

Análise do Modelo Fracionário Fuzzy para Estudar a Dinâmica de Propagação da Mpox na República Democrática do Congo

Antonio M. de Oliveira dos Santos, Matheus J. Lazo,

Instituto de Matemática Estatística e Física, FURG,

96203-900, Rio Grande, RS

E-mail: marcosmatematico22@gmail.com, matheusjlazo@gmail.com,

Daniela Buske

UFPel - Instituto de Física e Matemática

96160-000, Pelotas, RS

E-mail: danielabuske@gmail.com

Resumo: Neste documento, apresentamos uma nova abordagem para o estudo da modelagem epidemiológica. Propomos a estrutura do Modelo Fracionário Fuzzy (MFF) aplicando a incerteza fuzzy na ordem da derivada. Em particular, nosso modelo baseia-se no modelo SEIR, na qual o sistema carrega um efeito de memória, representado por meio da derivada de Caputo. Com o objetivo de capturar toda a dinâmica de propagação da doença e tornar modelo mais realista, introduzimos incerteza na ordem da derivada, representada pela lógica fuzzy. Para isso, inicialmente estudamos os modelos fracionários e suas implicações no mapeamento de doenças infecciosas. Em seguida, introduzimos a incerteza na ordem da derivada e analisamos o impacto dos efeitos que ela pode causar no sistema.

Palavras-chave: *Modelagem epidemiológica, Modelos fracionários, Lógica fuzzy, Derivada de Caputo*

1 Introdução

Modelos epidemiológicos são amplamente utilizados para simular a propagação de doenças em uma população. O ajuste dos parâmetros desses modelos a dados observados é uma ferramenta indispensável na modelagem epidemiológica, pois permite identificar estratégias ótimas de intervenção para controlar a disseminação de uma doença. Isso pode incluir a alocação eficiente de recursos, como vacinação, tratamento e medidas de distanciamento social, bem como o uso de estratégias de testagem para identificar casos positivos de forma eficaz, considerando fatores como precisão dos testes, custos e disponibilidade de recursos [22, 10].

Diante do atual cenário de globalização, mobilidade urbana, mudanças climáticas e da propagação global de doenças altamente letais que antes se concentravam em regiões específicas, torna-se cada vez mais necessário desenvolver modelos capazes de representar a dinâmica complexa dessas enfermidades. Diante desse contexto, a comunidade científica passou a intensificar estudos voltados ao desenvolvimento de modelos capazes de mapear a dinâmica dessas doenças de forma mais precisa. Diversas pesquisas, com diferentes abordagens, surgiram com o objetivo de capturar a dinâmica de propagação dessas infecções de maneira mais realista, buscando minimizar os impactos econômicos e sociais sobre a população [16].

Ainda nesse aspecto, destaca-se o estudo de [18], onde os autores aplicam um modelo com operador híbrido fracionário ao estudo do câncer de mama. Nessa abordagem, eles propõem uma nova estrutura para analisar sistemas de controle de evolução fracionária não linear, utili-

zando derivadas híbridas por partes em relação a uma função não decrescente. A aplicabilidade da estrutura é demonstrada por meio de uma simulação da dinâmica do câncer de mama, ilustrando o impacto das derivadas híbridas por partes no comportamento do modelo e destacando vantagens em relação às abordagens tradicionais de modelagem, que não conseguem capturar adequadamente a natureza multifásica da doença.

Modelos com incertezas fuzzy nos parâmetros têm sido amplamente utilizados na modelagem de doenças. A teoria dos conjuntos fuzzy, desenvolvida pioneiramente por Zadeh [26], fornece uma linguagem matemática rigorosa para incorporar e gerenciar formalmente esse tipo de incerteza. Para tal, é necessário transferir a incerteza das variáveis de estado para os parâmetros do modelo, desde que esse procedimento seja conceitualmente e matematicamente justificável [3]. Em um trabalho mais recente, [7] apresenta uma abordagem inovadora na modelagem epidemiológica, desenvolvendo o modelo denominado Fuzzy Piecewise Fractional Derivative (FPFD). Essa estrutura matemática combina duas ferramentas poderosas: a adaptabilidade dos operadores segmentados e a capacidade do cálculo fuzzy de quantificar a incerteza. O trabalho demonstra uma extraordinária aplicabilidade dessa abordagem na modelagem epidemiológica.

Os estudos [1, 7, 17, 9] apresentam abordagens inovadoras, com resultados excelentes e capazes de representar de forma realista a dinâmica de propagação de doenças. No entanto, apesar dos excelentes resultados, ainda é possível aprimorar os modelos em busca de maior precisão. Nessa perspectiva, utilizamos esses estudos como referência para desenvolver um modelo capaz de apresentar melhor desempenho no mapeamento da dinâmica de propagação de doenças.

Propomos uma nova estrutura: o MFF, com a incerteza fuzzy aplicada na ordem da derivada. Esse modelo determinístico baseia-se na propagação de doenças, aplicando o cálculo fracionário com o objetivo de determinar a ordem ótima da derivada para capturar a memória do sistema. Assim, nosso modelo combina ferramentas poderosas — os modelos com operadores fracionários — e a capacidade do cálculo fuzzy de quantificar incertezas.

Em doenças onde o período de propagação é longo, o sistema apresenta efeitos de memória, que podem ser capturados por meio dos modelos fracionários [2]. Para tornar o modelo ainda mais realista, introduzimos incerteza na ordem da derivada por meio de conjuntos fuzzy.

2 Preliminares

Definição 1. (Operações). As operações fuzzy podem ser aplicadas a quaisquer dois números fuzzy arbitrários, A e B , representados em diferentes formas, trapezoidal ou triangular. Considerando uma função mensurável e contínua $f \in \{\oplus, \ominus, \odot\}$, a fuzziness associada a A e B não é superior nem igual à fuzziness de $f(A, B)$. A fuzziness de A , em qualquer nível de γ -corte pode ser definida como o diâmetro do intervalo correspondente ao número fuzzy. Se a função f for contínua e mensurável, então, para $0 < \gamma < 1$ [5, 19].

- Se $A \oplus B = C$, então $A(\gamma) \oplus B(\gamma) = C(\gamma)$, (Adição);
- Se $A \ominus B = C$, então $A(\gamma) \ominus B(\gamma) = C(\gamma)$, (Subtração);
- Se $A \odot B = C$, então $A(\gamma) \odot B(\gamma) = C(\gamma)$, (Multiplicação).

Definição 2. (Número Fuzzy). Um número fuzzy $\tilde{\mu}$ é uma função de pertinência $\tilde{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades: é normal, fuzzy convexa, semi-contínua superiormente e possui suporte compacto. A sua representação paramétrica, ou forma em γ -nível, é expressa como [3]:

$$[\tilde{\mu}]_{\gamma} = [\mu^{-}(\gamma), \mu^{+}(\gamma)], \quad \gamma \in [0, 1], \quad (1)$$

onde $\mu^{-}(\gamma)$ e $\mu^{+}(\gamma)$ denotam, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo associado ao γ -nível.

2.1 Cálculo fracionário com números fuzzy

Os operadores fracionários fuzzy são uma alternativa adequada para representar os problemas quando as informações e os dados forem ambíguos. Para isso, nesta subseção definimos as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann–Liouville fuzzy, de forma rigorosa [11].

Seja $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ denota o conjunto dos números fuzzy normais, convexo e com suporte compacto. A função fuzzy \tilde{f} pode ser representada por seus γ -nível:

$$\left[\tilde{f}(x) \right]_{\gamma} = \left[\underline{f}_{\gamma}(x), \bar{f}_{\gamma}(x) \right], \quad \gamma \in [0, 1] \quad (2)$$

onde $\underline{f}_{\gamma}(x)$ e $\bar{f}_{\gamma}(x)$ são funções reais que representam, respectivamente, os limites inferior e superior do γ -corte.

Definição 4. (Derivada fracionária de Riemann–Liouville fuzzy) A derivada fracionária de Riemann–Liouville fuzzy de ordem $0 < \alpha < 1$ da função $\tilde{f}(x)$ é definida, para cada γ -nível $\gamma \in [0, 1]$ [11], por

$$D_a^{\alpha} \tilde{f}(x) = \left[D_a^{\alpha} \underline{f}_{\gamma}(x), D_a^{\alpha} \bar{f}_{\gamma}(x) \right] \quad (3)$$

onde as derivadas nos limites são dadas pela definição clássica de Riemann–Liouville pelas funções reais:

$$D_a^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \odot \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \quad (4)$$

portanto, a operação é aplicada nível a nível e o resultado é um número fuzzy derivado.

Definição 5. (Derivada fracionária de Caputo fuzzy) A derivada de Caputo fuzzy de ordem $0 < \alpha < 1$ da função $\tilde{f}(x)$ é definida de maneira análoga a Eq. 3, para cada γ -nível $\gamma \in [0, 1]$ [11]. Em que cada componente é obtida pela definição clássica de Caputo:

$$D_a^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \quad (5)$$

3 Formulação do Modelo

Nesta seção, apresentamos o modelo SEIR formulado por meio de um Sistema de Equações Diferenciais Fracionários Fuzzy (FFDEs). A Figura 1 ilustra o diagrama do fluxo de transmissão da doença.

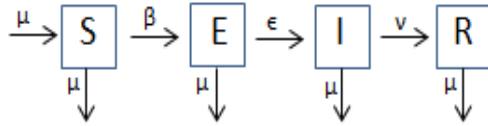


Figura 1: Diagrama de transmissão da doença

3.1 Modelo SEIR Fracionário

Diante da Figura 1, a dinâmica do processo pode ser descrita por meio do seguinte sistema equações diferenciais fracionárias com ordem γ .

$$\begin{cases} \kappa_{\alpha} {}^C D_t^{\alpha} s = \mu - \beta si - \mu s \\ \kappa_{\alpha} {}^C D_t^{\alpha} e = \beta si - \epsilon e - \mu e = \beta si - e(\mu + \epsilon) \\ \kappa_{\alpha} {}^C D_t^{\alpha} i = \epsilon e - \nu i - \mu i = \epsilon e - i(\mu + \nu) \\ \kappa_{\alpha} {}^C D_t^{\alpha} r = \nu i - \mu r \end{cases} \quad (6)$$

em que s é o número de indivíduos suscetíveis, e é o número de indivíduos expostos, i é o número de indivíduos infecciosos, r é o número de indivíduos recuperados, β é a taxa de contato ou taxa de transmissão, ν é a taxa de recuperação, ϵ é a taxa de incubação, μ é taxa de natalidade/mortalidade e α é a ordem da derivada. Com, $s \in [0, 1]$, $e \in [0, 1]$, $i \in [0, 1]$, $r \in [0, 1]$ e $s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1$. É importante ressaltar que, a derivada fracionária possui dimensão de $t^{-\alpha}$, de modo a manter a consistência dimensional com o lado direito do modelo. Assim, a constante κ_α deve ter dimensão de $t^{\alpha-1}$.

3.2 Formulação do modelo com conceito de MMF

Considerando o Sistema 6 como um vetor de funções fuzzy com derivadas de Caputo de ordem $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$, dado por:

$$\kappa_{\tilde{\alpha}} {}^C D_t^{\tilde{\alpha}} [\tilde{X}(t)] = \tilde{F}(\tilde{X}(t)), \quad \tilde{X}(0) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{R}^4 \quad (7)$$

dessa forma, o sistema condensa todas as interações de incerteza associadas aos compartimentos do modelo. Assim, cada equação do sistema passa a incorporar a incerteza inerente ao processo. A seguir, apresentamos a formulação fuzzy da equação correspondente à população suscetível; as demais equações do sistema são apresentadas de maneira análoga.

$$\tilde{F}_{\tilde{s}} = \tilde{\mu} \ominus (\tilde{\beta} \tilde{s} \tilde{i}) \ominus (\tilde{\mu} \tilde{s}) \quad (8)$$

Onde $\tilde{X}(t) = [\tilde{s}(t), \tilde{e}(t), \tilde{i}(t), \tilde{r}(t)]^T$, e $\tilde{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, assim o Sistema 6 reformulado com a incerteza fuzzy é dado por:

$$\tilde{F}(\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{r}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} \ominus (\tilde{\beta} \tilde{s} \tilde{i}) \ominus (\tilde{\mu} \tilde{s}) \\ (\tilde{\beta} \tilde{s} \tilde{i}) \ominus (\tilde{\mu} \oplus \tilde{\epsilon}) \tilde{e} \\ (\tilde{\epsilon} \tilde{e}) \ominus (\tilde{\mu} \oplus \tilde{\nu}) \tilde{i} \\ (\tilde{\nu} \tilde{i}) \ominus (\tilde{\mu} \tilde{r}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

com parâmetros positivos. Os parâmetros para o Modelo 9 são $\tilde{\beta}$ é taxa fuzzy de transmissão, $\tilde{\nu}$ é a taxa fuzzy de recuperação, $\tilde{\epsilon}$ é a taxa fuzzy de incubação e $\tilde{\mu}$ é a taxa fuzzy de natalidade/mortalidade.

A estabilidade do Modelo 9 é analisada de forma análoga à abordagem descrita em [14, 20]. O número básico de reprodução fuzzy, \tilde{R}_0 , parâmetro fundamental para quantificar o impacto da epidemia sobre a população, apresenta para o Sistema 9 a seguinte representação:

$$\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{\beta} \tilde{\epsilon}}{(\tilde{\epsilon} \oplus \tilde{\mu})(\tilde{\nu} \oplus \tilde{\mu})} \quad (10)$$

A estrutura da equação 10 [14, 15] é dada por:

$$\begin{cases} R_0^{[min]} = \frac{\beta_{min} \epsilon_{min}}{(\epsilon_{min} + \mu_{max})(\nu_{min} + \mu_{max})} \\ R_0^{[max]} = \frac{\beta_{max} \epsilon_{max}}{(\epsilon_{max} + \mu_{min})(\nu_{max} + \mu_{min})} \end{cases} \quad (11)$$

Se:

- $R_0^{[max]} < 1$, o sistema é globalmente estável. Ou seja, a doença desaparece em qualquer cenário compatível com os parâmetros fuzzy;
- $R_0^{[min]} > 1$, o sistema é instável. Ou seja, todos os cenários fuzzy são instáveis. Assim acontecerá a epidemia;
- $R_0^{[min]} < 1 < R_0^{[max]}$, tem-se um comportamento incerto. Ou seja, o modelo indica zonas de incerteza na estabilidade, o que pode ser interpretado como um risco fuzzy de epidemia.

4 Resultado

Para obter os resultados numéricos para o Modelo 9 e analisar o comportamento da dinâmica de transmissão da atual epidemia de mpox na RDC, o método preditor-corretor Adams–Bashforth–Moulton (ABM) fuzzy fracionário foi implementado computacionalmente com passo de tempo $= 0.1$. Os parâmetros crisp utilizados na simulação estão apresentados na Tabela 4 e foram fuzzificados considerando uma taxa de incerteza de $\pm 3\%$. Para a ordem da derivada fracionária, a fuzzificação foi realizada dentro do intervalo de incerteza $\alpha \in [0.95, 1.0]$. Todos os dados reais da epidemia de mpox na RDC foram coletados diretamente da planilha de casos disponível em [25]. Para este estudo de caso, consideramos uma população de $P = 105789731$ [24]. Neste documento consideramos a ordem da derivada crisp $\alpha = 0.98$, pois de acordo com as simulações é que apresenta o menor erro.

Parâmetro	Descrição	Valor	Fonte
$\tilde{\beta}$	taxa fuzzy de transmissão	0.15	[6]
$\tilde{\epsilon}$	taxa fuzzy de incubação	0.116	[13, 23]
$\tilde{\nu}$	taxa fuzzy de recuperação	0.0685	[13, 23]
$\tilde{\mu}$	taxa fuzzy de natalidade/mortalidade	$1/70 \cdot 365$	Estimado
$\tilde{\alpha}$	ordem fuzzy da derivada	0.980	Estimado

Tabela 1: Parâmetros adotados na simulação dos dados da RDC para o Modelo 9

A Figura 2 apresenta o comportamento da doença considerando a incerteza nos parâmetros do modelo. Observa-se que a faixa fuzzy representa com precisão a dinâmica de propagação da doença. Isso ocorre porque a taxa de incerteza de $\pm 3\%$ é aplicada a todos os parâmetros clínicos do modelo. Além disso, ao realizar a simulação incorporando uma “memória” ao sistema — representada pelas ordens da derivada fracionária de Caputo —, o modelo é capaz de descrever de forma mais completa a dinâmica de propagação da doença.

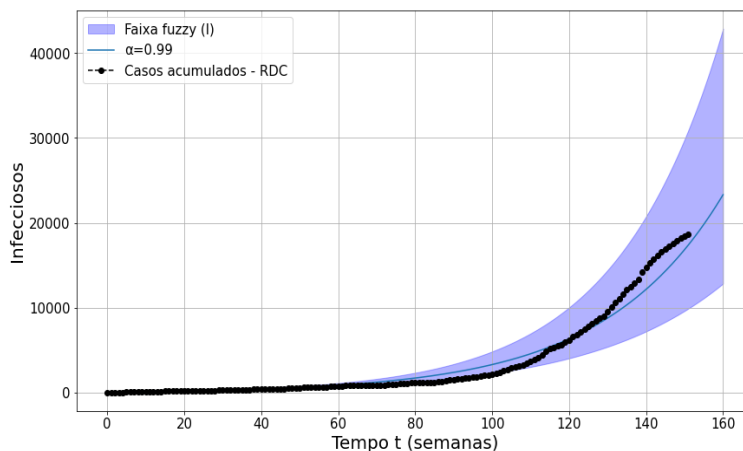


Figura 2: Solução do Modelo 9 com incerteza nos parâmetros

A Figura 3 apresenta o comportamento da doença considerando a incerteza apenas na ordem da derivada, mantendo os parâmetros clínicos do modelo em formato crisp. Nesse caso, embora o modelo consiga representar de forma eficiente a dinâmica de propagação da doença, observa-se que, entre as semanas 60 e 110, a faixa fuzzy não abrange os casos reais. Ainda assim, o modelo é capaz de mapear adequadamente a propagação da doença e demonstra maior eficácia em comparação aos modelos convencionais.

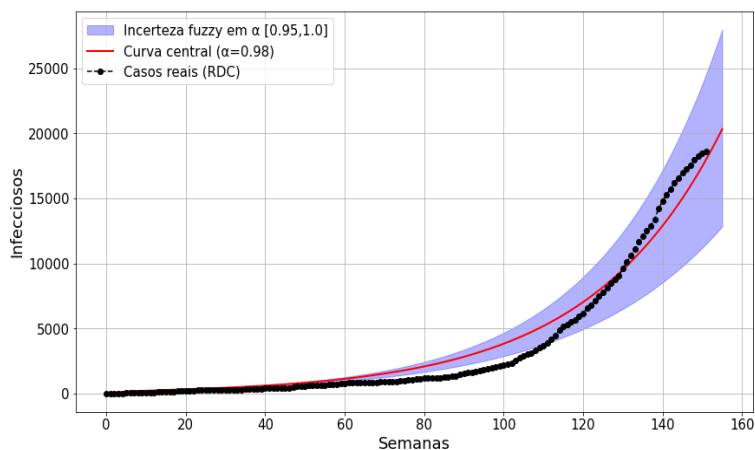


Figura 3: Solução do Modelo 9 com incerteza na ordem da derivada α

5 Conclusão

Neste documento, apresentamos uma modelagem fracionária fuzzy para estudar a dinâmica de propagação da mpox na RDC. O objetivo deste estudo é propor uma nova abordagem baseada em um modelo fracionário fuzzy, de modo a analisar o comportamento da mpox considerando a incerteza fuzzy inerente aos parâmetros clínicos e também à ordem da derivada fracionária. Para isso, apresentamos uma formulação matemática robusta que valida a proposta e fundamenta o desenvolvimento do modelo. Os resultados obtidos demonstram que a modelagem proposta é capaz de capturar a dinâmica de propagação da doença com maior precisão e eficácia. Os resultados indicam que a abordagem fracionária fuzzy apresentada neste trabalho representa de forma mais fiel a dinâmica da mpox em comparação com os modelos epidemiológicos convencionais. Assim, reafirmamos nosso compromisso de continuar investigando e propondo melhorias.

Referências

- [1] M.S. Algolam and A.A. Qurtam and M. Almalahi and K. Aldwoah and M.H. Alqahtani and A. Adam and S.O. Ali (2025). Hybrid Fuzzy Fractional for Multi-Phasic. *Epidemics: The Omicron–Malaria Case Study. Fractal and Fractional.* 9, 643.
- [2] L. C. Barros and M. M. Lopes and F. S. Pedro and E. Esmi and J. P. C. Santos and D. E. Sánchez. (2021). The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of COVID-19. *Computational and Applied Mathematics.* 40(72): 234-256.
- [3] R. C. Bassanezi and L. C. Barros, “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”, Campinas-SP, 2010.
- [4] B. Bede and L. Stefanini. (2012). Generalized Differentiability of Fuzzy-valued Functions. *Fuzzy Sets and Systems.* v-230. p:1-37.
- [5] B. Bede and S. G. Gal. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems.* 151(3), 581–599.
- [6] Cori. (2021). EpiEstim: a demonstration. <https://shiny.dide.imperial.ac.uk/epiestim/>.
- [7] F. Gasseem and A.A. Qurtam and M. Almalahi and M. Rabih and K. Aldwoah and A. El-Sayed and E.I. Hassan. (2025). Exploring SEIR Influenza Epidemic Model via Fuzzy ABC Fractional Derivatives with Crowley–Martin Incidence Rate. *Fractal and Fractional.* 9, 402.

- [8] J. Giesecke. “Modern Infectious Disease Epidemiology”, CRC Press, London, 2017.
- [9] T. Gunasekar and S. Manikandan and S. Haque and M. Suba and N. Mlaiki and B. Roy. (2025). Fractal-fractional mathematical modeling of monkeypox disease and analysis of its Ulam–Hyers stability. *Boundary Value Problems*. v.20.
- [10] H. W. Hethcote. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. *Mathematical Biosciences*. v-42. n-4. p: 599-653.
- [11] S. Iqbal and N. Azhar and R. Manzoor and S. Kalsoom. (2025). Application of Fractional Integral Transform in Fuzzy Differential Equations. *Fractional Calculus - From Theory to Applications*. SN - 978-1-83634-172-7. PB - Intechopen. CY - London. TY - CHAP.
- [12] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems”, 3rd ed, Prentice Hall, 2002.
- [13] T. M. Mack. (1972). Smallpox in Europe, 1950–1971. *The Journal of Infectious Diseases*. 125(2):161–169.
- [14] S. C. Mpeshe. (2022). Fuzzy seir epidemic model of amoebiasis infection in human. *Hindawi-Advances in Fuzzy Systems*. 2022(5292830):1–10.
- [15] A. H. Msmali and F. Dayan and M. Rafiq and N. Ahmed and A. A. H. Ahmadi and H. H. Hamali. (2023). A nonstandard computational investigation of seir model with fuzzy transmission, recovery and death rates. *CMC-Computers, Materials Continua*. 77(2):2251–2269.
- [16] F. Ndaïrou and I. Area and J. J. Nieto and D. F. M Torres. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan, *Chaos, Solitons and Fractals*. v-135.
- [17] S. Paul and A. Mahata and M. Karak and S. Mukherjee and S. Biswas and B. Roy. (2024) Dynamical behavior of fractal fractional order monkeypox virus model. *Franklin Open*. v.7.
- [18] H. Saber and M. A. Almalahi and H. Albala and K. Aldwoah and A. Alsulami and K. Shah and A. Moumen. (2024). Investigating a Nonlinear Fractional Evolution Control Model Using W-Piecewise Hybrid Derivatives: An Application of a Breast Cancer Model. *Fractal and Fractional*. 8(735):1–23.
- [19] S. Salahshour and A. Ahmadian and F. Ismail and D. Baleanu and N. Senu. (2015). A New fractional derivative for differential equation of fractional order under interval uncertainty. *Advances in Mechanical Engineering*. 7(12) 1–11.
- [20] A. M. O. Santos, Aplicação de um modelo matemático SEIR com quarentena e vacinação para o estudo da mpox no Brasil, Dissertação de mestrado, IMF-UFPel, 2023.
- [21] S. H. Strogatz(2019), “Nonlinear Dynamics and Chaos”, 2nd ed, CRC Press, 2029.
- [22] E. A. Waldman and T. E. C. Rosa, “Vigilância em Saúde Pública. Série Saúde e Cidadania”, Editora Fundação Peirópolis Ltda, São Paulo, 1998.
- [23] WHO. (2024). Mpox. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/mpox>.
- [24] WHO. (2023). World Health Organization Data . <https://data.who.int/countries/180>.
- [25] WHO. (2025). Global Mpox Trends. https://worldhealthorg.shinyapps.io/mpx_global/sec-drc.
- [26] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. (1965). *Inf. Control*. 8, 338–353.