

Modelagem Matemática do Controle Biológico do *Thaumastocoris peregrinus* (Hemiptera: Thaumastocoridae) pelo seu Parasitoide de Ovos *Cleruchoides noackae* (Hymenoptera: Mymaridae)

Jhonatan R. Biller, **Alexandre Molter,** **Glênio A. Gonçalves,**
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, UFPEL,
96160-000, Capão do Leão, RS
E-mail: jhonatan.biller@furg.br, alexandre.molter@ufpel.edu.br, glenio.aguiar@ufpel.edu.br

Leonardo R. Barbosa
Embrapa Florestas
83411-000, Colombo, PR
E-mail: leonardo.r.barbosa@embrapa.br

Resumo: Este trabalho investiga a interação entre o percevejo-bronzeado *Thaumastocoris peregrinus* e o seu parasitoide *Cleruchoides noackae* por meio de um modelo compartimental que descreve a dinâmica populacional desse sistema hospedeiro-parasitoide. Avaliou-se o impacto do aumento do tempo de manipulação do hospedeiro pelo seu parasitoide, mostrando que essa alteração reduz a eficiência do parasitoide e pode induzir oscilações na população da praga. Para recuperar a estabilidade do sistema, formula-se um problema de controle ótimo para um modelo semilinear, com base no Teorema de Rafikov et al. (2008), tomando a taxa de liberação de parasitoides como variável de controle. As simulações indicam que o controlador por realimentação estabiliza a dinâmica populacional mesmo em regime de ciclo limite, exigindo uma liberação inicial mais elevada para compensar a menor eficiência do agente biológico.

Palavras-chave: *controle biológico, sistemas hospedeiro-parasitoide, controle ótimo*

1 Introdução

Originário da Austrália, o gênero *Eucalyptus* foi introduzido no Brasil no início do século XX com o objetivo de suprir a demanda por lenha, dormentes e postes de madeira utilizados nas ferrovias [1]. Em 2024, as florestas plantadas no país apresentaram expansão de 2,2%, correspondendo ao acréscimo de 217,8 mil hectares. A silvicultura nacional totaliza 9,9 milhões de hectares, dos quais 7,7 milhões são ocupados por plantios de eucalipto destinados majoritariamente à produção de papel e celulose [2]. Entretanto, a expansão das áreas cultivadas e a homogeneização genética dos plantios favoreceram a introdução e a disseminação de pragas exóticas, entre as quais se destaca o percevejo-bronzeado do eucalipto, *Thaumastocoris peregrinus* [1]. Essa praga tem provocado perdas significativas na produtividade e na qualidade das árvores, comprometendo o desempenho econômico do setor florestal [3].

Diante do impacto econômico ocasionado por *T. peregrinus*, diferentes estratégias de manejo têm sido investigadas. O controle químico, frequentemente baseado na aplicação de inseticidas do grupo dos neonicotinóides, apresenta eficácia, mas envolve limitações relacionadas ao alto custo, riscos ambientais e potencial seleção de populações resistentes [4]. Nesse contexto, o controle biológico surge como uma alternativa sustentável e promissora. Entre os inimigos naturais do percevejo-bronzeado, destaca-se o parasitoide de ovos *Cleruchoides noackae* (Hymenoptera:

Mymaridae) [5], microvespa também originária da Austrália e especializada em parasitar ovos de *T. peregrinus* [4]. A fêmea do parasitoide oviposita no interior dos ovos do hospedeiro e, ao longo do desenvolvimento larval, o embrião do percevejo é consumido, resultando na emergência de um novo adulto parasitoide.

Motivados por interações dessa natureza, diversos autores têm proposto modelos matemáticos para representar a dinâmica entre populações de insetos-praga e seus inimigos naturais. Em especial, [6] e [7] desenvolveram um problema de controle ótimo não linear aplicado ao controle biológico, empregando a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman [8] para determinar leis de controle capazes de manter a densidade da praga abaixo do nível de dano econômico. O modelo foi aplicado a um sistema genérico hospedeiro-parasitoide, evidenciando o potencial das abordagens de controle ótimo para o manejo populacional.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo propor um modelo matemático para o controle da dinâmica populacional do sistema formado pelo percevejo-bronzeado do eucalipto e seu agente de controle biológico, o parasitoide *C. noackae*. A modelagem proposta busca elucidar as interações entre as populações envolvidas e identificar as condições sob as quais o parasitoide é capaz de suprimir e estabilizar a praga em níveis inferiores ao limiar de dano econômico. São apresentadas simulações numéricas que mostram a eficiência da estratégia de controle proposta.

2 Modelo hospedeiro-parasitoide

A dinâmica do sistema hospedeiro-parasitoide é representada por um modelo compartimental com quatro variáveis de estado. Para o hospedeiro *T. peregrinus*, consideram-se três compartimentos: ovos (x_1), ninfas (x_2) e fêmeas adultas (x_3). O parasitoide *C. noackae* é representado por um único compartimento, formado por fêmeas adultas (x_4). A evolução temporal desses compartimentos é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= rx_3 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - n_1x_1 - m_1x_1 - \frac{ax_1x_4}{1 + ahx_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2n_1x_1 - n_2x_2 - m_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma_3n_2x_2 - m_3x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{\gamma_4ax_1x_4}{1 + ahx_1} - m_4x_4.\end{aligned}\tag{1}$$

em que r representa a taxa de oviposição; K denota a capacidade de suporte em termos de ovos; n_i e m_i correspondem, respectivamente, ao tempo médio de desenvolvimento e ao tempo médio de vida nos estágios i ; γ_i são os fatores de conversão entre estágios; a é a taxa de ataque do parasitoide; e h corresponde ao tempo de manipulação do hospedeiro durante o processo de parasitismo.

Os parâmetros foram definidos com base em dados experimentais: $r = 1,50$ [9], $K = 700$, $n_1 = 1/7,35$ e $n_2 = 1/22,69$ [9], $m_1 = 1/8,0$, $m_2 = 1/8,26$, $m_3 = 1/34,3$ [9] e $m_4 = 1/2,1$ [10]. Os fatores de conversão adotados foram $\gamma_2 = 1,00$, $\gamma_3 = 0,48$ e $\gamma_4 = 0,67$. A taxa de ataque e o tempo de manipulação foram considerados como $a = 2,02$ e $h = 0,18$, respectivamente, calculados a partir de dados experimentais. Parâmetros não disponíveis na literatura foram estimados pelos autores.

Utilizando esses parâmetros e as condições iniciais

$$x_1(0) = 100, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1, \quad x_4(0) = 1,\tag{2}$$

o modelo é compatível com um cenário em que o parasitoide controla eficientemente o hospedeiro, não sendo necessário manejo adicional. Contudo, parâmetros como o tempo de manipulação h podem sofrer variações significativas em função da temperatura, conforme relatado na literatura

[9]. Para ilustrar essa sensibilidade, considerou-se $h = 1,35$, representando uma redução na eficiência de parasitismo. A Figura 1 mostra que essa modificação altera qualitativamente a dinâmica: a densidade de hospedeiros tem crescimento após alguns dias, e o sistema passa a apresentar oscilações, indicando perda de estabilidade.

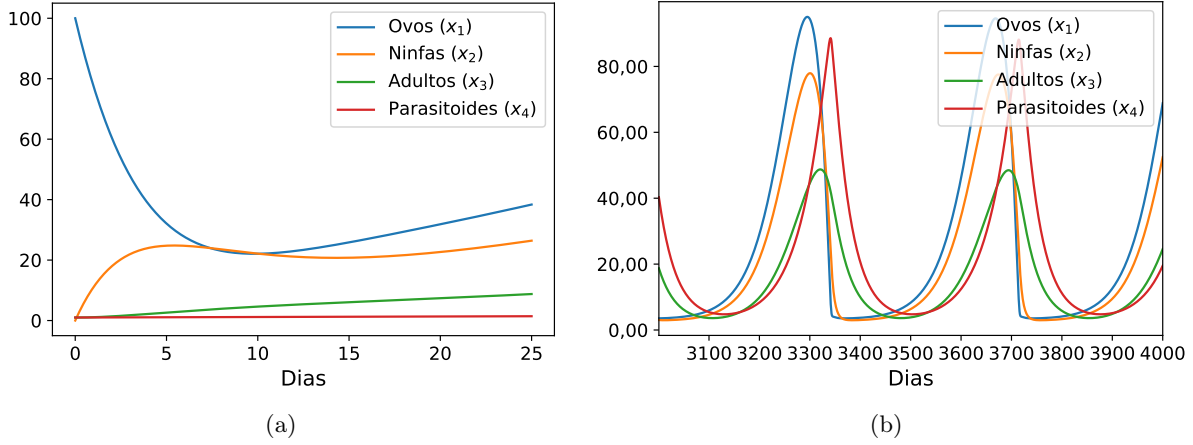


Figura 1: Dinâmica completa do sistema (1) para a condição inicial (2) considerando $h = 1,35$. (a) Transiente. (b) Janela estacionária indicando um equilíbrio de coexistência instável.

Nesse cenário, a atuação isolada do parasitoide pode não ser suficiente para manter a praga em níveis economicamente aceitáveis. Assim, torna-se necessário considerar estratégias de controle capazes de estabilizar o sistema, tema abordado na seção seguinte.

3 Formulação do problema de controle

A equação correspondente à população de parasitoides no modelo compartimental (1) é acrescida do termo de liberação U , o qual representa a taxa de introdução de indivíduos por unidade de área e de tempo. As demais equações preservam sua estrutura original, de modo que o modelo controlado assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= rx_3 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - (n_1 + m_1)x_1 - \frac{ax_1x_4}{1 + ahx_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2 n_1 x_1 - (n_2 + m_2)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma_3 n_2 x_2 - m_3 x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{\gamma_4 ax_1 x_4}{1 + ahx_1} - m_4 x_4 + U, \end{aligned} \quad (3)$$

Considera-se como variável de decisão a taxa de liberação do agente *C. noackae*, denotada por $U = U(t)$. O objetivo consiste em conduzir o sistema para a vizinhança de um equilíbrio de referência admissível do modelo controlado,

$$E^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*), \quad (4)$$

mantido por uma entrada estacionária u^* . O controlador de realimentação é projetado para estabilizar a dinâmica na vizinhança de E^* , mantendo x_3 próximo de x_3^* e, conseqüentemente, limitando ovos e ninfas a níveis compatíveis com esse patamar.

Para analisar a estabilização em torno de E^* , introduzem-se as variáveis desviadas $y = x - x^*$ e $u = U - u^*$. Nessa notação, o sistema (3) pode ser escrito em forma semilinear:

$$\dot{y} = Ay + h(y) + Bu, \quad h(y) = H(y)y, \quad (5)$$

em que A reúne os termos lineares avaliados em E^* , $h(y)$ concentra as não linearidades densidade-dependentes, com $h(0) = 0$, e B representa o vetor de entrada:

$$A = \begin{pmatrix} -n_1 - m_1 & 0 & r\left(1 - \frac{x_1^*}{K}\right) & -\frac{ax_1^*}{1 + ahx_1^*} \\ \gamma_2 n_1 & -n_2 - m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3 n_2 & -m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$H(y) = \begin{pmatrix} -\frac{r(y_3 + x_3^*)}{K} - \frac{a(y_4 + x_4^*)}{[1 + ah(y_1 + x_1^*)](1 + ahx_1^*)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a\gamma_4 x_4^*}{[1 + ah(y_1 + x_1^*)](1 + ahx_1^*)} & 0 & 0 & \frac{a\gamma_4(y_1 + x_1^*)}{1 + ah(y_1 + x_1^*)} \end{pmatrix}.$$

Essa formulação estabelece a base para o critério de desempenho e para o problema de controle ótimo apresentado no teorema a seguir.

Teorema 1 (Rafikov et al., 2008). Considere o sistema semilinear (5), com $h(0) = 0$. Suponha que existam matrizes Q e R , em que Q é simétrica definida positiva e R também é definida positiva, tais que a função

$$l(y) = y^\top Q y - h(y)^\top P y - y^\top P h(y)$$

seja positiva definida. Então, o controle de realimentação linear

$$u = -R^{-1}B^\top P y,$$

minimiza o funcional de custo em horizonte infinito

$$J(u) = \int_0^\infty [l(y) + u^\top R u] dt,$$

estabilizando o sistema no equilíbrio $y = 0$.

A matriz P , simétrica e definida positiva, é solução da equação algébrica de Riccati

$$PA + A^\top P - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0.$$

□

Nas condições do Teorema 1, o equilíbrio (4) é globalmente assintoticamente estável [7]. A seguir, as simulações para o sistema controlado.

4 Simulações

Os valores adotados para os parâmetros do modelo são aqueles apresentados na Seção 2, considerando $h = 1,35$. Para aplicar o Teorema 1 ao sistema (5), utilizam-se as matrizes de ponderação

$$Q = \text{diag}(10, 10, 10, 100), \quad R = [1].$$

Definindo como alvo de controle $x_3^* = 0,1$, os demais componentes do equilíbrio são obtidos a partir do sistema (3):

$$x_1^* = 0,17, \quad x_2^* = 0,14, \quad x_3^* = 0,10, \quad x_4^* = 0,46, \quad u^* = 0,16. \quad (6)$$

A simulação é realizada empregando as condições iniciais,

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 7, \quad x_3(0) = 5, \quad x_4(0) = 0.$$

A Figura 2 apresenta as trajetórias das populações em regime de ciclo limite sob controle ativo. Observa-se que, nesse caso, a densidade máxima do parasitoide é superior à observada no cenário anterior, indicando que, para assegurar a convergência das trajetórias ao equilíbrio (6), o controle exige uma liberação inicial mais intensa de parasitoides. Após esse pico, verifica-se uma redução gradual na densidade populacional, conforme mostrado na simulação até 10 dias (Figura 2a).

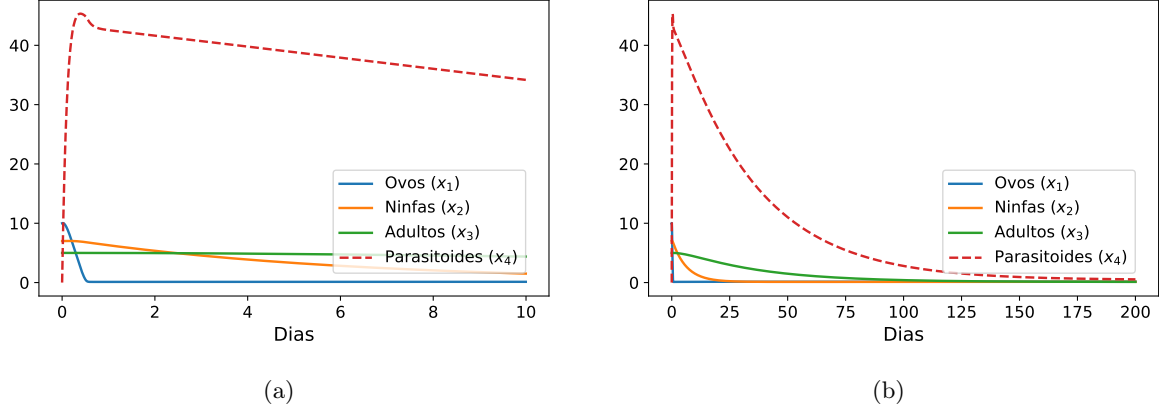


Figura 2: Dinâmica temporal do sistema (1) em regime de ciclo limite sob ação do controle biológico, mostrando a convergência para o equilíbrio (6). (a) Trajetórias das populações até 10 dias (fase transitória). (b) Trajetórias das populações até 200 dias (aproximação ao equilíbrio).

Na simulação estendida até 200 dias (Figura 2b), as trajetórias convergem para o equilíbrio dado por (6). O esforço de controle apresenta, assim como no caso anterior, uma taxa inicial de variação elevada, porém de maior intensidade, conforme ilustrado na Figura 3a. Observa-se também a aplicação de um esforço adicional entre aproximadamente 0,4 e 0,6 dias, necessário para atenuar oscilações transitórias.

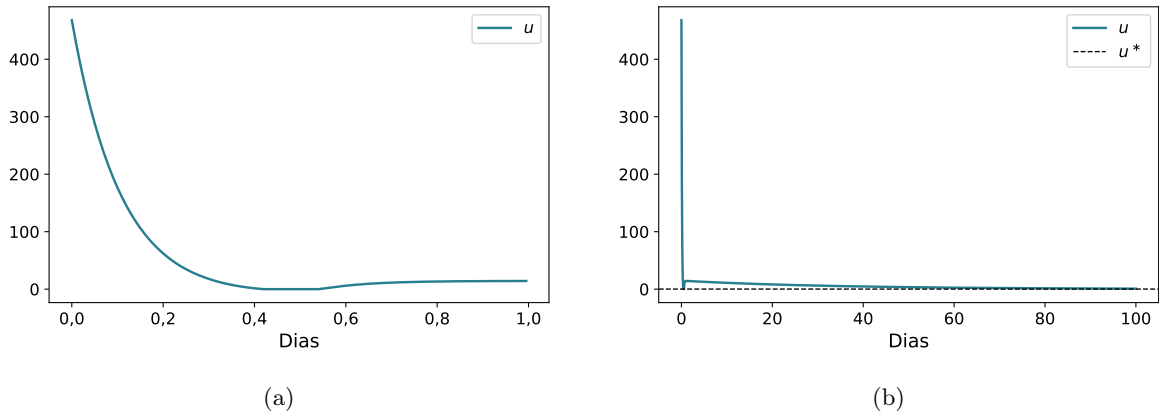


Figura 3: Esforço de controle $u(t)$ aplicado ao sistema (1) em regime de ciclo limite, evidenciando a convergência para o valor de equilíbrio $u^* = 0,16$. (a) Esforço de controle até 1 dia (fase transitória). (b) Esforço de controle até 200 dias (aproximação ao equilíbrio).

A Figura 4 apresenta a evolução da função $l(y)$ associada ao critério de estabilidade. Observa-se que $l(y)$ permanece positiva definida tanto no regime transitório (Figura 4a) quanto no regime

estacionário (Figura 4b), o que confirma a estabilidade assintótica do sistema controlado mesmo em condições de ciclo limite.

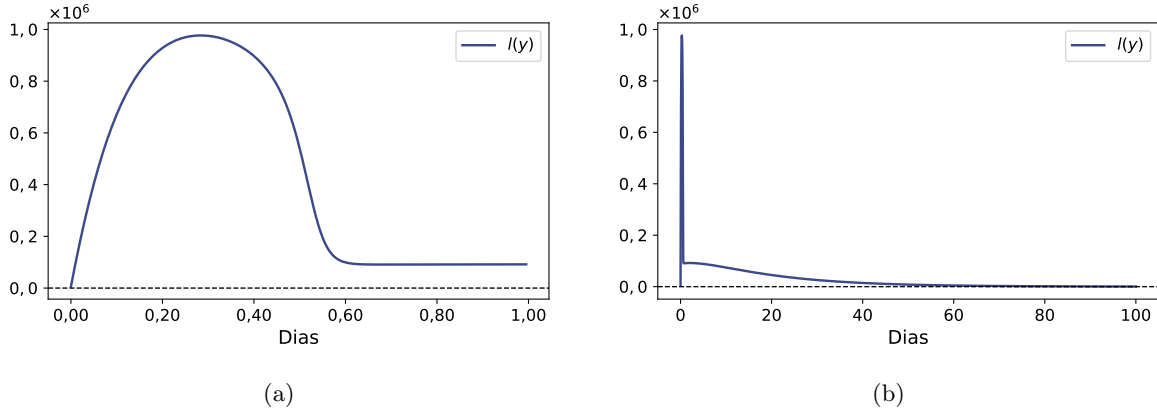


Figura 4: Evolução temporal da função $l(y)$, positiva definida, indicando a estabilidade assintótica do sistema em ciclo limite sob controle biológico. (a) Função $l(y)$ até 1 dia (fase transitória). (b) Função $l(y)$ até 100 dias (aproximação a zero).

Em síntese, o controle biológico é capaz de estabilizar o sistema mesmo quando o tempo de manipulação é ampliado ($h = 1,35$), embora à custa de um esforço de controle mais elevado. Esse comportamento é coerente sob a perspectiva biológica, uma vez que a redução da eficiência do parasitoide exige maior liberação inicial para compensar sua menor capacidade de parasitismo.

5 Conclusões

Neste trabalho, analisou-se um modelo compartimental que descreve a interação entre o percevejo-bronzeado *T. peregrinus* e o parasitoide *C. noackae*. Observou-se que o aumento do tempo de manipulação h compromete a estabilidade natural do sistema, levando ao surgimento de oscilações na dinâmica populacional.

Diante desse comportamento, formulou-se um problema de controle ótimo utilizando a taxa de liberação de parasitoides como variável de decisão. Com base no Teorema de Rafikov et al. (2008), projetou-se um controlador linear capaz de estabilizar a dinâmica em torno de um equilíbrio desejado.

As simulações mostraram que o controle é eficaz em restabelecer a estabilidade mesmo quando o sistema opera em regime de ciclo limite, exigindo maior liberação inicial de parasitoides. Assim, o estudo mostra que a realimentação de *C. noackae* pode compensar a perda de eficiência do parasitoide e garantir a estabilização do sistema.

6 Agradecimentos

Esta pesquisa foi desenvolvida com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também expressam seus agradecimentos à FAPERGS e à FGV/EMAp pelo apoio financeiro concedido.

Referências

- [1] D.L. Carpintero e P.M. Dellapé, “A new species of *Thaumastocoris* Kirkaldy from Argentina (Heteroptera: Thaumastocoridae)”, *Zootaxa*, 1228 (2006) 61–68.

- [2] IBGE — Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, “Valor de produção da silvicultura e da extração vegetal cresce 11,2% e soma R\$ 37,9 bilhões”, Disponível em: Portal de Notícias do IBGE. Acesso em: 10 fev. 2025.
- [3] C.F. Wilcken, E.P. Soliman, N.L. Nogueira, T.K.R. Dias, P.J. Ferreira Filho e R.J. Oliveira, “Ocorrência do percevejo bronzeado do eucalipto *Thaumastocoris peregrinus* Carpintero & Dellapé (Hemiptera: Thaumastocoridae)”, *Revista de Agricultura*, 85(2) (2010) 212–217.
- [4] L.R. Junqueira, “Quantificação de danos causados por *Thaumastocoris peregrinus* (Hemiptera: Thaumastocoridae) em eucalipto”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências Agronômicas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”(UNESP), Botucatu, SP, Brasil, 2016.
- [5] N.Q. Lin, J.T. Huber e J. La Salle, “A new genus and species of Australian Mymaridae (Hymenoptera: Chalcidoidea) parasitic on eggs of Psocoptera”, *Journal of Natural History*, 41 (17–20) (2007) 1159–1171. doi: 10.1080/00222930701360613.
- [6] A. Molter e M. Rafikov, “Nonlinear optimal control of population systems: applications in ecosystems”, *Nonlinear Dynamics*, (2014). doi: 10.1007/s11071-013-1197-9.
- [7] M. Rafikov, J.M. Balthazar e H.F. von Bremen, “Mathematical modeling and control of population systems: Applications in biological pest control”, *Applied Mathematics and Computation*, 200 (2008) 557–573. doi: 10.1016/j.amc.2007.11.036.
- [8] D.S. Naidu, “Optimal Control Systems”, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2003. doi: 10.1201/9780203912188.
- [9] L.R. Barbosa, F. Santos, E. Soliman *et al.*, “Biological parameters, life table and thermal requirements of *Thaumastocoris peregrinus* (Heteroptera: Thaumastocoridae) at different temperatures”, *Scientific Reports*, 9(1) (2019) 1–8.
- [10] L.K. Becchi, L.R. Barbosa, J.E. Serrão *et al.*, “Thermal requirements, fertility life table and biological parameters of *Cleruchoides noackae* (Hymenoptera: Mymaridae) at different temperatures”, *PeerJ*, 11 (2023) e14911, 1–19. doi: 10.7717/peerj.14911.