

Sobre o Sistema Predador-Presa com Crescimento Logístico e Colheita

Francis Felix C. Puma

Gabriel Rodrigues Jagielski*

Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática

89065-200, Campus Blumenau, Blumenau, SC

E-mail: francis.cordova@ufsc.br, g.r.jagielski@gmail.com

RESUMO

Este trabalho investiga a estabilidade local de um modelo predador-presa do tipo Lotka-Volterra [3, 7] com crescimento logístico [5] e colheita constante da população de presas. A análise fundamenta-se na linearização do sistema em torno dos pontos de equilíbrio, permitindo estabelecer condições suficientes para a estabilidade assintótica [4, 6]. O modelo considerado é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - cx_1x_2 - h, \\ \dot{x}_2 = -bx_2 + dx_1x_2, \end{cases} \quad (1)$$

onde x_1 e x_2 representam as populações de presas e predadores, respectivamente; $a, b > 0$ são taxas intrínsecas; K é a capacidade de suporte; $c, d > 0$ descrevem a interação entre as espécies; e $h > 0$ é a taxa constante de colheita.

Os equilíbrios, dependem da constante de colheita escolhida, e são calculados ao impor $\dot{x}_1(t) = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, são eles:

$$E_1^+(h) = \left(\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{hK}{a}}, 0 \right) ; h \in \left[0, \frac{aK}{4}\right] \quad (2)$$

$$E_1^-(h) = \left(\frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{hK}{a}}, 0 \right) ; h \in \left[0, \frac{aK}{4}\right] \quad (3)$$

$$E_2(h) = \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c} - \frac{hd}{bc} - \frac{ab}{cdK} \right) ; h \in \left[0, \frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dK}\right)\right]. \quad (4)$$

A caracterização da estabilidade baseia-se nos autovalores da matriz Jacobiana avaliada em cada equilíbrio. Demonstramos que o equilíbrio $E_1^+(h)$ é assintoticamente estável sempre que

$$\frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dK}\right) < h < \frac{aK}{4},$$

enquanto $E_1^-(h)$ e o equilíbrio de coexistência $E_2(h)$ são instáveis. Os resultados mostram como a intensidade da colheita altera os regimes dinâmicos do sistema, determinando a persistência ou extinção das populações.

A estabilidade local em torno de um equilíbrio E pode ser classificada analisando a natureza dos autovalores da matriz Jacobiana $Df(E)$ associada a este ponto. A seguir, apresentamos uma definição e resultados da teoria de estabilidade [1, 2].

Definição. Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , e E um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Então:

*Graduando de Licenciatura em Matemática

- (a) Dizemos que E é um *equilíbrio estável* se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para qualquer condição inicial $x(0)$ satisfazendo $\|x(0) - E\| < \delta$, a trajetória $x(t)$ satisfaz:

$$\|x(t) - E\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Um equilíbrio E é dito *instável* se não for estável.

- (b) Dizemos que E é um *equilíbrio assintoticamente estável* se, além de ser estável, satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - E\| = 0. \quad (6)$$

Teorema 1. Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , E um estado de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$, e $Df(E) = \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a matriz Jacobiana associada. Então:

1. Se todos os autovalores de $\mathbf{J}$ têm partes reais negativas, então E é um equilíbrio assintoticamente estável.
2. Se $\mathbf{J}$ possui ao menos um autovalor com parte real positiva, então E é um equilíbrio instável.

Este teorema dá um critério prático para classificar os equilíbrios do sistema. Assim, estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 2. Consideramos o sistema dado pela equação (1) então:

1. O equilíbrio $E_1^+(h)$ é assintoticamente estável se $\frac{ab}{d} \left(1 - \frac{b}{dK}\right) < h < \frac{aK}{4}$.
2. $E_1^-(h)$ e $E_2(h)$ são equilíbrios instáveis.

Palavras-chave: Modelos biológicos; estabilidade local; Lotka–Volterra.

Referências

- [1] W. E. Boyce, R. C. Diprima, "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno", 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [2] C. I. Doering, A. O. Lopes, "Equações diferenciais ordinárias". IMPA: Coleção Matemática Universitária, 2016.
- [3] A. J. Lotka, "Elements of physical biology", Williams & Wilkins, 1925.
- [4] J. D. Murray, "Mathematical Biology I: An Introduction". Springer, 2002.
- [5] F. F. C. Puma, A. W. Henarejos, Controlabilidade local para um modelo Lotka-Volterra, *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v10, 1 (2024) p. e3003.
- [6] J. A. Salvador, S. Arenales, "Modelagem matemática ambiental", Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2022.
- [7] V. Volterra, "Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie". Gauthier-Villars, 1931.