



CONJECTURAS: INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

FROME, Luisa - Autor¹
ARRAIS, Ubiratan B. - Coautor²

¹ Licencianda em Matemática pela Faculdade Sesi de Educação, luisafromesantos@gmail.com.

² Professor de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação, ubiratan.arrais@sesisp.org.br

RESUMO

Este trabalho, vinculado ao GEPSMHAG – Grupo de Estudos e Pesquisa em Saberes Matemáticos: história e prática docente em aritmética e geometria – tem por objetivo expor e analisar um episódio ocorrido na formação inicial de professores de Matemática, durante a Unidade Curricular: *Dimensões, Grandezas e Medidas em Geometria*, da Faculdade SESI de Educação. A partir de uma pergunta feita por mim sobre o cálculo do volume de um cilindro, partindo da ideia de sólido de revolução surgiu daí uma oportunidade para a aprendizagem coletiva e a exploração do Teorema de Papus (Boyer, 1996), abrindo discussões mais profundas dos significados das fórmulas usuais. De acordo com as ideias de Shulman (1986, 1987) que destacam a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo e na construção de um ambiente de exploração para (Lorenzato, 2006), tal acontecimento proporcionou a observação da matemática abordada não apenas como uma aplicação de regras e fórmulas, mas como uma busca por sentido, trabalhando a geometria como uma ciência das formas e aprofundando-se na compreensão das propriedades e relações que as define como objeto geométrico. Esta análise evidencia a importância de ambientes pedagógicos que acolham a investigação, a escuta ativa e o pensamento crítico na formação docente para a produção de interpretações que afirmam a essência matemática.

Palavras-chave: Educação matemática, investigação Matemática, formação docente.

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é constantemente associada a imagem tradicional de exata, sólida e inquestionável, pela forma como é apresentada nas escolas, reduzida a aplicação de fórmulas e procedimentos padronizados (Lorenzato, 2006). Essa abordagem contribui para uma visão limitada, que desconsidera sua historicidade e a possibilidade de compreendê-la como uma construção humana, sujeita a problematizações e investigações, sendo ainda, fomento para a exclusão escolar. No entanto, situações inesperadas que emergem em contextos de ensino podem romper com essa perspectiva e promover aprendizagens significativas, evidenciando a Matemática como uma ciência viva, encontrando novos caminhos quando buscamos sentido a partir da compreensão de suas propriedades e relações, nesse caso, geométricas.

Esse trabalho analisa um episódio como esses, que podem romper com a visão mecanicista e favorecer aprendizagens significativas. Ocorrido na Unidade Curricular “Dimensões, Grandezas e Medidas em Geometria”, durante a formação inicial de professores de Matemática da Faculdade Sesi De Educação, o professor Ubiratan, apresentava a ideia de sólido de revolução, quando me veio um questionamento. A condução feita por ele, proporcionou a mim e aos demais alunos o engajamento para buscarmos respostas e a discussão sobre o potencial de cenários que favorecem investigações coletivas (Lorenzato, 2006), ampliando a compreensão das fórmulas usuais e reafirmando a Geometria como a ciência das formas e suas relações.

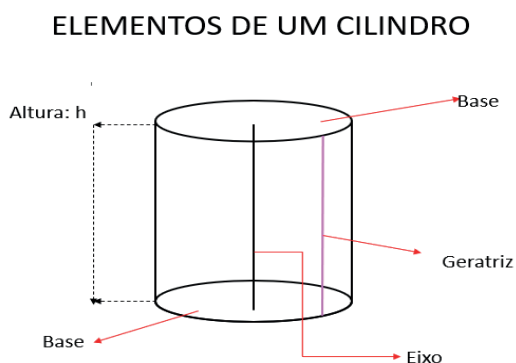
A experiência vivenciada dialoga com as reflexões de Shulman (1986, p.9). quando afirma que “ensinar é compreender não apenas o conteúdo, mas as formas mais poderosas de representá-lo”. Em outra obra, o autor ressalta que “o conhecimento pedagógico do conteúdo é o amálgama especial entre matéria e pedagogia” (Shulman, 1987, p.8), evidenciando a importância de que o professor mobilize esse conhecimento para transformar situações imprevistas em oportunidades formativas. Além disso, ao acolher a minha pergunta e permitir que ela fosse investigada como uma conjectura, o professor criou um espaço em que os alunos poderiam formular hipóteses, explorar ideias e construir conhecimento coletivamente (Lorenzato, 2006).

Diante disso, entre os objetivos desse trabalho estão: (I) descrever e analisar o episódio da conjectura, destacando como se configurou um cenário para a investigação; (II) contextualizar historicamente o Teorema de Pappus, evidenciando sua contribuição para a Geometria e para o desenvolvimento da Matemática; e (III) discutir a relevância desse tipo de experiência para a formação docente, relacionando com as perspectivas apresentadas. Para assim, alcançar a compreensão e a valorização da contribuição de situações como esta para uma educação crítica e investigativa de professores a fim de romper a ideia da Matemática plena, pronta e acabada, alcançando para além, os alunos do ensino básico.

2. RELATO DE EXPERIÊNCIA

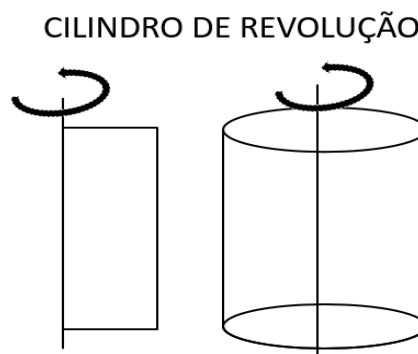
No dia 16 de maio de 2025, sexta-feira, em uma das aulas sobre sólidos geométricos iniciavam-se os estudos sobre cilindros e cones. O professor Ubiratan, quem ministrou as aulas da matéria de “Dimensões, Grandezas e Medidas em Geometria”, iniciou a aula naquele dia usando slides que exemplificavam a ideia de cilindro de revolução e exibiam seus elementos. O cilindro de revolução é um sólido geométrico que foi formado pela rotação de um retângulo (figura plana) em torno de um de seus lados (o eixo de rotação).

Imagem 1 – Elementos de um cilindro



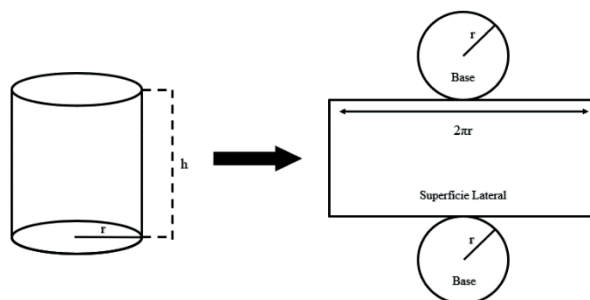
Fonte: Própria, 2025

Imagem 2 – Cilindro de revolução



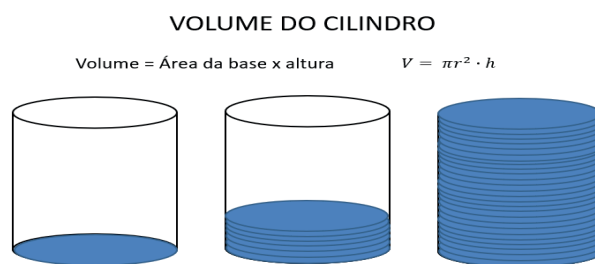
Fonte: Própria, 2025

Após entendermos essas questões passamos a olhar para o cilindro em sua forma planificada para o cálculo da área total, e então fomos construindo juntos as melhores maneiras de articular aquela figura. A partir do coletivo começam a surgir os “por quês” que norteiam essas investigações, para Lorenzato (1993), eles são um elemento básico para que ocorra a aprendizagem significativa, pois podem manifestar a curiosidade para conhecer as respostas, isto é, os “porquês”.



Antes de irmos para a próxima etapa, o professor fez a pergunta que mudaria a aura fluida e plena desta aula: “Agora, como poderíamos calcular o volume desse sólido?” Prontamente alguns alunos responderam “Área da base, multiplicada por sua altura!”, conceito que foi construído anteriormente com outros sólidos, como os prismas. Podemos visualizar essa ideia se pensarmos em folhas de papel circulares, dispostas uma em cima da outra e sua espessura sendo 1 unidade de medida de altura, portanto, basta sabermos a área da folha circular e quantas delas precisamos para preencher totalmente o sólido (uma folha de papel circular para cada unidade de altura do cilindro), como mostra a imagem.

Imagem 4 – Representação volumétrica



Fonte: Própria, 2025

Na imagem 3, podíamos ver as medidas necessárias para prosseguir com esse cálculo, evidenciada também a sua base pela planificação, dando indícios para o pensamento do cálculo do volume de uma maneira que parecia mais tradicional para aquela turma, representada pela fórmula:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Sendo, πr^2 a medida da área da base circunferencial e h a altura do sólido. Entretanto, eu, me lembrando da formação do sólido por revolução, conjecturei: “Se tomarmos a área do retângulo que originou o cilindro e multiplicarmos pelo percurso da formação do mesmo, não teremos também seu volume?”

Singela, pensou “Ora, se podemos dispor algumas circunferências até que tenhamos o tal valor, porque não rotacionar o retângulo que nos foi apresentado?” Senti-me desvelando o óbvio, não com um sentimento de superioridade, mas como se pressentisse o próximo passo daquela aula. Porém, não foi planejado pelo professor outro cálculo que não fosse o tradicional, podia perceber por suas expressões que via sentido no questionamento, ainda que não tivesse vivenciado momento como este.

Nesse momento ele transformou sua aula em um Laboratório para Educação Matemática (Lorenzato, 2006), dizendo: “Isto é uma conjectura! Devemos testá-la!”. Seria mesmo possível encontrar o “porquê”, por este caminho? Como testaríamos ele? Mobilizando não apenas a mim, conjecturando orgulhosa, mas juntamente com os demais alunos, a fim de provar aquilo que acabara de ser apresentado.

Iniciamos com generalizações, sabendo que para termos a área do retângulo multiplicamos suas duas dimensões, no caso do retângulo em questão, usando de referência as imagens 1 e 3, podemos dizer que a área do retângulo é o seu lado r (o raio da base circunferencial) multiplicado por seu lado h (a altura do cilindro), e pelo trajeto percorrido por ele (comprimento da circunferência, na figura 3 como $2\pi r$). Sendo assim, chegamos em:

$$V = r \cdot h \cdot 2\pi r$$

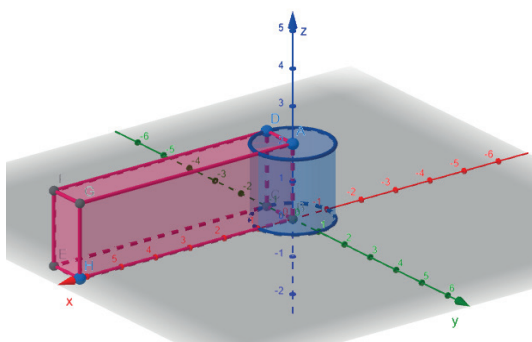
Juntando os termos semelhantes e reorganizando, temos:

$$V = 2\pi r^2 \cdot h$$

Com isso, percebemos que chegamos ao dobro do volume do cilindro (em comparação a generalização na sua forma mais tradicional), um espanto para os alunos envolvidos que viram sentido na conjectura da colega e então começaram algumas suposições para o equívoco. Entre as explicações e demonstração que surgiram decorrentes da descoberta, compreende-se uma

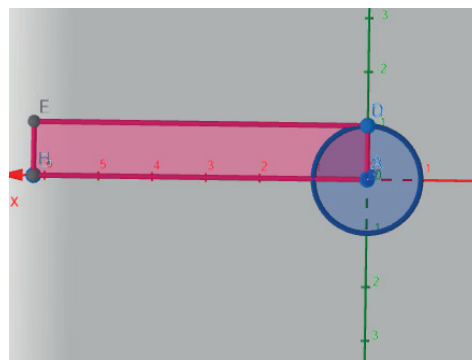
representação com um prisma ao invés de um cilindro, sendo ela representada nas imagens a seguir.

Imagem 5 – Comparativo



Fonte: Própria, 2025

Imagem 6 – Comparativo



Fonte: Própria, 2025

O novo sólido formado, representa o dobro do volume do cilindro, sendo ele um prisma de base retangular com os retângulos que formam sua base medindo o mesmo tamanho da figura plana que originou o cilindro, e a sua altura (distância entre uma base e outra) sendo a distância linear percorrida por ela para formar o cilindro. A partir dessas apurações, houve uma grande investigação entre professores e alunos para encontrar respostas a falha desta conjectura, foram alguns dias entre pesquisas e investigações até chegarmos ao Teorema de Pappus.

A denominada “conjectura de Luisa” se mostrou importante para os envolvidos, ao fim, não apenas para encontrar uma resposta, mas sim refletir sobre como aquele momento simples se expandiu para a aprendizagem partilhada. Ressoando entre a maturidade dos futuros professores, pensando juntos com a finalidade de construir os conhecimentos necessários para poder atender da melhor maneira aquilo que vos espera em sala de aula. Para essa aprendizagem foi necessária uma situação de investigação que se assemelhou aos processos necessários para que a matemática fosse concebida em sua história.

Quanto aos professores universitários que acolheram ao cenário inesperado, após a busca para apropriar-se dos “porquês”, foram capazes de promover um ambiente que permitiu não somente a transmissão de ideias, mas o esforço, saindo do âmbito da sala de aula e permeando os recursos da história da matemática. Com o pressuposto de que a educação matemática é “uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e ou a apropriação/construção do saber matemático” (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p.5), percebemos a importância do conhecimento pedagógico, neste contexto, para a formação de professores.

Shulman nos faz refletir sobre como o papel do professor se molda no processo de ensino e aprendizagem, levando em consideração que:

Partimos do pressuposto de que um professor competente é membro de uma comunidade profissional e está preparado, disposto e capacitado para ensinar e para aprender com suas experiências práticas. Portanto, os elementos que aparecem na teoria são: Preparado (tem visão), Disposto (tem motivação), Capacitado (tanto sabendo, como sendo capaz de “fazer”), Reflexivo (aprende com a experiência) e Comunitário (agindo como membro de uma comunidade profissional). Cada uma dessas dimensões envolve aspectos do desenvolvimento pessoal/profissional e pode conectar-se com parte de um currículo de formação docente ou de formação continuada (Shulman; Shulman, p. 123, 2014)

Tais elementos foram essenciais para que encontrássemos respostas, com muita procura, juntando conhecimentos entre professores e alunos, até que podemos ver a grandeza da experiência e termos a oportunidade de transformá-la em um trabalho acadêmico, para assim demonstrar a magnitude da formação docente que está sendo regida pelo currículo da Faculdade SESI.

3. TEOREMA DE PAPUS

Papus de Alexandria viveu por volta do século IV d.C., período em que Alexandria ainda era um importante centro intelectual, embora já não vivesse o mesmo esplendor dos tempos helenísticos. Sob domínio do Império Romano do Oriente, a cidade conservava parte da tradição científica grega, e a produção matemática da época era marcada menos por descobertas originais e mais pela preservação e sistematização do conhecimento que foi herdado. Pouco se sabe sobre sua vida pessoal, mas sua obra mais conhecida, a *Coleção Matemática – Synagoge* –, é um marco na história da matemática pois reúne comentários e aprofundamentos aos saberes acumulados por matemáticos como Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e outros (Boyer, 1996).

Segundo Boyer (1996), o trabalho de Papus se destaca por seu esforço em organizar e sistematizar o conhecimento geométrico num período de transição cultural, quando a herança científica grega corria o risco de se perder. A *Coleção Matemática*, originalmente composta por oito livros, chegou até nós de forma incompleta — os livros I e II estão perdidos, e partes de outros também se perderam ao longo dos séculos. Isso evidencia a fragilidade da preservação do saber científico na Antiguidade Tardia, mas também reforça o valor inestimável daquilo que foi conservado.

Papus não foi apenas um compilador; ele também apresentou ideias originais e demonstrações que revelam um domínio sofisticado da geometria clássica. Sua escrita era marcada por rigor lógico, clareza argumentativa e uma notável capacidade de generalização (Boyer 1996). Nesse sentido, ele representa um elo entre a matemática antiga e o florescimento da matemática moderna, já que muitas de suas ideias só seriam retomadas e plenamente exploradas durante o Renascimento europeu, quando matemáticos como Descartes, Fermat e Newton tiveram acesso às traduções latinas dos textos gregos.

É nesse contexto que Papus formula os dois teoremas que hoje levam seu nome, e que estão relacionadas as descobertas apresentadas, ambos sobre a geração de sólidos de revolução — tema que revela não apenas seu interesse por formas em movimento, mas também sua busca por generalizações elegantes dentro da geometria. No livro VII da *Synagoge*, Papus apresenta dois resultados fundamentais que estabelecem esses teoremas, e são apresentados por Boyer (1996) da seguinte forma: (I) a área da superfície de um sólido gerado pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo fixo é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida por seu centroide durante a rotação; e (II) o volume do sólido gerado pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo externo a figura é igual ao produto da área da figura pelo percurso circular do seu centroide.

O segundo teorema, mais diretamente relacionado ao episódio vivenciado pelos estudantes na aula relatada, pode ser expresso como:

$$V = A \cdot 2\pi R$$

Com **A** representando a área da figura plana rotacionada e **R** a distância do centroide da figura ao eixo de rotação. Chegando ao estudo desse teorema, obtivemos as respostas necessárias

para aprimorar a conjectura proposta em sala, marcada pelo descobrimento do centroide.

Centroide é o ponto que representa o “centro de massa” ou o “ponto de equilíbrio” de uma figura plana de densidade uniforme Boyer (1996). Em figuras simples, como retângulos e triângulos, ele coincide com o centro geométrico, o baricentro. Por exemplo, no retângulo que gera um cilindro por rotação, o centroide se encontra no ponto médio de suas diagonais. Para figuras mais complexas, o centroide pode ser determinado por meio de métodos de integração ou de decomposição em figuras mais simples.

Imagem 7 – O Centroide

Fonte: Própria, 2025

No contexto do Teorema de Pappus, o centroide é fundamental porque o volume do sólido de revolução depende da distância que ele percorre ao girar em torno de um eixo — ou seja, da circunferência traçada por esse ponto. A genialidade do teorema está em mostrar que, conhecendo apenas a área da figura plana e o caminho circular do centroide, é possível determinar o volume do sólido gerado por rotação, sem precisar decompor o sólido ou realizar somatórios, algo que só seria formalizado com o desenvolvimento do cálculo integral, séculos mais tarde.

Para encontrarmos a distância do Centroides do retângulo ao eixo de rotação do cilindro, são válidos alguns caminhos, entre eles o mais simples seria se entendêssemos que na figura em que se origina o sólido em questão o centro de massa está localizado no ponto de intersecção entre as semirretas que ligam as medianas dos lados opostos. Portanto, a medida do lado do retângulo disposto na base do cilindro é congruente a semirreta horizontal que mede, o ponto do Centroides é também congruente a mediana desta semirreta, tornando a distância entre ele e o eixo metade da medida da base. No caso do cone de revolução, a sua figura geométrica de origem é o triângulo retângulo com o cateto adjacente ao ângulo de 90 graus posto na base do sólido, sendo o baricentro dele o centroide.

Imagem 8 – Cálculo do Centroides

Fonte: Própria, 2025

Desse modo, entendemos que para o caso do cilindro $R = r/2$ e A a área do retângulo revolucionado (compreendido por r multiplicado por h), substituindo no teorema de Pappus, temos:

$$V = r.h. 2\pi. r/2$$

Juntando os semelhantes e reorganizando, teremos:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Voltando a forma tradicional e mais utilizada, dessa forma provando a veracidade do teorema e chegando ao ponto crucial da investigação da minha conjectura. Usando apenas a distância entre o centroide e o eixo obtivemos o valor exato do volume do sólido e não o dobro como quando foi conjecturado. A fim de ressaltar, desvelado o caso iniciou-se um debate sobre o uso do teorema no ensino básico abrindo espaço para novos problemas e a importância da pesquisa constante com objetivo de entrever e reter repertório de grande parte das ferramentas matemáticas.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A conjectura, a postura do professor e o encontro com o teorema, evidenciou que a matemática não se limita à aplicação de fórmulas e resultados prontos, mas envolve um processo constante de investigação e descoberta, ultrapassando o campo puramente teórico do teorema de Pappus e gerando uma oportunidade de desenvolvimento intelectual e pedagógico. Durante essa análise, foi possível perceber que as dúvidas e situações inesperadas, muitas vezes trazidas por perguntas que não estamos preparados para responder, possuem grande importância na formação docente, fortalecendo a prática e a postura como educadores em formação. Assim, adquirindo o tino para transformar um questionamento em parte do processo para a construção do conhecimento, de forma que os alunos se sintam protagonistas do mesmo e façamos juntos, matemática.

5. REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. Os “por quês” matemáticos dos alunos e as respostas dos professores. Pro-Posições, Campinas, v. 4, n. 1, p. 73–77, 1993.

LORENZATO, Sérgio (Org.). Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

SHULMAN, Lee S. O conhecer e o compreender na profissão docente [Tradução de “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”, 1986]. Tradução sem referência editorial definida.

SHULMAN, Lee S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma [Tradução de “Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform”, 1987]. Cadernos Cenpec, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 196–229, 2014.

SHULMAN, Lee S. The Wisdom of Practice: Essays on Teaching, Learning, and Learning to Teach. San Francisco: Jossey-Bass, 2016.