

O método de trajetória dual para fixação de variáveis com aplicação ao problema de recobrimento de conjuntos

Paulo Michel F. Yamagishi

Marcia Fampa*

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, RJ, Brazil

E-mail: ypaulo@gmail.com, fampa@cos.ufrj.br,

Jon Lee†

University of Michigan

Ann Arbor, MI, USA

E-mail: jonxlee@umich.edu.

RESUMO

No *Problema de Recobrimento de Conjuntos (Set Cover Problem (SCP))*, consideramos um conjunto de elementos e uma coleção de subconjuntos desses elementos, cada subconjunto tendo um custo associado. O objetivo é selecionar subconjuntos cuja soma dos custos seja mínima e que, juntos, cubram (ou contenham) todos os elementos do conjunto original (ver, por exemplo, [1]). O SCP é um problema clássico de otimização combinatória, fundamental para a teoria da complexidade computacional e com aplicações nas mais diversas áreas. Ele pertence à classe de problemas NP-completo, conforme demonstrado no artigo seminal de Karp [4].

O SCP pode ser formalmente definido da seguinte forma. Sejam w um vetor real positivo n -dimensional e A uma matriz 0/1 $m \times n$. Sejam $M := \{1, 2, \dots, m\}$ e $N := \{1, 2, \dots, n\}$. O valor w_j representa o custo da coluna j de A , para $j \in N$. Dizemos que a coluna $j \in N$ cobre a linha $i \in M$ de A se o elemento (i, j) de A é igual a 1. O SCP busca um subconjunto $S \subseteq N$ de colunas de custo mínimo, tal que cada linha $i \in M$ seja coberta por pelo menos uma coluna $j \in S$, ele é naturalmente formulado como o seguinte problema de programação linear 0/1:

$$\min\{w^\top z : Az \geq \mathbf{e}, z \in \{0, 1\}^n\} \quad (\text{SCP})$$

Tendo como objetivo encontrar a solução ótima de SCP, o algoritmo de *branch-and-bound* é um dos métodos exatos mais usados e fundamentais [5]. O sucesso do algoritmo depende do cálculo de bons limites inferiores e superiores para SCP, o primeiro pode ser obtido com a solução da relaxação contínua de SCP e o segundo é dado por uma solução viável para o problema. Uma técnica bastante conhecida, utilizada para aumentar a eficácia do algoritmo de branch-and-bound na resolução de problemas de otimização inteira é a *fixação de variáveis por custo reduzido (reduced-cost fixing)* [2]. A técnica objetiva reduzir o tamanho do problema e desta forma acelerar o processo de solução. De forma geral, a técnica funciona usando informação dual da relaxação contínua do problema e um limite superior para o valor de sua solução ótima, para inferir variáveis cujos valores podem ser fixados, preservando as soluções ótimas.

No caso do SCP, o problema dual de sua relaxação contínua pode ser formulado como:

$$\max\{u^\top \mathbf{e} : u^\top A \leq w^\top, u \geq 0\}, \quad (\text{D})$$

e a técnica de fixação de variáveis por custo reduzido baseia-se no Teo. 1.

*Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq, bolsa 307167/2022-4

†Parcialmente financiado por ONR grant N00014-24-1-2694

Teorema 1. *Seja UB o valor da função objetivo para uma solução viável para SCP, e seja $\hat{u}$ uma solução viável para D. Para toda solução ótima z^* para SCP, temos:*

$$z_j^* \leq \left\lfloor \frac{UB - \hat{u}^\top \mathbf{e}}{w_j - \hat{u}^\top A_{\cdot j}} \right\rfloor, \quad \forall j \in N \text{ tal que } w_j - \hat{u}^\top A_{\cdot j} > 0. \quad (1)$$

Para $j \in N$, devemos ter o lado direito em (1) igual a 0 para fixar z_j em 0 em SCP.

É comum encontrar a técnica de fixação de variáveis por custo reduzido associada ao uso da solução ótima de D no Teo. 1. No entanto, qualquer solução dual viável pode ser utilizada. Propomos então, que ao resolver a relaxação contínua de SCP para obtenção de um limite inferior para sua solução, utilize-se um método dual viável, por exemplo, o método dual-simplex, que gera uma solução dual viável a cada iteração. Finalmente, propomos utilizar todas as soluções duais encontradas durante as iterações do método no Teo. 1, objetivando criar novas oportunidades para fixar variáveis sem esforço computacional adicional significativo. Denotamos esta técnica para *fixação por trajetória dual (dual-path fixing)*. Ressaltamos que a técnica pode ser facilmente generalizada para problemas de otimização inteira com relaxações contínuas convexas.

Na Tab. 1, apresentamos o tamanho médio ($n \times m$) do SCP (para 5 instâncias de cada tamanho) antes e depois de fixar variáveis por custo reduzido e por trajetória dual uma vez e iterativamente até que nenhuma variável seja fixada. Após fixar variáveis, também eliminamos linhas redundantes de A . Para fins de comparação, apresentamos também o tamanho do problema reduzido após aplicarmos a custosa e não prática técnica *fixação forte (strong fixing)* apresentada em [3], que leva ao maior número de variáveis fixas com o uso do Teo. 1. Geramos instâncias conforme [3] e para averiguar a capacidade máxima do procedimento proposto, utilizamos suas soluções ótimas como o limite superior UB no Teo. 1. Os resultados apresentados na Tab. 1 demonstram o potencial da técnica de fixação por trajetória dual para aprimorar a técnica de fixação por custo reduzido, aproximando-a da técnica da fixação forte.

Original	Uma única vez		Iterativamente		
	fixação por custo reduzido	fixação por trajetória dual	fixação por custo reduzido	fixação por trajetória dual	fixação forte
500×2504	119×127	112×118	70×74	69×73	14×14
1000×7935	232×361	219×337	163×247	126×180	17×17
1500×14863	606×1267	587×1222	564×1172	531×1098	71×95

Table 1: Reduzindo SCP fixando variáveis e eliminando linhas redundantes

Palavras-chave: *recobrimento de conjuntos, programação linear 0/1, fixação de variáveis por custo reduzido, fixação de variáveis por trajetória dual*

References

- [1] E. Balas e A. Ho, Set covering algorithms using cutting planes, heuristics, and subgradient optimization: A computational study, em “Combinatorial Optimization” (M.W. Padberg, ed.) pp. 37–60, Springer, 1980.
- [2] H. Crowder, E.L. Johnson e M. Padberg, Solving large-scale zero-one linear programming problems, *Operations Research*, 31 (1983) 803–834.
- [3] C. D’Ambrosio, M. Fampa, J. Lee e F. Sinnecker, On a geometric graph-covering problem related to optimal safety-landing-site location, *Discrete Applied Mathematics*, 379 (2026) 613–634.
- [4] R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, em “Complexity of Computer Computations” (R. Miller e J. Thatcher, eds.) pp. 85–103, Plenum, 1972.
- [5] A.H. Land e A.G. Doig, An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica*, 28 (1960) 497–520.