

Programação Linear e Teoria de Jogos: estratégias do Pôker

Lucas C. Yamashiro*

Vanda Maria Luchesi

Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática

89065-200, Campus Blumenau, Blumenau, SC

E-mail: lucas.carrijo.yamashiro@ufsc.br, v.luchesi@ufsc.br,

RESUMO

Os jogos que podem ser expressos por matrizes constituem uma classe fundamental da Teoria dos Jogos nos quais dois jogadores competem em condições estritamente antagônicas. Cada jogador seleciona estratégias com base em uma matriz de pagamentos A , onde cada entrada a_{ij} representa o ganho do Jogador X e, simultaneamente, a perda do Jogador Y. O objetivo central da resolução do problema consiste em determinar estratégias ótimas que garantam o melhor resultado possível diante do comportamento adverso do oponente, caracterizando o valor do jogo. Se um jogo matricial é estritamente determinado, então as estratégias ótimas para os jogadores X e Y são estratégias que têm componente igual a 1 e todas as outras componentes iguais a zero. Uma estratégia que não é pura é chamada de estratégia mista. Para jogos de soma zero com estratégias mistas, essa análise pode ser sistematicamente formulada por meio da Programação Linear. Nem todo jogo comum se encaixa na teoria de Von Neumann abordada neste trabalho, por exemplo o Xadrez não se encaixa nesta teoria pois os jogadores X e Y podem ter bilhões de estratégias puras. Além do pôker, o bridge também se encaixa na categoria de jogos matriciais pois também contém certas trapaças, que caracterizam as estratégias mistas, [2]. Para aplicar a teoria de programação linear vamos escrever a otimização do Jogador X, denominado Problema Primal, do seguinte modo:

O Jogador X deseja escolher probabilidades $x_1, x_2, \dots, x_n$ associadas às suas estratégias, de forma a maximizar o ganho mínimo garantido, denotado por v . Sua formulação é dada por:

$$\begin{aligned} & \max v \\ \text{sujeito a} & \\ & a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v, \\ & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v, \\ & \vdots \\ & a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v, \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, \quad x_i \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Denotaremos por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz dos coeficientes das restrições e chamamos de matriz pagamento, e $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ o vetor das variáveis estratégicas do jogador X.

A otimização do Jogador Y, será chamada de Problema Dual, e descreve a perspectiva do Jogador Y, que busca minimizar o máximo ganho possível do Jogador X. Sendo assim, o Jogador Y pode escolher probabilidades $y_1, y_2, \dots, y_m$ para suas estratégias, em relação a mesma matriz de pagamentos A. O problema de otimização para o jogador Y pode ser descrito como:

$$\min w$$

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n &\leq w, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n &\leq w, \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n &\leq w, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n &= 1, \quad y_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $y = [y_1 y_2 \dots y_m]$ o vetor das variáveis estratégicas do jogador Y.

Teorema (Fundamental dos Jogos Matriciais). *Todo jogo matricial tem uma solução, [1].*

Teorema (Minimax de Von Neumann). *Para qualquer matriz de pagamentos A, vale:*

$$\max_x \min_y yAx = \min_y \max_x yAx = \text{valor do jogo}. \quad (3)$$

O Teorema Fundamental assegura a existência da solução e o Teorema Minimax que ambos os modelos possuem o mesmo valor ótimo, estabelecendo a existência de estratégias mistas ótimas para os jogadores. Se o jogador X deseja maximizar o seu ganho mínimo. Isto significa escolher uma estratégia x^* tal que:

$$X \text{ garante ganhar pelo menos } \min_y yAx^* = \max_x \min_y yAx.$$

Por outro lado, o jogador Y deseja minimizar o ganho máximo de X. Para isso o jogador Y deve escolher uma estratégia y^* tal que:

$$Y \text{ garante perder no máximo } \max_x y^*Ax = \min_y \max_x yAx.$$

Para ilustrar a aplicação da Programação Linear em jogos matriciais, considera-se um jogo de pôquer simplificado de soma zero entre dois jogadores, X e Y, no qual as escolhas de apostar, desistir ou igualar resultam na seguinte matriz de pagamentos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A solução do modelo de Programação Linear determina as seguintes estratégias ótimas:

- Estratégia ótima do jogador X (blefar com probabilidade $\frac{1}{2}$): $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.
- Estratégia ótima do jogador Y (igualar ou desistir com probabilidade $\frac{1}{2}$): $y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Neste contexto, o jogador X obtém um ganho esperado de **0,50** por rodada (Valor do jogo), evidenciando que estratégias mistas proporcionam equilíbrio e impedem exploração unilateral. Este exemplo mostra como a integração entre Programação Linear e Teoria dos Jogos possibilita determinar equilíbrios em contextos competitivos. Como temos um problema de otimização linear convexo o exemplo pode ser resolvido por meio do método simplex.

Palavras-chave: *jogos, método simplex, matrizes, dualidade*

Referências

- [1] B. Kolman, D. R. Hill, "Introdução a Álgebra Linear: com Aplicações". 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [2] G. Strang. "Álgebra Linear e Suas Aplicações". 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.