Análise Estrutural de Gargalos em Pipelines Computacionais via Teoria dos Grafos e Caminho Crítico

Christopher Paladino do Nascimento
Universidade Estácio de Sá
E-mail: paladin.birth@gmail.com

Dr. Erickson H. S. Alves
Universidade Federal do Amazonas
E-mail: erickson.higor@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho, analisamos gargalos em pipelines computacionais modelados como grafos direcionados acíclicos (DAGs). Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado, com $V = \{T_1, \dots, T_n\}$ representando as tarefas de um pipeline e $E \subseteq V \times V$ representando dependências. Cada tarefa possui duração $\tau_i > 0$ e assume-se que G é acíclico.

As métricas estruturais estudadas incluem centralidade de grau, proximidade, intermediação e autovetor [1, 2, 3, 5]. A centralidade de intermediação é dada por

$$C_B(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}, \tag{1}$$

em que σ_{st} é o número de caminhos mínimos entre s e t, e $\sigma_{st}(v)$ aqueles que passam por v. A centralidade de proximidade é

$$C_C(v) = \left(\sum_{u \in V} d(v, u) \right)^{-1}, \tag{2}$$

com $d(v, u)$ representando a distância geodésica.

Para identificar o caminho crítico, utilizamos ordenação topológica e programação dinâmica [4]. Definimos

$$dp(v) = \tau(v) + \max_{(u,v) \in E} dp(u), \tag{3}$$

com condição inicial $dp(v) = \tau(v)$ quando v não possui predecessores. O makespan é

$$M = \max_{v \in V} dp(v). \tag{4}$$

Realizamos $N = 10^4$ simulações Monte Carlo, atribuindo a cada tarefa uma duração $\tau_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Em cada execução identificou-se o caminho crítico π_k. A frequência crítica é

$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}(T_i \in \pi_k). \tag{5}$$

A relação entre as métricas estruturais $m(v)$ e o impacto temporal $\Delta M(v)$ foi estimada via coeficiente de Pearson:

$$\rho(m, \Delta M) = \frac{\mathrm{Cov}(m(v), \Delta M(v))}{\sigma_m \sigma_{\Delta M}}, \tag{6}$$

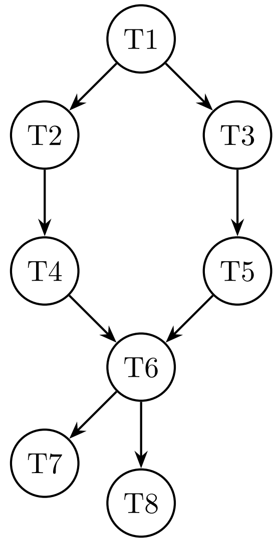

Figura 1: DAG sintético do pipeline analisado.

em que $m(v)$ representa uma medida estrutural (por exemplo, intermediação) e $\Delta M(v)$ representa a variação do makespan quando $\tau(v)$ é perturbado.

Os resultados indicam que tarefas com alta centralidade de intermediação tendem a apresentar $f_i \approx 1$, evidenciando função de gargalos estruturais. Entretanto, as correlações lineares entre métricas de centralidade e impacto temporal foram baixas ($|\rho| < 0.25$), indicando que medidas puramente estruturais não capturam adequadamente o comportamento temporal. O método do caminho crítico, por outro lado, alinhou-se melhor ao makespan observado, servindo como preditor robusto de gargalos efetivos.

Palavras-chave: *Teoria dos Grafos; caminho crítico; centralidade; DAG; pipelines computacionais.*

Referências

[1] A.-L. Barabási. *Network Science*. Cambridge University Press, 2016.

[2] P. Bonacich. Power and centrality: a family of measures. *American Journal of Sociology*, 92(5):1170–1182, 1987.

[3] L. C. Freeman. Centrality in social networks: conceptual clarification. *Social Networks*, 1(3):215–239, 1979.

[4] J. E. Kelley, M. R. Walker. Critical-path planning and scheduling. *Proc. Eastern Joint Computer Conference*, ACM, 1959.

[5] M. E. J. Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, 2010.