

# Métodos Geométricos para a Localização de Fauna Terrestre por Redes de Sensores Sem Fio

Natalia S. Sandoval      Karen V. P. Moreras

Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada, PPGMAT, UNIFESP

12231-280, São José dos Campos, SP

E-mail: natalia.sanchez@unifesp.br      karen.pinilla@unifesp.br

**Luiz L. S. Neto**

Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP

Campus São José dos Campos

12231-280, São José dos Campos, SP

E-mail: luiz.leduino@unifesp.br

**Resumo:** Este artigo investiga dois métodos geométricos de localização de alvos, utilizando três sensores fixos, e propõe uma nova abordagem, denominada Incentro Ótimo, que combina estimativas de distância com informações angulares derivadas dessas estimativas para determinar a posição do objeto. A aplicação considerada envolve a localização de fauna terrestre por meio de uma rede de sensores sem fio, cenário no qual a precisão e a robustez das estimativas são essenciais para o monitoramento ambiental. Avalia-se o desempenho do método proposto em comparação com os dois métodos de referência. Os resultados indicam que o Incentro Ótimo apresenta menor erro e um tempo de convergência mais favorável; contudo, assim como as abordagens pré-existentes, não converge para todas as instâncias analisadas. Observa-se também que os dados fornecidos pelos sensores podem gerar duas possíveis localizações para um mesmo alvo, evidenciando ambiguidades inerentes ao problema. Por esse motivo, recomenda-se a inclusão de ao menos uma medida adicional de orientação em um dos sensores, a fim de garantir uma estimativa única e consistente da posição do animal monitorado.

**Palavras-chave:** *Localização de alvos, Geometria de distâncias, Sensores fixos, Métodos geométricos, Ambiguidade de soluções.*

## 1 Introdução

As redes de sensores consistem em conjuntos de dispositivos distribuídos espacialmente em uma região de interesse, capazes de registrar e transmitir informações de forma contínua. Esses sensores podem incorporar transdutores térmicos, infravermelhos, acústicos, de movimento ou de umidade, permitindo a observação detalhada de fenômenos ambientais. Nos últimos anos, tais tecnologias têm ganhado especial relevância em aplicações voltadas à localização e monitoramento de fauna terrestre, nas quais a identificação da posição de animais por meio de assinaturas térmicas, sons, vibrações ou padrões de deslocamento desempenha papel crucial para ações de conservação e pesquisa ecológica.

Dentro desse cenário, as redes de sensores sem fio (RSSF) têm despertado crescente interesse devido ao avanço tecnológico que viabiliza sua operação em ambientes extensos e de difícil acesso. A capacidade de instalar sensores distribuídos, com baixos custos de manutenção e comunicação autônoma, tem ampliado o escopo de aplicações, que incluem monitoramento de habitats, rastreamento de animais em vida livre e estudos de dinâmica populacional. Embora também utilizadas em contextos militares, meteorológicos, sísmicos, urbanos e agrícolas, as RSSF têm se consolidado como uma ferramenta estratégica para o monitoramento ambiental e o estudo da fauna terrestre, permitindo análises mais precisas e de maior resolução espacial e temporal [6].

Conseqüentemente, o problema de determinar a posição de um objetivo em uma rede sem fio é frequentemente abordado, sob o ponto de vista matemático, através da Geometria de Distâncias. Esta área dedica-se ao estudo dos aspectos geométricos relacionados à disposição de objetos em um espaço métrico, baseando-se nas distâncias entre eles [5].

Neste trabalho o problema de localização de alvos consiste então em determinar as coordenadas de um ponto desconhecido  $p_0$ , conhecendo as posições de três sensores não colineares  $p_1, p_2, p_3$  e as distâncias medidas entre eles e o ponto desconhecido. Essas medições estão sujeitas a incertezas decorrentes de ruído, limitações instrumentais ou interferências do ambiente.

## 2 Abordagem da Literatura

De acordo com Cao, Morse e Anderson (2006), é possível estimar as distâncias reais entre o alvo e os sensores âncora a partir das medidas imprecisas  $\hat{d}_{0j}$ , afetadas por erros  $\varepsilon_j$ . A abordagem proposta pelos autores baseia-se na estrutura algébrica do determinante de Cayley–Menger, o que permite formular um sistema quadrático cuja solução fornece soluções consistentes para as distâncias medidas.

Considere agora  $d_{ij} = d(p_i, p_j)$  como a distância Euclidiana exata entre os nós  $i$  e  $j$ , para  $i, j = 0, 1, 2, 3$ . Suponha que apenas as distâncias  $\bar{d}_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , estejam sujeitas a medições ruidosas, enquanto todas as distâncias entre os sensores âncora  $d_{ij}$  para  $i \neq j$  são conhecidas exatamente. Nessas condições, cada medida pode ser expressa como,

$$\bar{d}_{0i}^2 = d_{0i}^2 - \varepsilon_i. \quad (1)$$

**Teorema 1.** *Os erros  $\varepsilon_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , definidos acima, satisfazem uma única igualdade algébrica que é quadrática (embora não homogênea) em  $\varepsilon_i$ , e cujos coeficientes são determinados por  $\bar{d}_{0i}$  para  $i = 1, 2, 3$  e  $d_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ :*

$$\varepsilon^\top A \varepsilon + \varepsilon^\top \mathbf{b} + c = 0, \quad (2)$$

onde  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^\top$ .

Este teorema não será provado, mas a demonstração pode ser encontrada em [2], onde a forma de  $A, b, c$  pode ser visualizada, e os autores mostram que é possível estimar os erros  $\varepsilon_i$  resolvendo o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \quad (3)$$

$$\text{s.a. } \varepsilon^\top A \varepsilon + \varepsilon^\top \mathbf{b} + c = 0 \quad (2)$$

A partir dos valores ótimos  $\varepsilon_i$ , obtêm-se as distâncias reais entre o alvo e cada sensor âncora. Uma vez reconstruídas essas distâncias, [2] aplicam um procedimento geométrico de triangulação para determinar as coordenadas do alvo.

### 2.1 Problema fundamental da geometria de distâncias

Em [4] é apresentado o *problema fundamental da geometria de distâncias* (PGD):

**Definição 2.** *Dado um inteiro  $K > 0$  e um grafo simples  $G = (V, E, d)$ , conectado e com pesos nas arestas  $d : E \rightarrow (0, \infty)$ , encontre uma função  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^K$  tal que:*

$$\forall \{u, v\} \in E, \|x(u) - x(v)\| = d(u, v) \quad (4)$$

No artigo de [1] considera a hipótese de que a distância real  $j \in \{1, 2, 3\}$  é um *número intervalar* da forma:

$$d_{0j} = \hat{d}_{0j} \cdot (1 + \lambda_j \cdot \alpha), \quad \lambda_j \in [-1, 1] \quad (5)$$

Onde  $\alpha \in [0, 1]$  é a tolerância em termos percentuais associada ao método de aquisição da distância  $j$ , e algum  $\lambda_j \in [-1, 1]$ . O artigo propõe um modelo para encontrar os intervalos viáveis máximos para as distâncias  $d_{0j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , consistentes com distâncias euclidianas entre pontos presentes em  $\mathbb{R}^2$ . Para isso, propõem dois modelos não convexos [1], em que suas respectivas soluções são encontradas  $\bar{\lambda}_i$  e  $\underline{\lambda}_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Após a determinação dos intervalos máximos de acordo com os dois modelos anteriores, o PDG é formulado da seguinte maneira::

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & (p_{ix} - x)^2 + (p_{iy} - y)^2 \leq \hat{d}_{0i}^2 \cdot (1 + |\lambda_i| \cdot \alpha)^2, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\ & (p_{ix} - x)^2 + (p_{iy} - y)^2 \geq \hat{d}_{0i}^2 \cdot (1 - |\lambda_i| \cdot \alpha)^2, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\ & \lambda_i \in [-\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i], \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Uma vez resolvido este último problema, a solução considerada é o ponto  $(x, y)$  que otimiza a soma dos raios do intervalo.

### 3 Nova Abordagem Proposta

Seguindo a formulação apresentada por Cao, Morse e Anderson [2], consideramos três sensores localizados nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(47, 0)$  e  $(43, 7)$ . As distâncias estimadas desde cada sensor até o alvo são, respectivamente, 35, 43 e 42 unidades. Dado que conhecemos a distância exata entre os sensores, assim como as distâncias estimadas desde cada um deles até o alvo, essas três medições definem um triângulo. O desafio, porém, é que a orientação correta desse triângulo é desconhecida; ou seja, existe mais de uma configuração possível que satisfaz os mesmos comprimentos, dando origem a soluções geometricamente ambíguas.

Utilizando o teorema do cosseno, é possível determinar os ângulos internos do triângulo formado pelas distâncias estimadas, assim obtemos os ângulos correspondentes às possíveis configurações geométricas. Para os dois triângulos representados nas Figuras 1 e 2, tem-se, por exemplo:

$$\angle CAB \approx 61.19959^\circ, \quad \angle ACB \approx 45.50155^\circ.$$

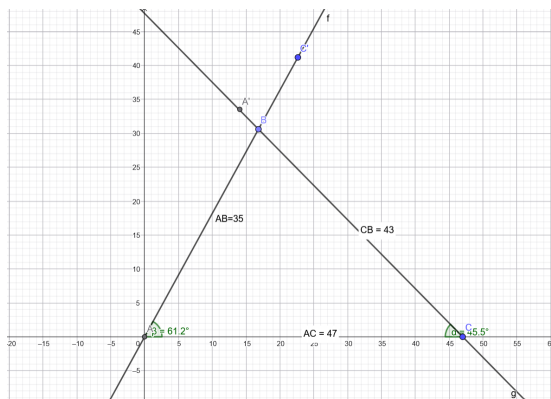


Figura 1: Triângulo 1 gerado pelos sensores  $(0,0)$  e  $(47,0)$ . (Gerado pelo GeoGebra)



Figura 2: Triângulo 2 gerado pelos sensores  $(0,0)$  e  $(47,0)$ . (Gerado pelo GeoGebra)

Uma vez determinados os ângulos dos triângulos formados pelas distâncias estimadas, o passo seguinte consiste em identificar a posição possível do alvo a partir das orientações geométricas envolvidas. Para isso, consideramos que cada par de sensores define um triângulo cuja orientação pode assumir duas configurações simétricas, dependendo do sentido em que os ângulos calculados são posicionados. O método geral para obter a interseção de duas retas, cada uma caracterizada por um ponto conhecido e sua inclinação, é o seguinte. Se uma reta forma um ângulo  $\theta$  com o

eixo  $x$ , então sua inclinação é  $m = \tan(\theta)$ . Usando a fórmula ponto-inclinação para cada reta, a posição de sua interseção é obtida resolvendo o sistema

$$y = m_1x + b_1, \quad y = m_2x + b_2. \quad (7)$$

Após resolver o sistema corrigido, encontrando o ângulo em relação ao eixo  $x$  de acordo com o que foi obtido anteriormente, nas Figuras 1 e 2, respectivamente, encontra-se que os pontos que buscamos são  $(16.86163, 30.67068)$  ou  $(16.86163, -30.67068)$ .

De maneira análoga, para os triângulos gerados pelos outros dois pares de sensores, obtêm-se os seguintes conjuntos de pontos candidatos, respectivamente:

$$\{(78.83493, 28.90568), (5.93429, -12.75183)\}, \{(10.35997, 33.43158), (20.42875, -28.41946)\}.$$

A combinação de todas essas informações geométricas se resume na Figura 3, onde se observa que os pontos que satisfazem as restrições de distância para cada par de sensores formam, em cada caso, dois triângulos possíveis dependendo do sentido dos ângulos. Portanto, a localização mais plausível do alvo deve situar-se no incentro de um desses dois triângulos globais. Os incentros resultantes são:  $(17.11336, 31.82333)$ ,  $(17.47975, -28.03196)$ . Os incentros e pontos encontrados pelos métodos [1] e [2] são mostrados na Figura 4.

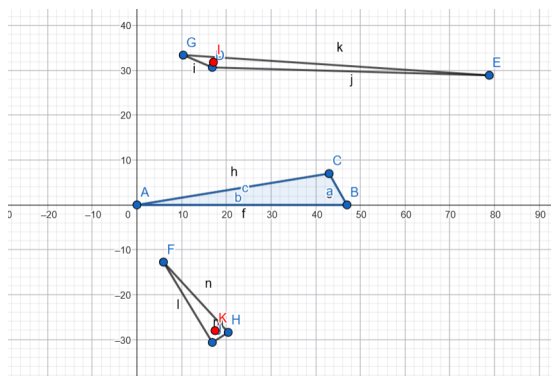


Figura 3: Triângulos gerados. (Gerado pelo GeoGebra)

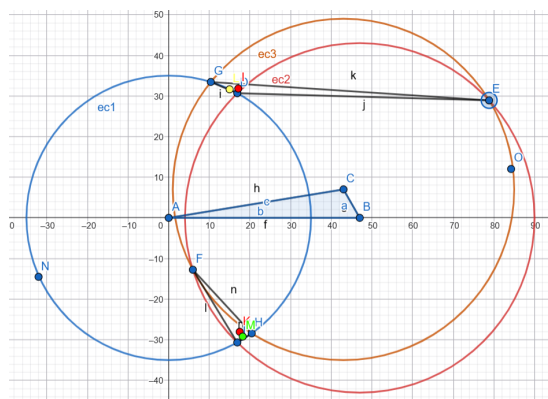


Figura 4: Comparação com os métodos estudados. (Gerado pelo GeoGebra)

Finalmente, ao comparar nossos resultados com as estimativas apresentadas em [1] e [2], observamos que cada um dos pontos obtidos coincide de forma muito próxima com uma das soluções calculadas por esses métodos. Isso sugere que, em ambos os trabalhos, apenas uma das possíveis configurações geométricas foi considerada, enquanto nossa abordagem revela explicitamente a existência de duas possíveis localizações do alvo, derivadas da simetria inerente ao problema.

## 4 Testes Computacionais

Para determinar a eficiência da metodologia usamos Python para gerar 1000 coordenadas de alvos aleatórios em que o alvo  $i$  tem coordenadas tais que:

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{com} \quad x \in [-25, 70], \quad y \in [-20, 20].$$

Em seguida, as distâncias reais até os 3 sensores foram calculadas e o ruído foi adicionado, obtendo-se um erro de até 5% em relação aos valores reais, e a estimativa foi feita com esses valores. Para isso, como tínhamos duas respostas e conhecíamos as distâncias reais, o modelo escolheria o ponto que tivesse a menor distância até o ponto real e compararia esse erro, este método será denominado incentro ótimo. É importante esclarecer que, em um problema real, isso não é possível porque a posição exata do alvo é desconhecida. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.

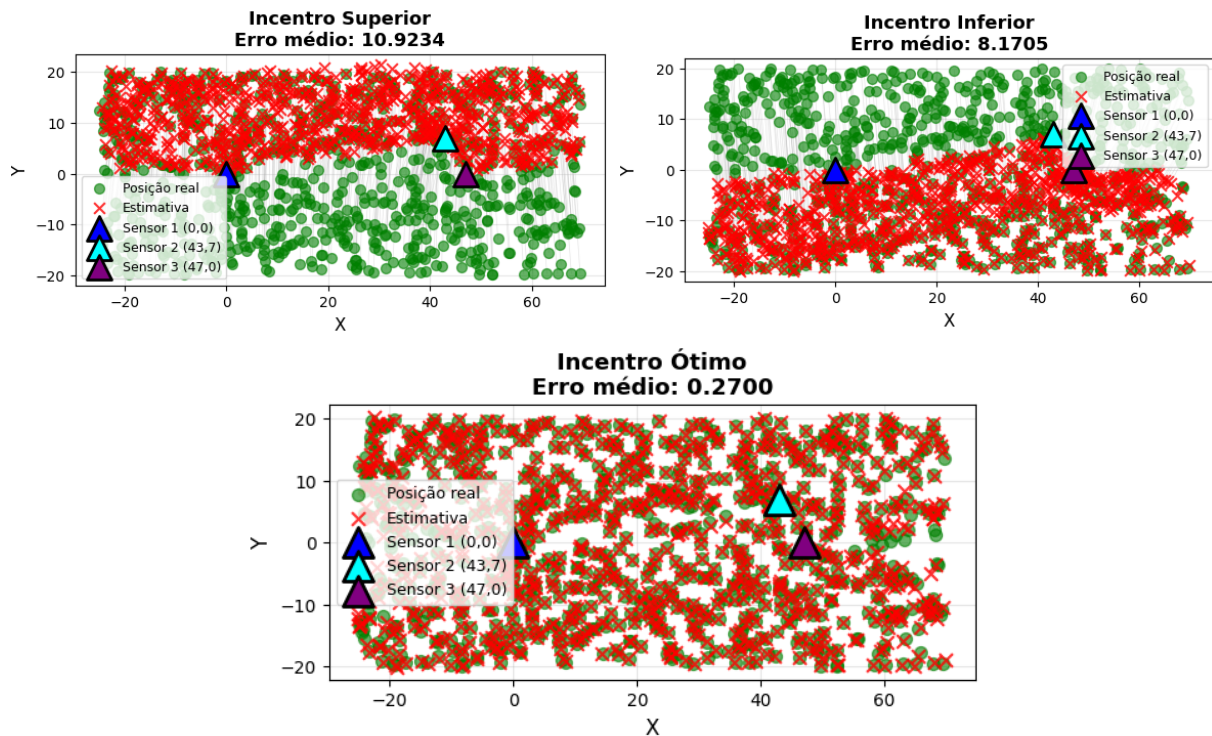


Figura 5: Comparação das soluções de incentro superior, inferior e ótimo.

A solução superior foi selecionada 427 vezes (48.1%) e a solução inferior selecionada: 460 vezes (51.9%). Note que este método convergiu apenas para 887 pontos porque o método falha quando o ruído faz com que as distâncias medidas violem a desigualdade triangular. Os seguintes resultados foram obtidos em relação aos erros.

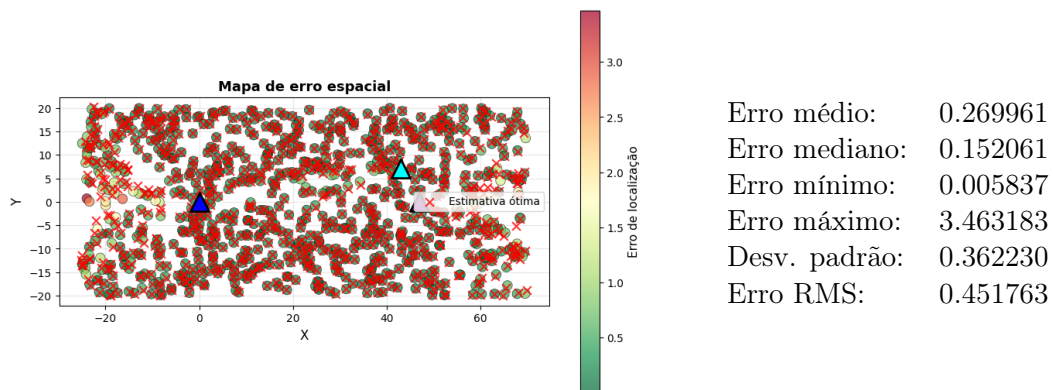


Figura 6: Análise detalhada do Incentro ótimo.

A análise quantitativa, apresentada na tabela de erros da figura 6, confirma o bom desempenho do método. Observa-se um erro médio de apenas 0,152061 e um desvio padrão de 0,362230, valores que evidenciam a consistência das estimativas.

## 5 Comparação com os métodos de Cao e Butkeraites

Agora, trabalhando com o método do incentro ótimo, realizamos uma comparação direta com os métodos de Cao [2] e de Butkeraites [1]. Aplicamos ambos os métodos sobre as 1000 instâncias geradas, verificando seu desempenho e obtendo resultados semelhantes aos reportados em [1].

Uma vez estabelecido esse quadro de comparação, aplicamos o nosso método exatamente sobre as mesmas 1000 instâncias, permitindo assim uma avaliação justa e direta de seu comportamento em relação às abordagens anteriores. Para isso, utilizou-se Python para executar cada um dos métodos estudados, gerando as mesmas instâncias com a semente 17092002 para comparar os resultados e obter gráficos que resumem as informações obtidas.

Comparação	Casos	Percentual
Incentro melhor	695/698	99.6%
Cao melhor	3/698	0.4%

Tabela 1: Comparação entre Cao e Incentro.

Comparação	Casos	Percentual
Incentro melhor	265/524	50.6%
Butkeraites melhor	259/524	49.4%

Tabela 2: Comparação entre Butkeraites e Incentro.

Na tabela 1 observamos um excelente desempenho do método incentro ótimo em comparação com o método Cao [2] nos casos em que ambos convergem, sendo 99,6% mais eficiente.

Na tabela 2 observamos um melhor desempenho do método incentro ótimo em comparação com o método [2] nas instâncias em que ambos convergem, sendo 50.6% mais eficiente, levando-se também em conta que o método incentro ótimo converge em um número maior de pontos e com menos erro, como pode ser visto na tabela 3.

Ao analisar graficamente a distribuição dos erros correspondentes a 90% das observações com menos erros, por meio do histograma apresentado na Figura 7, é possível identificar onde se concentram as distribuições de erro de cada método. Observa-se que o método proposto neste artigo apresenta erros menores em comparação com os outros dois métodos, além de exibir menor dispersão conforme mostrado na figura 8.

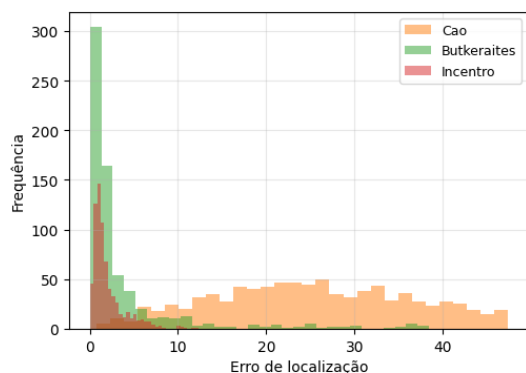


Figura 7: Histograma de erros de convergência

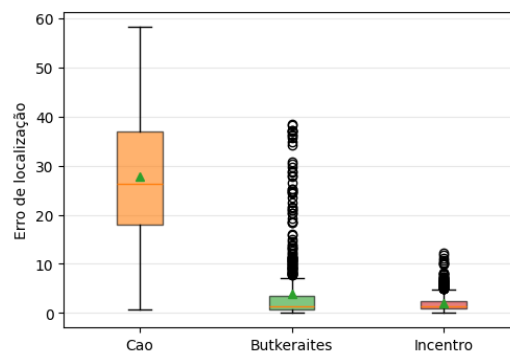


Figura 8: Diagrama de caixa dos erros em cada um dos métodos

Finalmente, a comparação entre os métodos pode ser consolidada nas categorias de Tempo, Erro Médio e Porcentagem de Convergência na Tabela 3. O método proposto apresenta desempenho superior no tempo médio por objetivo, juntamente com um erro significativamente menor. Em contrapartida, no que tange à abrangência da convergência, o método de Cao destaca-se ao convergir em 98,1% dos pontos, embora apresente um erro substancialmente maior.

Métrica	Cao	Butkeraites	Incentro
Convergência	98.1%	67.5%	71.0%
Erro médio	27.7819	3.8173	2.0277
Mediana	26.3291	1.4416	1.3808
Tempo (s)	0.0115	0.0563	0.0002

Tabela 3: Comparação das métricas entre os três métodos.

## 6 Conclusões

De acordo com os resultados obtidos, o método proposto demonstrou desempenho superior tanto no tempo de convergência quanto na precisão, quando comparado a métodos consagrados na literatura, especificamente às abordagens apresentadas em [1] e [2]. Nas comparações par a par, observa-se que, nas instâncias em que todos os métodos convergem, o método proposto apresenta, de forma consistente, os menores erros. Ressalta-se, entretanto, que nenhum dos três métodos convergiu para a totalidade dos pontos analisados, uma vez que a aleatoriedade na geração das instâncias pode gerar configurações geometricamente inconsistentes.

A análise também evidenciou a existência de duas possíveis localizações para um mesmo conjunto de dados, fenômeno decorrente da simetria geométrica das medições. Em nosso experimento, os dois métodos de referência convergiram para soluções distintas, cada qual compatível com as informações disponíveis. Assim, torna-se necessária a inclusão de pelo menos uma informação adicional de orientação em um dos sensores, a fim de eliminar ambiguidades e garantir uma estimativa única e mais precisa da posição do alvo.

Essas conclusões reforçam o potencial de aplicação do método proposto em sistemas reais de monitoramento ambiental, especialmente na localização de fauna terrestre em regiões extensas e de difícil acesso, como a Amazônia. A combinação de sensores acústicos ou térmicos com técnicas geométricas robustas, como o método aqui apresentado, pode contribuir para melhorar a precisão do rastreamento de animais em ambientes densamente florestados, auxiliando iniciativas de conservação e estudos ecológicos de alta resolução.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro que viabilizou o desenvolvimento desta pesquisa, por meio dos processos 2025/19787-8, 2025/19786-1 e 2024/22444-2.

## Referências

- [1] R. B. Butkeraites, L. L. S. Neto e W. A. Lodwick, Localizaçao de alvos por uma rede de sensores sem fio a partir de distâncias intervalares, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, **6**(2), 2018.
- [2] M. Cao, B. D. O. Anderson e A. S. Morse, Sensor network localization with imprecise distances, *Systems & Control Letters*, **55**(11):887–893, 2006.
- [3] R. S. C. Leão, "Distâncias em grafos geométricos aleatórios e suas aplicações ao problema da localização em redes de sensores", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- [4] L. Liberti, C. Lavor, A. Mucherino e N. Maculan, Molecular distance geometry methods: from continuous to discrete, *International Transactions in Operational Research*, **18**(1):33–51, 2011.
- [5] G. Philippi e F. Fidalgo, Localização de Sensores e Geometria de Distâncias, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, **8**(1), 2021.
- [6] T. A. Rhinehart, L. M. Chronister, T. Devlin e J. Kitzes, Acoustic localization of terrestrial wildlife: Current practices and future opportunities, *Ecology and Evolution*, **10**(13):6794–6818, 2020.