemann criou a Geometria Elíptica (nenhuma paralela).

1.3. Geometria de Riemann

Contrariando o Quinto Postulado, a Geometria Elíptica (Riemann), determina que não existe nenhuma paralela à reta dada. Nela, a reta é ilimitada e não infinita. O axioma substituto afirma que quaisquer duas retas em um plano têm, pelo menos, um ponto de encontro. Um modelo prático é a superfície terrestre, onde as retas são geodésicas, ou seja, os círculos máximos.

1.4. O Problema da Rota Aérea: O Limite do Mapa

Em um mapa plano, a rota mais curta parece ser uma linha reta. No entanto, na Terra esférica, o trajeto mais curto é uma curva, chamada geodésica. A percepção de que o mundo é uma esfera demandou uma Geometria que pudesse trabalhar essas características.

2. Geometria Esférica: Os novos conceitos

A Geometria Esférica, um modelo da Geometria Elíptica de Riemann, é a matemática aplicada em superfícies curvas, sendo essencial para navegação e cartografia.

2.1. Como a Esfera Define suas Próprias “Retas”

- A “Reta” passa a ser um Círculo Máximo: É a intersecção da esfera com um plano que passa exatamente pelo seu centro.
- Paralelas não existem: Duas retas (Círculos Máximos) sempre se cruzam, exceto em pontos diametralmente opostos (ex: meridianos se cruzam nos polos), negando fortemente o Quinto Postulado.

2.2. Triângulos Que Somam Mais de 180°

O Triângulo Esférico é formado por três arcos de Círculos Máximos. Diferente do plano (que soma 180°), na esfera, a soma dos ângulos internos é maior que 180°. A soma deve ser maior que 180° e menor que 540° e esse excesso angular aumenta conforme a área do triângulo.

3. Conectando a Teoria à Prática com o Transferidor Esférico

O Transferidor Esférico é o recurso didático pedagógico central que conecta toda a teoria matemática às aplicações na Geografia e navegação.

3.1. Coordenadas Geográficas: A Geometria do Planeta

O sistema de coordenadas geográficas é a prova de que a Geometria Esférica funciona. Os Meridianos (Longitude) são Círculos Máximos, representando as “retas” da esfera. Os Paralelos (Latitude), exceto o Equador, são Círculos Menores e não representam as “retas”. Entender essa diferença é essencial para saber que o caminho mais curto (geodésica) sempre segue um Círculo Máximo.

3.2. Medindo a Distância Real: Trabalhando os Arcos Geodésicos

A distância real (D) entre dois pontos ($P1$ e $P2$) na Terra é calculada pelo ângulo central (a) que o arco forma no centro do planeta, usando a fórmula ($D = R \cdot a$, onde R é o raio da Terra).

Para calcular o ângulo central, utiliza-se a Lei dos Cosseno Esféricos, que está presente no livro de Coutinho (2001, p. 99):

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$

O exemplo prático demonstra o cálculo de distância mais curta entre São Paulo e Atenas.

As Coordenadas Geográficas que temos são:

- São Paulo (SP): Lat $\approx -23,5^\circ$ (sul); Lon $\approx -46,6^\circ$ (Oeste)
- Atenas (AT): Lat $\approx 37,9^\circ$ (Norte); Lon $\approx 23,7^\circ$ (Leste)

Agora precisamos obter os valores dos lados b e c , que são as Colatitudes do ângulo A , que nada mais é que a diferença de Longitude.

O Transferidor Esférico nos permite calcular a Colatitude das cidades em relação ao Polo Norte.

Para isso vamos calcular a diferença da Colatitude das cidades:

$$\text{Atenas: } 90^\circ - 37,9^\circ = 52,1^\circ$$

$$\text{São Paulo: } 90^\circ - (-23,5^\circ) = 113,5^\circ$$

Em seguida, calculamos a diferença de Longitude entre São Paulo e Atenas (Ângulo A)

$$\text{Ângulo (A): } 46,6^\circ \text{ (Oeste)} + 23,7^\circ \text{ (Leste)} = 70,3^\circ$$

Aplicando a Lei dos Cossenos Esféricos com os dados obtidos:

$$\cos(a) = \cos(52,1^\circ) \cdot \cos(113,5^\circ) + \sin(52,1^\circ) \cdot \sin(113,5^\circ) \cdot \cos(70,3^\circ)$$

Agora vamos realizar os cálculos:

$$\cos(a) \approx (0,614) \cdot (-0,399) + (0,789) \cdot (0,917) \cdot (0,337)$$

$$\cos(a) \approx -0,245 + 0,244$$

$$\cos(a) \approx -0,001$$

E então, precisamos encontrar a Distância Angular (a), para isso vamos utilizar o arco do cosseno (*arccos*):

$$a = \arccos(-0,001) \approx 90,06^\circ$$

Logo, a distância entre São Paulo e Atenas é de aproximadamente $90,06^\circ$.

O próximo passo é converter essa distância angular (a) em quilômetros (D), para isso usamos o raio médio da Terra ($R \approx 6371\text{km}$) e convertemos o ângulo para radianos ($\frac{\pi}{180^\circ}$):

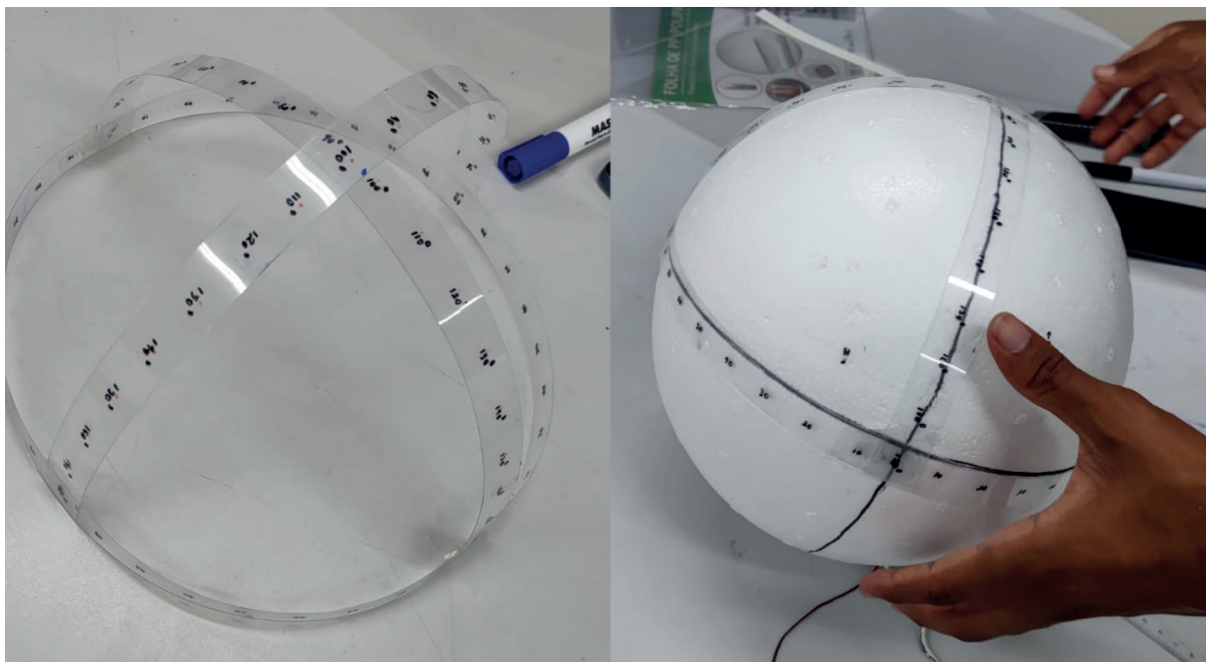
$$D = R.a. \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$D \approx 6371.90,09^\circ \cdot \frac{3,14}{180^\circ}$$

$$D \approx 10.015\text{Km}$$

O Transferidor Esférico (conforme imagem 1) permite aos alunos medirem esse ângulo na prática, transformando a fórmula em uma ferramenta real de cálculo de distância entre cidades.

Figura 1 – Transferidor Esférico construído para o projeto



Fonte: acervo da autora (2025)

PROCEDIMENTOS E CRONOGRAMA

A proposta didática está organizada em 10 encontros de 100 minutos cada, focadas em proporcionar experiências que levem o aluno a investigar, criar e aplicar seus conhecimentos em situações reais.

Nº de aulas	Conteúdos	Atividades Desenvolvidas
01 a 03	Fundamentação Histórica.	História de Euclides; 5 Postulados e as Geometrias Não-Euclidianas (Bolyai, Lobachevsky e Riemann)
04 e 05	Geometria Esférica.	Definição de Círculos Máximos, Triângulos Esféricos e Geodésicas (comparação de rotas em mapas planos e no Globo Terrestre).

06 e 07	Interdisciplinaridade (Matemática e Geografia)	Coordenadas Geográficas: Latitude, Longitude, Paralelos e Meridianos. História da Navegação e Instrumentos como sextante, astrolábio e bússola.
08 e 09	Construção do Transferidor Esférico.	Construção e manuseio do Transferidor Esférico. Exercícios práticos de medição e cálculo de distâncias.
10	Conclusão: síntese dos aprendizados.	Avaliação Formativa, síntese do conteúdo e debate sobre a aplicabilidade da Geometria Esférica.

Procedimentos

O projeto será aplicado dentro do Programa Personaliza Plus, na Escola Sesi Santo André (CE 265), voltado para estudantes que buscam desafios, estimulando o pensamento crítico e a autonomia. A proposta segue os princípios das metodologias ativas e do Desenho Universal de Aprendizagem (DUA), priorizando a experimentação e a construção de sentido.

Os encontros terão exploração prática, com observação e formulação de hipóteses, relacionando os conceitos da Geometria Esférica a situações concretas. O trabalho será conduzido de forma colaborativa, incentivando o diálogo entre pares e a reflexão mediada pelo professor.

Espera-se que o Transferidor Esférico ajude os alunos a compreenderem a Geometria Esférica de forma clara, desenvolver raciocínio espacial e enxergar sentido na Matemática através da prática.

AVALIAÇÃO FORMATIVA

A avaliação será dividida em dois momentos:

1. Desafios e Demonstrações: Em duplas, os alunos deverão demonstrar o uso correto do Transferidor Esférico, resolvendo situações-problema e identificando as limitações da Geometria Plana em superfícies curvas. O professor observa a execução e o uso dos conceitos.
2. Debate Conceitual (Mesa Redonda): Avalia a capacidade do aluno em contextualizar, argumentar e refletir sobre os aspectos históricos e conceituais. O debate de abordar as relações entre os Postulados e a Geometria Não-Euclidiana, a importância da Geometria Esférica e como o Transferidor auxiliou na compreensão.

Os critérios de avaliação sugeridos incluem: Domínio Prático e Teórico, Uso do vocabulário e conceitos, Conexão coesão conceitual e Clareza na argumentação.

RESULTADOS ESPERADOS

Espera-se que os alunos compreendam os conceitos da Geometria Esférica de forma significativa por meio de práticas, reconhecendo suas aplicações na navegação e o uso das coordenadas geográficas. Ao utilizarem o recurso para a resolução de situações-problema,

espera-se que desenvolvam habilidades de interpretação e análises de forma autônoma. O projeto visa servir como material de apoio aos docentes enriquecer as aulas, permitindo que os alunos percebam a aplicação dos conceitos em contextos reais, ampliando suas percepções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este projeto nasceu da vontade de expandir o conhecimento e aproximar a Matemática do mundo real, mostrando aos alunos que o conhecimento não pode ficar limitado apenas a teoria, mas que é preciso viver as experiências, construir instrumentos e transformar conceitos abstratos em algo concreto e palpável.

A verdadeira aprendizagem acontece quando o aluno percebe sentido naquilo que faz e constrói. O uso do Transferidor Esférico possibilita que o aluno seja protagonista da sua própria aprendizagem, percebendo que a Matemática é uma linguagem que ajuda a explicar o mundo em que vivemos. Mais do que construir um instrumento, cada aluno é convidado a construir o seu próprio conhecimento e compreendê-lo.

Entre Paralelos e Meridianos é uma proposta que busca ressignificar o ensino da Geometria, aproximando a teoria e prática no cotidiano do aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOU, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. 1. ed. Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2007. 344 p.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às geometrias não euclidianas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

CHIPOCH, Ana Paula. *Programa Personaliza Plus*. Sesi - São Paulo. [2026?] no prelo.

DEVITO, Edson; FREITAS, Lúcia; PEREIRA, Ricardo. *Contribuições das geometrias não euclidianas*. São Paulo: Editora Moderna, 2006

FAZENDA, Ivani. *Interdisciplinaridade: História, teoria e pesquisa*. 21. Ed. Campinas: Papirus, 2012.

_____. *O que é Interdisciplinaridade?* São Paulo: Cortez, 2008.

_____. *Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro: Efetividade ou ideologia*. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

JAPIASSU, Hilton Ferreira. *Interdisciplinaridade e a patologia do saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976

_____. *O sonho Transdisciplinar: e as Razões da Filosofia*. Rio de Janeiro: Imago, 2006

PAULA, Luiz Tiago de; ARRAIS, Ubiratan Barros. *Matemática e Geografia: as contribuições da interdisciplinaridade da Geometria não-euclidiana e da Cartografia no Ensino e aprendizagem*. Revista Faculdade FAMEN, Natal, v. 3, n. 2, p. 1-20, 2023.

SANTOS, Wellington Tavares dos. *A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico*. 2016

SESI-SP, Orientações didáticas para professores do Personaliza: Matemática. São Paulo, 2024

THOMAZ, Ângela; FRANCO, Neide. *Geometria Não-Euclidiana: Geometria Esférica*. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2007/2008.

ZABALA, Antoni. *As sequências didáticas e as sequências de conteúdo*. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 53-87.