

Análise da Estabilidade para a Equação de Van der Pol

Francis Felix C. Puma Quintino Alexandre*

Universidade Federal de Santa Catarina- Departamento de Matemática
89065-100, Campus Blumenau, Blumenau, SC
, quintinoalexandredasilva@gmail.com.

RESUMO

Este trabalho fundamenta-se na teoria de sistemas dinâmicos modelados por equações diferenciais [1, 3], aplicada à equação de Van der Pol para analisar o comportamento de suas oscilações. Em particular, investigamos vibrações com amortecimento não linear, cuja dinâmica é caracterizada pela presença de um ciclo limite: independentemente da amplitude inicial, as trajetórias no diagrama de fase convergem para uma única órbita periódica à medida que o tempo tende ao infinito. Essa evolução temporal é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} - 2\epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

onde x é a coordenada de posição — uma função do tempo t — e ϵ é um parâmetro escalar positivo que indica o grau de não linearidade e a intensidade do amortecimento. Assim, se x for maior que 1, o segundo termo é dissipativo e implica diminuição da amplitude de oscilação. Se x for menor que 1, o sistema terá fornecimento de energia e a amplitude de oscilação aumentará. Assim, espera-se que, independentemente do estado inicial, o sistema termine oscilando com amplitude próxima de 1. A equação de van der Pol é equivalente ao seguinte sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - 2\epsilon(x^2 - 1)y$$

Nossa contribuição consiste em apresentar, de forma mais detalhada, a demonstração de resultados — disponíveis na literatura, por exemplo, em [2, 4] — e realizar a análise da estabilidade. Nesse contexto, estabelecemos o seguinte teorema:

Teorema. (Ciclo limite) Para a equação de van der Pol existe uma única solução periódica não trivial para a qual toda outra solução (exceto o ponto singular na origem) tende.

Além disso, existe um único ponto de equilíbrio na origem e a matriz Jacobiana nesse ponto é:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

e os valores próprios são

$$\lambda = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}.$$

A origem é um ponto repulsivo, que poderá ser um foco ($\epsilon < 1$), um nó ($\epsilon > 1$), ou um nó impróprio ($\epsilon = 1$). A Figura 1 mostra o retrato de fase no caso $\epsilon = 0.17$, com estado inicial perto da origem: $x_0 = y_0 = 0.1$.

O sistema oscila, com amplitude crescente, mas após algumas oscilações a amplitude aproxima-se de um valor máximo e as oscilações tornam-se cada vez mais uniformes. No retrato de fase, a órbita cresce, aproximando-se de um ciclo com forma de retângulo de vértices arredondados.

Com o mesmo valor do parâmetro, $\epsilon = 0.17$, mas com um estado inicial afastado da origem, o sistema oscila com amplitude que decresce até o mesmo valor obtido no caso anterior, como mostra a Figura 2.

*Graduando de Licenciatura em Matemática

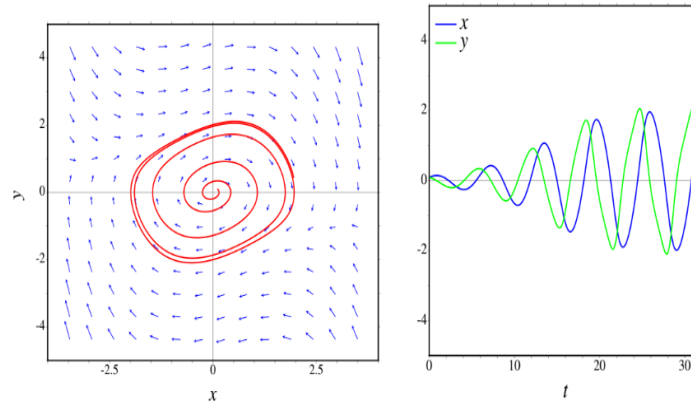


Figura 1: Solução da equação de van der Pol para $\epsilon = 0.17$, com x_0 próximo da origem.

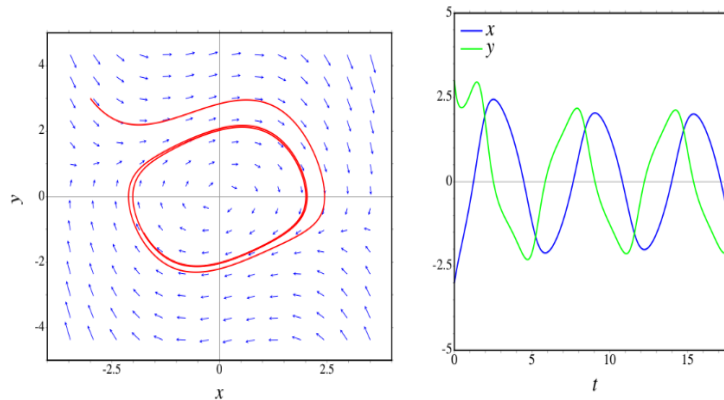


Figura 2: Solução da equação de van der Pol para $\epsilon = 0.17$, com x_0 afastado da origem.

Portanto, percebe-se que quanto menor for o parâmetro ϵ , mais parecidas serão as oscilações a uma função periódica de frequência única (função seno ou cosseno). Quanto maior for o parâmetro ϵ , mais complicadas serão as oscilações. O circuito, ou sistema físico, descrito pela equação de van der Pol é um sistema auto-regulado. Nomeadamente, independentemente do estado inicial do sistema, o estado final será um movimento oscilatório com amplitudes e frequências específicas do circuito.

Palavras-chave: *Ciclos limites, oscilações, equações diferenciais*

Referências

- [1] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2002). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora LTC, 7^a edição.
- [2] Cardin, T. P. Ciclos limites e a equação de van der Pol. Dissertação de mestrado, São José do Rio Preto, Março-2008.
- [3] Doering, C. I., & Lopes, A. O. Equações diferenciais ordinárias. IMPA: Coleção Matemática Universitária, (2026).
- [4] Villate, E. J. Dinâmica e sistemas dinâmicos, 5^a edição. Faculdade de engenharia, Universidade do Porto, 12 de maio de 2019 (2^a reimpressão, 2022).