

Colheita Sustentável: Análise de Equilíbrios e o Risco de Extinção Populacional

Francis Felix C. Puma Vitória C. Blau*

Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática

89065-100, Campus Blumenau, Blumenau, SC

E-mail: fcordova80@gmail.com, vitoria.blau@grad.ufsc.br.

RESUMO

A gestão racional de recursos naturais, como a pesca sustentável, é essencial para garantir segurança alimentar, renda e emprego. Para tal, a modelagem matemática, especialmente os modelos contínuos que descrevem o crescimento populacional, são importantes para prever o impacto da exploração e prevenir catástrofes. Apresentamos uma análise detalhada dos equilíbrios populacionais e dos riscos de colapso no contexto da exploração de recursos.

Neste trabalho estudamos o Modelo Logístico para uma dinâmica populacional [1, 4], descrito pela Equação Diferencial Ordinária (EDO):

$$\dot{x} = \underbrace{r \left(1 - \frac{x}{K}\right)}_{f(x,h)} x - h \quad (1)$$

Onde r é a taxa intrínseca de crescimento, K é a capacidade de suporte do ambiente, e h é a taxa constante de retirada (pesca, caça ou colheita).

O estudo da dinâmica populacional conforme a taxa de colheita h varia é crucial. Os pontos de equilíbrio (x^*) são os zeros da função $f(x, h)$, onde $\dot{x} = 0$. Para obter os equilíbrios, resolvemos a equação $rx(1 - \frac{x}{K}) - h = 0$,

$$x_{1,2}^*(h) = \frac{K}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}}\right). \quad (2)$$

A condição para que existam equilíbrios reais é que o termo sob a raiz seja não-negativo, ou seja, $1 - \frac{4h}{rK} \geq 0$. Esta condição estabelece o Limite Sustentável de Colheita ($h_{\max}$):

$$h_{\max} = \frac{rK}{4} \quad (3)$$

A variação de h define três regimes críticos:

- i) Colheita Sustentável ($0 < h < h_{\max}$): Existem dois equilíbrios positivos. Matematicamente, estas são as duas raízes reais. Para um h fixado, existe um equilíbrio estável e um instável.
- ii) Colheita Máxima Sustentável ($h = h_{\max}$): Há um único equilíbrio em $x^* = \frac{K}{2}$. Este ponto corresponde a uma raiz dupla.
- iii) Colapso Populacional ($h > h_{\max}$): Não existe equilíbrio. Para todo $x > 0$, a taxa de variação da população é negativa $\dot{x} < 0$.

*Graduanda de Licenciatura em Matemática

Quando ($h > h_{\max}$), a taxa de colheita é considerada insustentável. Nessa condição crítica, não há pontos de equilíbrio, e a população sempre decresce ($\dot{x} < 0$ para todo $x > 0$). A consequência é que a população decresce até a extinção em um tempo finito [2].

A simulação numérica (Figura 1), feita em Python, confirma esta previsão analítica. Utilizando parâmetros como $r = 1.0$, $K = 10.0$ e uma taxa de colheita $h = 3.0$ (onde $h_{\max} = 2.5$), a população inicia em $x_0 = 14.0$ e segue uma trajetória de decréscimo contínuo. O gráfico demonstra que a população cruza o eixo $x = 0$, configurando a extinção, em um tempo finito $T \approx 11.16$. Abaixo de $x = 0$ (Região Não-Biológica), o modelo matemático continua a diminuir. Este resultado mostra que, na prática, a colheita acima do limite $h_{\max}$ leva a um colapso inevitável e rápido. O tempo de colapso (T) é dado pela integral:

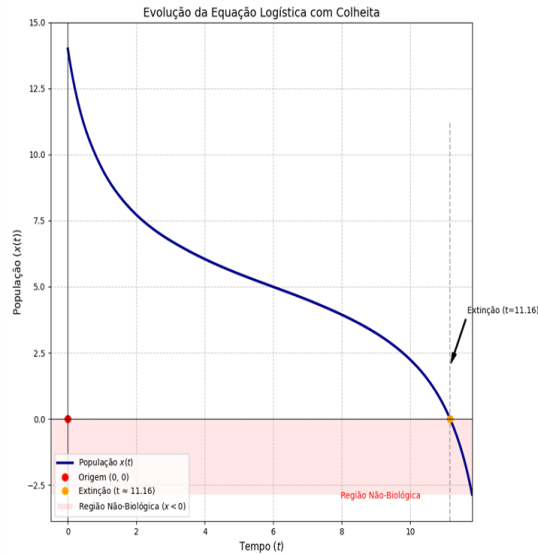


Figura 1: Extinção em Tempo Finito quando $h > h_{\max}$

$$T = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{f(x)} = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{rx(1 - \frac{x}{K}) - h} \quad (4)$$

A análise da integral mostra que: se ($h > h_{\max}$), o tempo de colapso T é finito ($0 < T < +\infty$). Isto indica que, quando ($h > h_{\max}$), o sistema colapsa em tempo finito para qualquer dado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Este limiar ($h_{\max}$) atua como a fronteira dinâmica entre estabilidade e extinção.

A análise de estabilidade mostra que a sustentabilidade depende não só da existência de equilíbrios, mas também da rapidez com que o sistema converge para eles. A passagem de um equilíbrio estável para um ciclo limite instável, ou mesmo para o colapso, é um tema central na ecologia teórica, especialmente em modelos com atraso temporal [3].

Palavras-chave: *Modelo Logístico, Colheita Sustentável, Equações Diferenciais, Análise de Estabilidade*

Referências

- [1] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer.
- [2] Britton, N. F. (2003). *Essential Mathematical Biology*. Springer.
- [3] May, R. M. (2001). *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press. in
- [4] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2002). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora LTC, 7ª edição.